الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات

مطبوعة تحت عنوان :

التكاملات الثنائية و الثلاثية

أسس و حلول

من إعداد : أ. رحومة عبد الحميد

السنة الجامعية : 2019-2020م

مقدمة

أثار حساب المساحات والأحجام اهتمام العلماء الرياضيين منذ زمن بعيد، فلقد أبصر هذا القطاع المتقدم من البحث الرياضي النور في القرن التاسع الميلادي. وأمام هذه الإشكالية المتمثلة في حساب الحجوم، والمساحات، عزم العطالة و...إلخ وضع الرياضيون قوانين ونظريات تساعد على حل هذا الإشكال من بينها قوانين ونظريات تطور حساب التكامل الثنائي والثلاثي .

قسمنا هذه المطبوعة على أساس الجانب النظري لتتضمن ثلاثة فصول :

الفصل الأول : تناولنا فيه التكامل الثنائي (بصفة مركزة) من خلال التطرق لتعريفه، نظريات حسابه، طرق تيسير حسابه.... التكامل المحدود (البسيط)، تعريفه، خواصه وطرق حسابه اخذ في الحسبان بعين الاعتبار. أن التكامل الثنائي (وهو موضوعنا) يشبه التكامل المحدود عن قرب مع التغيرات المناسبة، بل أن حساب التكامل الثنائي يرجع إلى حساب التكامل المحدود.

وأما الفصل الثاني : تناولنا بعض تطبيقات التكامل الثنائي في الفيزياء من خلال حساب كل من: الحجم، مساحة منطقة مستوية، مساحة سطح، كتلة مادة معلومة الكثافة السطحية، عزم العطالة الذاتي وإحداثيات مركز الثقل، إضافة إلى بعض تطبيقات التكامل الثنائي في الكهرباء، الكهرومغناطيسية وميكانيك الموائع.

وأما الفصل الثالث : : تناولنا فيه التكامل الثلاثي (بصفة مركزة) من خلال التطرق لتعريفه، نظريات حسابه، طرق تيسير حسابه.... بالأستفاده من طرق حساب التكامل الثنائي المحدود و تعريفه، خواصه وطرق تيسير حسابه اخذين في الحسبان و بعين الاعتبار. أن حساب التكامل الثلاثي يرجع إلى حساب التكامل الثنائي المحدود غالبا .

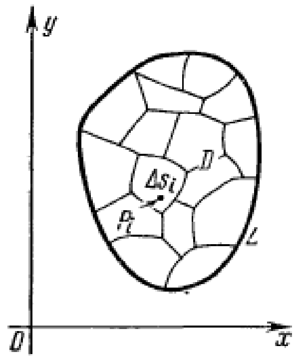
الفصل الأول : التكاملات الثنائية نظريات و نماذج وحلول

1.1. تعريف التكامل الثنائي

نفرض منطقة مغلقة D في المستوي (oxy)، محدودة بالمنحنى L؛ ونفرض أنه في المنطقة D معطات الدالة المستمرة والمعرفة:

$$f: D \subset IR^2 : D \to IR \quad , \qquad (x, y) \to z = f(x, y)$$

نقسم المنطقة D بمنحنيات كيفية إلى n مجموعة جزئية $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \Delta S_n$، وحتى لا نكثر التسميات نرمز كذلك إلى مساحاتها على الترتيب بـ $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \Delta S_n$. نختار بصفة كيفية في كل ΔS_i نقطة $P_i(x_i, y_i)$ (هذه النقطة تكون داخلية أو على حدودΔS_i)، نحصل على النقاط $P_1, P_2 \ldots \ldots \ldots \ldots P_n$. نرمز بـ $f(P_1), f(P_2) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, f(P_n)$ إلى قيم الدالة f في النقط المختارة كما يوضح الشكل المرفق أسفله .



ونكتب مجموع حواصل الضرب:

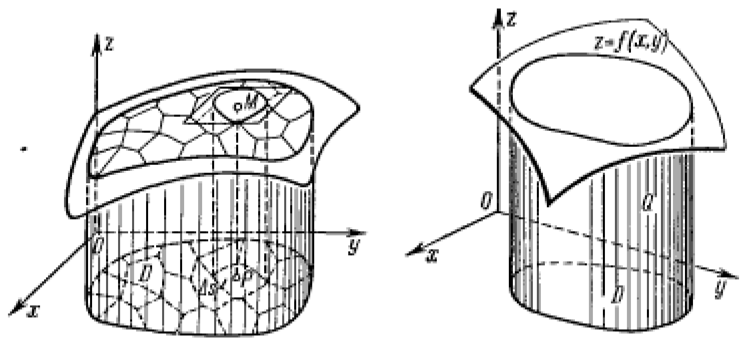
$$\mathrm{V}_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + f(P_n)\Delta S_n$$

أو جمعا نكتب :

$$\mathrm{V}_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta S_i \qquad (1)$$

تسمى العبارة (1) سلسلة ريمان أو (المجموع التكاملي) للدالة f في المنطقةD .

إذا كانت $f > 0$ في المنطقة D، يمكننا تمثيل هندسيا كل عنصر $f(P_i)\Delta S_i$ كحجم للأسطوانة ذات القاعدةΔS_i والارتفاع $f(P_i)$ وبالتالي V_n هو مجموع حجوم الأسطوانات العنصرية، أي حجم الجسم الدرجي. كما يوضح الشكل المرفق.



نعتبر متتالية من المجاميع التكاملية المكونة بواسطة الدالة f في المنطقة D.

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots V_{n_k} \qquad (2)$$

بالنسبة لتقسيمات متعددة لـ D على شكل مجموعات جزئية ΔS_i، نفرض أن أكبر قطر لـ ΔS_i يؤول نحو 0 عندها $n_k \to \infty$.

نظرية.1:

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ مستمرة في المنطقة المغلقة D فإن المتتالية (2) للمجاميع التكاملية (1) لديها نهاية إذا كان أكبر قطر للمناطق الجزئية ΔS_i يؤول نحو الصفر و$n \to \infty$ وهذه النهاية وحيدة لأية متتالية على الشكل (2)، أي أنها لا تعتمد على طريقة تقسيم المنطقة D إلى المناطق ΔS_i ولا باختيار النقاط P_i داخل المناطق ΔS_i، وتسمى هذه النهاية بالتكامل الثنائي للدالة f في

المنطقة ويرمز له :

$$\iint_D f(x,y)dxdy \quad \text{أو} \quad \iint_D f(P)ds$$

أي أن:

$$\lim_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dxdy$$

المنطقة D تسمى منطقة التكامل.

في حالة المنطقة $D = [a \quad b] \times [c \quad d]$ مستطيل منطقة التكامل فان دستور **ريمان** يصبح من الشكل :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}i, c + \frac{d-c}{n}j\right)$$

في حالة المنطقة $D = [0 \quad 1]^2$ مربع منطقة التكامل فان

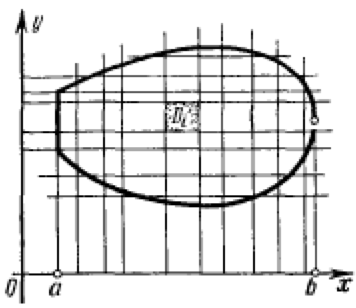
$$\iint_{[0 \quad 1]^2} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$$

على سبيل المثال

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{\frac{i+j}{n}} = \iint_{[0 \quad 1]^2} e^{x+y}dxdy = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = (e-1)^2$$

ملاحظة.1 :

بما أن التكامل الثنائي لا يعتمد على طريقة التقسيم فيمكن أن نقسم المنطقة D إلى مستطيلات كما هو موضح في الشكل أسفله.



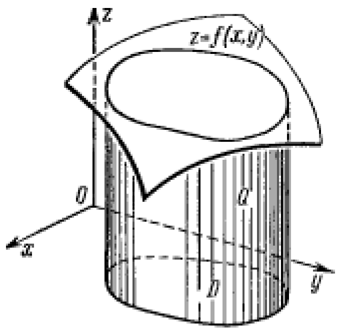
-

2.1 المعنى الهندسي للتكامل الثنائي في حالة:

$$:\forall(x,y) \in D : \qquad f(x,y) \geq 0$$

إذا كانت $f(x,y) \geq 0$ فإن التكامل الثنائي للدالة f في المنطقة المغلقة D يساوي حجم الجسم V المحدود بالسطح المعرف بالمعادلة $z = f(x,y)$ والمستوي ذو المعادلة $z = 0$.

والسطح الأسطواني الذي توازي مولداته المحور (oz)، أما دليله فهو حدود المنطقة D كما هو موضح في الشكل الموالي



3.1. نظريات حول حساب التكامل الثنائي

النظرية1.

التكامل الثنائي لمجموع دالتين في المنطقة D يساوي مجموع التكاملين الثنائيين في المنطقة D لكل دالة على انفراد أي:

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,ds = \iint_D f(x,y)\,ds + \iint_D g(x,y)\,ds$$

البرهان:

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,ds = \lim_{diam\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(P_i)+d(P_i)]\,\Delta S_i$$

$$= \lim_{diam\Delta S_i\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{g}(P_i)\Delta S_i\right]$$

بما أن المجموعتين متقاربين فيمكن توزيع النهاية.

$$\lim_{diam\Delta S_i\to 0}\ \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i + \lim_{diam\Delta S_i\to 0}\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{g}(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)ds + \iint_D \mathrm{g}(x,y)ds$$

النظرية .2

يمكن إخراج المعامل الثابت خارج إشارة التكامل الثنائي.

$$\forall\lambda\in R:\ \iint_D \lambda\, f(x,y)ds = \lambda\iint_D f(x,y)ds$$

البرهان:

$$\iint_D \lambda f(x,y)ds = \lim_{diam\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\lambda\, f(P_i)\Delta S_i = \lim_{diam\Delta S_i\to 0}\lambda\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

$$= \lambda \lim_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \lambda \iint_D f(x,y)\, ds$$

النظرية 3.

إذا كانت المنطقة D مركبة من منطقتين جزئيتين D_1 و D_2 بدون نقطة داخلية مشتركة، وإذا كانت الدالة f مستمرة في كل نقاط D فإنه لدينا:

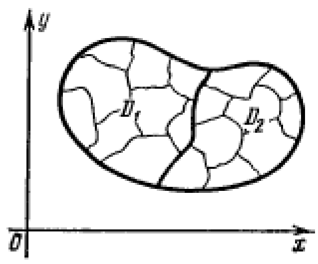
$$\iint_D f(x,y)\, ds = \iint_{D_1} f(x,y)\, ds + \iint_{D_2} f(x,y)\, ds \qquad (3)$$

البرهان:

يمكننا تمثيل المجموع التكاملي في D على الشكل:

$$\sum_{\mathrm{D}} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(P_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(P_i)\Delta S_i \qquad (4)$$

المجموع الأول يحتوي على العناصر المتعلقة بالمناطق الجزئية لـ D_1 والمجموع الثاني على العناصر المتعلقة بالمناطق الجزئية لـ D_2.التكامل الثنائي لا يعتمد على طريقة التقسيم. ولذا نقسم المنطقة D إلى منطقتين D_1 و D_2 بحيث تكون الحدود المشتركة بينهما هي كذلك حدود المناطق ΔS_i، وبالانتقال من العبارة (4) إلى النهاية عندما $diam\Delta S_i \to 0$ نحصل على العبارة(3). كما يوضح الشكل المرفق أسفله .



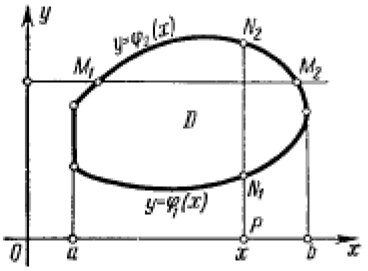
ملاحظة.2:

النظرية (3) تبقى صحيحة إذا كانت المنطقة D مركبة من عدد كيفي من المجموعات بدون نقاط داخلية مشتركة.

4.1. حساب التكامل الثنائي

1.4.1. تعريف المنطقة المنتظمة

نفرض أن المنطقة D الواقعة في المستوي (oxy) تتميز بأن أي مستقيم موازي لأحد محاور الإحداثيات، وليكن على سبيل المثال المحور (oy)، ومار بنقطة داخلية في المنطقة D يقطع حدود المنطقة في نقطتين N_1 ، N_2 كما هو مبين في الشكل. (النقطة الداخلية للمنطقة D هي النقطة التي لا تقع على حدود هذه المنطقة).



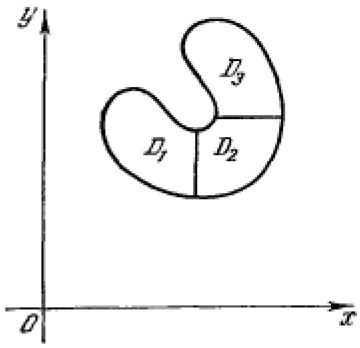
نفرض أن المنطقة D محدودة بالمنحنيات $y=\varphi_1(x)$، $y=\varphi_2(x)$، $x=a$ و $x=b$ حيث: $a<$ و φ_1،φ_2 ، $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ مستمرتان على المجال $[a,b]$.

نسمي المنطقة D مثل ما سبق بالمنطقة المنتظمة في اتجاه المحور (oy).

وبطريقة مماثلة نعرف المنطقة المنتظمة في اتجاه المحور (ox).

المنطقة المنتظمة في اتجاه محوري الإحداثيات تسمى باختصار: منطقة منتظمة.

لنعطي مثال على منطقة غير منتظمة في اتجاه المحورين كما هو موضح في الشكل.



2.4.1. دراسة الصيغة: $I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx$ وخواصها.

نفرض أن الدالة $f(x,y)$ مستمرة على المنطقة D.

سندرس الصيغة الآتية:

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx$$

والتي نسميها (بالتكامل الثنائي) محتفظين بالأقواس حيث سنبرهن أن العبارة I_D ما هي إلا التكامل الثنائي المعرف في 2.1. وعندها نحذف الأقواس في عبارة (التكامل الثنائي).

في هذه الصيغة يحسب أولا التكامل الواقع ما بين قوسين علما بأن التكامل يجرى بالنسبة لـ y باعتبار x ثابتا، ونتيجة لعملية التكامل، تنتج دالة مستمرة بالنسبة لـx.

$$\phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

وهذه الدالة المحصل عليها نكاملها بالنسبة لـ x بين a و b فنحصل على عدد ثابت وليكنλ.

$$I_D = \int_a^b \phi(x)\,dx = \lambda$$

وذلك إذا كانت المنطقة D منتظمة أو منتظمة في اتجاه المحور(oy).

مثال: أحسب التكامل الموالي:

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)dy \right) dx$$

حيث D محدودة بالمنحنيات ذات المعادلات $x=1$ ، $x=0$ ، $y=x^2$ ، $y=x$.

الحل:

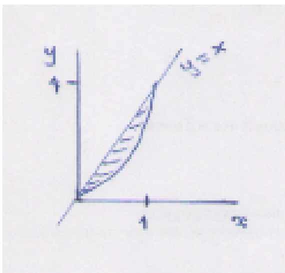
نحسب أولا التكامل المتواجد بين قوسين

$$\phi(x) = \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)\,dy = \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x} = \frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}$$

وبتكامل الدالة الناتجة $\phi(x)$ بين 0 و 1 نحصل على:

$$I_D = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right]_0^1 = 0$$

والشكل أسفله يوضح المنطقة D.

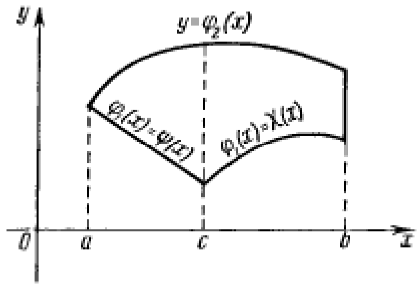


ملاحظة.3 : قد يصادفنا أن: إحدى الدالتين $y=\varphi_1(x)$، $y=\varphi_2(x)$ لا يمكن التعبير عنها في المنطقة D بصيغة تحليلية واحدة، في كل منطقة تغيرx، (من $x=a$ إلى $x=b$).

نفرض على سبيل المثال بأن $a < c < b$ علما بأن: $\varphi_1(x) = \Psi(x)$ في المجال $[a,c]$و $\varphi_2(x) = \mu(x)$ في المجال $[c,b]$ حيث كل من الدالتين Ψ و μ معطيتان تحليليا، عندئذ يكتب (التكامل الثنائي) I_D كما يلي:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$
$$= \int_a^c \left(\int_{\Psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\mu(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

والشكل يوضح ذلك.



يكون (التكامل الثنائي) I_D صيغة مماثلة إذا أعطيت الدالة $x \longmapsto \varphi_2(x)$ بصيغ مختلفة في النقاط المختلفة للمجال $[a,b]$،

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \psi(x) & a \le x \le c \\ \chi(x) & c \le x \le b \end{cases}$$

الخاصية (1)

إذا قسمت المنطقة D المنتظمة في اتجاه أحد المحورين إلى منطقتين D_1 و D_2 بمستقيم مواز للمحور (oy) أو للمحور (ox)، فإن (التكامل الثنائي) I_D في المنطقة D يساوي مجموع (التكاملين الثنائيتين) للمنطقتين D_1 ، D_2.

أي أن:

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$$

البرهان:

أ)نفرض أن المستقيم ذو المعادلة $x = c$ حيث $a < c < b$ يقسم المنطقة D إلى منطقتين D_1 ، D_2 منتظمتين في اتجاه المحور (oy) عندئذ:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \phi(x)dx$$

$$= \int_a^c \phi(x)dx + \int_c^b \phi(x)dx = \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$+\int_{c}^{b}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = I_{D_1}+I_{D_2}$$

ومنه: $I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$

ب)نفرض أن المستقيم ذو المعادلة $y = h$ يقسم المنطقة D إلى منطقتين D_1 ، D_2 منتظمتين في اتجاه المحور (ox) كما هو مبين في الشكل، نرمز بــM_1 ، M_2 إلى نقطتي تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = h$ مع L حد المنطقة D، ونرمز بـ a_1 ، b_1 فاصلتي M_1 ، M_2 على الترتيب.

•المنطقة D_1 محددة بمنحنيات مستمرة.

(1) $y = \varphi_1(x)$

(2) المنحنى M_2B_1 A_1M_1 والذي نكتب معادلته اصطلاحا كما يلي $y = \varphi_1^*(x)$، ونأخذ بعين الاعتبار $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ عندما $a \le x \le a_1$ و $b_1 \le x \le b$ و $\varphi_1^*(x) = h$ عندما $a_1 \le x \le b_1$.

(3) المستقيمان ذوي المعادلات $x = a$ ، $x = b$.

المنطقة D_2 محددة بالمنحنيين.

$$y = \varphi_1^*(x) \text{ و } y = \varphi_2(x) \text{ عندما } a_1 \le x \le b_1$$

فيكون لدينا ما يلي:

$$I_D = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$+\underbrace{\int_a^b\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx}_{I}$$

نقسم (التكامل الثنائي) الأخير/ إلى ثلاثة (تكاملات ثنائية) بتطبيق علاقة شال:

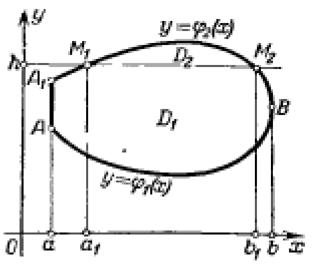
$$I = \int_a^{a_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{b_1}^{b}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

حيث نعلم أن $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ في المجال $[a, a_1]$ وفي المجال $[b_1, b]$ إذا (التكاملين الثنائيين) الأول والثالث يساويان الصفر ويبقى لنا ما يلي:

$$I_D = \int_{a}^{b} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

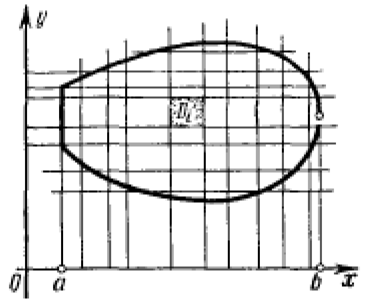
يكون (التكامل الثنائي) الأول هو تكامل في المنطقة D_1 وأما الثاني في المنطقة D_2 ومنه:

$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}$ كما يوضح الشكل.



نتيجة.1

إذا قسمنا المنطقة D بخطوط موازية لمحاور الإحداثيات إلى عدد كيفي من مناطق جزئية منتظمة $\left(D_1، D_2، \dots \dots \dots \dots \dots \dots D_n\right)$، فإن (التكامل الثنائي) في المنطقة D يساوي مجموع (التكاملات الثنائية) في المناطق الجزئية $I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + \cdots \dots \dots \dots \dots I_{D_n}$ كما يوضح الشكل المبين أسفله .



الخاصية (2)

الحصر الأصغري للتكامل I_D (تقدير التكامل الثنائي):

نفرض أن m و M هما القيمتان الصغرى والكبرى للدالة f في المنطقة D نرمز بالحرف S إلى مساحة المنطقة D عندها تكون العلاقة التالية صحيحة:

$$m.S \leq \int_{a}^{b} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \leq M.S$$

البرهان:

نجري تقديرا للتكامل ما بين قوسين ونرمز له كما أسلفنا بـ $\phi(x)$

$$\phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \leq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} Mdy = M[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]$$

وعندها يكون:

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \leq \int_a^b M[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx = M.S \qquad (5)$$

ومنه:

$$I_D \leq M.S$$

وبنفس الطريقة:

$$\phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \geq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} mdy = m[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]$$

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \geq \int_a^b m[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx = m.S \qquad (6)$$

ومنه:

$$I_D \geq m.S$$

من النتيجتين(5) و(6) نكتب العلاقة:

$$m.S \leq I_D \leq M.S$$

الخاصية (3):

نظرية المتوسط.4

إن (التكامل الثنائي) I_D للدالة المستمرة f على المنطقة D ذات مساحة S يساوي حاصل ضرب المساحة S في قيمة الدالة في نقطة ما P من المنطقة D أي:

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = f(P).S$$

البرهان:

لدينا: $m.S \leq I_D \leq M.S$

ومنه: $m \leq \frac{I_D}{S} \leq M$

والعدد $\frac{I_D}{S}$ محصور بين القيمتين الصغرى والكبرى للدالة f في المنطقة D.

وبما أن الدالة f مستمرة على D فهي حسب نظرية القيم المتوسطة تأخذ في نقلة ما P في المنطقة D قيمة تساوي العدد $\frac{I_D}{S}$ أي:

$$\frac{I_D}{S} = f(P)$$

ومنه:

$$I_D = f(P).S$$

5.1.كيفية حساب التكامل الثنائي باستعمال التكامل المحدود

نظرية.5

التكامل الثنائي للدالة المستمرة f في المنطقة المغلقة والمنتظمة D في أحد اتجاه المحورين يساوي التكامل I_D لهذه الدالة في نفس المنطقة أي:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

البرهان:

نعتبر أن المنطقة D منتظمة في اتجاه المحور (oy) ومحددة بالمنحنيات ذات المعادلات $x = b$ ، $y =$ و $x = a$ $\varphi_1(x)$ ، $y = \varphi_2(x)$

نقسم المنطقة D بمستقيمات موازية لمحوري الإحداثيات إلى n من المناطق المنتظمة المستطيلة $(\Delta S_1, \Delta S_2, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \Delta S_n)$ وعلى أساس الخاصية (1) للتكامل فإن:

$$I_D = \mathrm{I}_{\Delta S_1} + \mathrm{I}_{\Delta S_2} + \cdots \dots \dots \dots \dots I_{\Delta S_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta S_i}$$

وتبعا لنظرية المتوسط للتكامل I_D (الخاصية (3)) نكتب: $I_{\Delta S_i} = f(P_i)\Delta S_i$

عندها نكتب المجموع كما يلي:

$$I_D = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \cdots \dots \dots \dots f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ (*)$$

نهاية المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ عندما $n \to \infty$ وعندما يؤول أكبر قطر للمساحات ΔS_i نحو الصفر، تكون موجودة ومساوية للتكامل الثنائي للدالة f في المنطقة D. القيمة العددية لـ I_D للطرف الأيسر في $(*)$، ناتجة من تكاملين بسيطين متواليين، لا تتعلق بـ n .نمر إلى النهاية في $(*)$:

$$I_D = \lim_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dydx$$

هنا: نلاحظ أن I_D هو التكامل الثنائي لـ f في D فحق لنا أن نحذف الأقواس في عبارة (التكامل الثنائي).

نحصل أخيرا على:

$$I_D = \iint_D f(x,y)dydx \qquad (7)$$

ملاحظة.4

تكون للعلاقة (7) في حالة $f(x,y) \geq 0$ تفسير هندسي واضح عندما نأخذ جسما محددا بالسطح $z = f(x,y)$ والمستوي $z = 0$ والسطح الأسطواني الذي تكون مولداته موازية للمحور (oz) ودليله حدود المنطقة D، فإنه يعطينا الحجم V لهذا الجسم كما أسلفنا الذكر.

$$V = \iint_D f(x,y)\, dxdy$$

فلنحسب هذا الحجم باستخدام التكامل البسيط، نعطي المستوي (ثابت$=x$)حيث $(a < x < b)$ الذي يقطع الجسم "محل الدراسة" نحسب المساحة $S(x)$ للشكل الناتج في المقطع (ثابت$=x$) وهذا الشكل الهندسي عبارة عن ما يسمى بشبه منحرف منحني محدود بالمنحنيات ذات المعادلات:

$$y = \varphi_2(x) \;, \qquad y = \varphi_1(x)\,, \qquad y = 0 \;, \qquad z = f(x,y)\,, \qquad (x = \text{ثابت})$$

كما في الشكل السابق وبالتالي نعبر عن هذه المساحة بالتكامل:

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (8)$$

وبمعرفة مساحات المقاطع المتوازية من السهل تعيين الحجم

$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$

أو بالتعويض مباشرة بالعبارة (8) للمساحة $S(x)$ نحصل على:

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad (***)$$

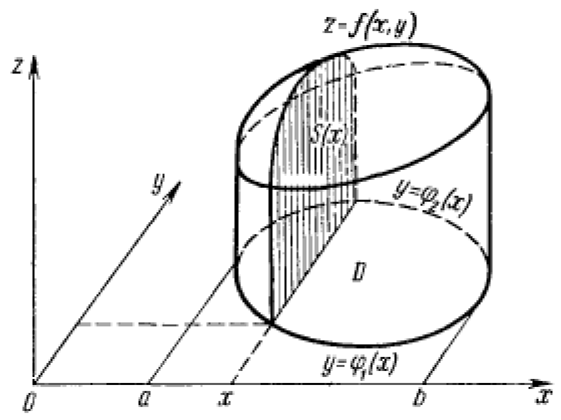
من (**) و (***) نحصل على:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

وهذا ما برهن عليه في النظرية أعلاه.

من هنا يتضح المعنى الهندسي لخاصية الحصر الأصغري للتكامل (تقدير التكامل الثنائي).

إن حجم الجسم V المحدود بالسطح $z = f(x,y)$ والمستوي $z = 0$ والسطح الأسطواني الذي تكون مولداته موازية للمحور (oz) ودليله حدود المنطقة D، يفوق حجم الأسطوانة التي قاعدتها المساحة S وارتفاعها m ولكنه أقل من حجم الأسطوانة التي قاعدتها المساحة S وارتفاعها M ، حيث m، M القيمتان الصغرى والكبرى للدالة f في المنطقة D.الشكلين المرفقين للتوضيح.

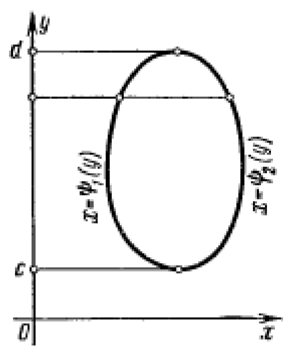


ملاحظة.5

إذا كانت المنطقة المغلقة D منتظمة في اتجاه المحور (ox) ومحدودة بالمنحنيات ذات المعادلات:

$x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$ علما أن $c < d$ و $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$

كما في الشكل.



لدينا بالطبع:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

لحساب تكامل ثنائي نستعمل حسب الحالة العلاقة:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

أو العلاقة:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

الاختيار يكون رهينة شكل المنطقة D أو صيغة الدالة $f(x,y)$ التي يرغب في تكاملها.

مثال.1

غير ترتيب التكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx$$

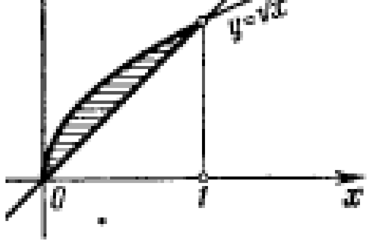
الحل:

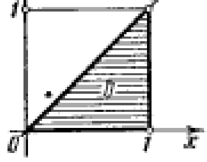
ميدان التكامل محدود بالمستقيم ذو المعادلة $y = x$ والقطع المكافئ ذو المعادلة $y = \sqrt{x}$

نرى حسب الشكل أسفله أن كل مستقيم يمر بنقطة داخلية ويوازي المحور (ox) يقطع حد الميدان D في نقطتين على الأكثر.(أي أن منتظم في هذا الاتجاه كما أسلفنا). وبالتالي يمكننا استعمال العلاقة أعلاه. $\Psi_1(y) = y^2$ ، $\Psi_2(y) = y$ ، $0 \leq x \leq 1$

ومنه:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x,y)dy \right) dx$$





مثال.2

أحسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

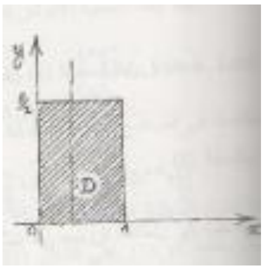
علما أن المنطقة D محدودة بالمستقيمات ذات المعادلات:

$$x = 0 \ ، \quad x = 1 \ ، \quad y = \frac{3}{2} \quad ، \quad \mathrm{y} = 0$$

الحل:

هناك طريقتين لحساب التكامل الثنائي المعطى لأن المنطقة منتظمة:

1)في اتجاه المحور (oy) الشكل.



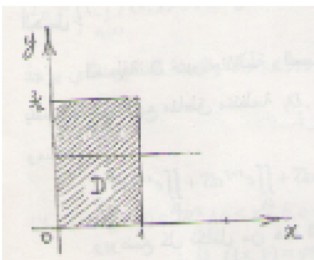
يكتب التكامل كما يلي:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{3}{2}} (4 - x^2 - y^2) dy \right) dx$$

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{3}{2}} (4 - x^2 - y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left[4\left(\frac{3}{2}\right) - x^2 \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{(3)^3}{(2)^3 . 3} \right] dx = \int_0^1 \frac{39}{8} - \frac{3}{2} x^2\, dx = \left[\frac{39}{8}(1) - \frac{3}{2} \frac{(1)^3}{3} \right] = \frac{35}{8}$$

2) في اتجاه المحور (ox) الشكل.



يكتب التكامل كما يلي:

$$V=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^1(4-x^2-y^2)dy\right)dx$$

$$V=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^1(4-x^2-y^2)dx\right)dy=\int_0^{\frac{3}{2}}\left[4x-\frac{x^3}{3}-y^2x\right]_0^1dy=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(4(1)-\frac{1}{3}-y^2\right)=\frac{11}{3}\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{(3)^2}{(2)^3}$$
$$=\frac{35}{8}$$

ملاحظة.6

إذا لم تكن المنطقة D منتظمة سواء في اتجاه المحور (ox) أو في اتجاه المحور (oy) ، فإنه لا يمكننا وضع التكامل الثنائي في هذه المنطقة في صورة التكامل I_D، بل علينا إذا أمكن ذلك، تقسيم المنطقة D غير المنتظمة إلى عدد محدود من المناطق المنتظمة في اتجاه المحور (ox) أو في اتجاه المحور (oy) أي: $(D_1, D_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots D_n)$

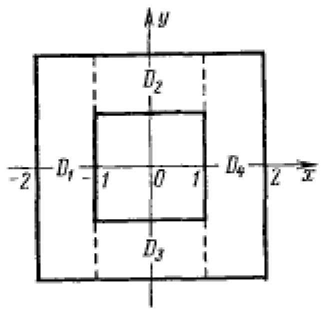
نحسب التكامل الثنائي في كل منطقة، ثم بجمع هذه التكاملات الناتجة نحصل على التكامل المطلوب في المنطقة D وهذا المثال يوضح ذلك:

مثال.3

أحسب التكامل الثنائي الآتي:

$$\iint_D e^{x+y}\,dS$$

حيث المنطقة D محصورة بين مربعين ممركزين في نقطة البداية، ذوي الأضلاع متوازية لمحوري الإحداثيات، علما أن الأضلاع تساوي 2 و4 كما في الشكل التوضيحي .



الحل:

المنطقة D غير منتظمة والمستقيمان ذو المعادلتين $x=-1$, $x=1$ يقسمانها إلى أربع مناطق منتظمة D_1, D_2, D_3, D_4.

ومنه فإن:

$$\iint_D e^{x+y}\,dS = \iint_{D_1} e^{x+y}\,dS + \iint_{D_2} e^{x+y}\,dS + \iint_{D_3} e^{x+y}\,dS + \iint_{D_4} e^{x+y}\,dS$$

وبوضع كل تكامل من هذه التكاملات في صورة التكامل I_D نجد ما يلي:

$$\iint_D e^{x+y}\,dS = \int_2^1 \left(\int_2^2 e^{x+y}\,dy \right) dx + \int_1^1 \left(\int_1^2 e^{x+y}\,dy \right) dx$$

$$+ \int_1^1 \left(\int_2^1 e^{x+y}\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_2^2 e^{x+y}\,dy \right) dx$$
$$= (e^2 - e^2)(e^1 - e^2) + (e^2 - e)(e - e^1) + (e^1 - e^2)(e - e^1) + (e^2 - e^2)(e^2 - e)$$
$$= (e^3 - e^3)(e - e^1) = 4sh3sh1$$

ملاحظة.7

فيما بعد نحذف الأقواس في التكامل الثنائي :

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

فنكتب

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$$

التكامل يجرى أولا بالنسبة للمتغير الذي يوجد تفاضله في الموضع الأول بعد الدالة مباشرة.

ملاحظة.8

إذا كانت المنطقة D مستطيل $D = \{(x,y) \in IR^2 \ / \ a \le x \le b, c \le y \le d\}$، إذا أمكن كتابة $f(x,y)$ على الشكل
$$f(x,y) = \varphi(x).\psi(y)$$

فإن:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_Q \varphi(x).\psi(y)\,dxdy$$

$$= \underbrace{\int_c^d \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \right\}}_{\text{ثابت}} \psi(y)dy$$

$$= \left(\int_a^b \varphi(x)dx \right) . \left(\int_c^d \psi(y)dy \right)$$

6.1.تغيير المتغيرات في التكامل الثنائي

1.6.1. الانتقال من الإحداثيات الديكارتيه إلى إحداثيات أخرى كيفية

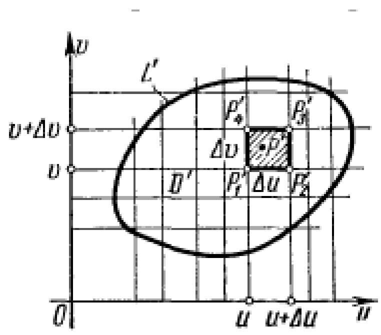
نفرض أن في المستوي (oxy) لدينا المنطقة المغلقة D المحدودة بالمنحنى L ونفرض أن الإحداثيين y, x دالتان لمتغيرين جديدين u و v:

$$x = \varphi(u, v) \qquad , \quad y = \psi(u, v) \qquad\qquad (9)$$

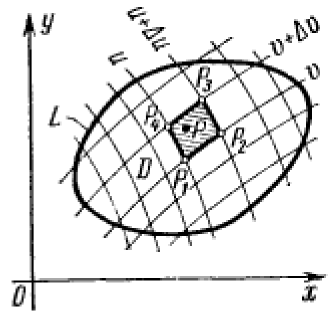
علما بأن الدالتين φ, ψ ، مستمرتان ولهما مشتقات مستمرة في منطقة ما D' نحددها فيما بعد. حسب العبارتين(9) كل زوج من قيم u و v يرافقه زوج وحيد من قيم x و y.

نفرض أن الدالتين φ, ψ تتميزان بأنه إذا أعطينا كلا من x و y قيمة محددة من المنطقة D، فإننا نعين من العلاقتين(9) قيمتين محددتين للمتغيرين u و v.

نعتبر المعلم ذو الإحداثيات الكارتيزية (ouv)



وعلى أساس ما سبق ينتج أن كل نقطة $P(x, y)$ في المستوي (oxy)



تناظرها تناظر أحادي القيمة $P'(u, v)$ في المستوي (ouv) ذات الإحداثيين u و v اللذين يتحددان بالعلاقتين(9)، والعددان u و v يسميان بالإحداثيين المنحنيين للنقطة P.

إذا كانت النقطة P ترسم في المستوي (oxy) منحنى مغلقا L يحد المنطقة D، فإن النقطة المناظرة في المستوي (ouv) ترسم منحنى مغلق L' يحد منطقة ما D'، عندئذ فإن كل نقطة من المنطقة D' تناظرها نقطة في المنطقة D.

ندرس في المنطقة D' المستقيم ذو المعادلة ($u =$ ثابت)، ومن العلاقتين(9) نجد أنه في المستوي (oxy) سيناظر هذا المستقيم على وجه العموم منحنى ما، وبالمثل يناظر كل مستقيم ذو المعادلة ($v =$ ثابت) في المستوي(ouv) منحنى ما في المستوي (oxy).

نقسم المنطقة D' بالمستقيمات ذوي المعادلات($u =$ ثابت)، ($v =$ ثابت)إلى مساحات صغيرة مستطيلة (عند ذلك لن نأخذ في عين الاعتبار المساحات الصغيرة التي نقطها حدود المنطقة)، وتقسم المنحنيات المرافقة المنطقة D إلى أشكال رباعية منحنية مثل ما هو في الشكلين السابقين.

ندرس في المستوي (ouv) المستطيل $\Delta S'$ المحدود بالمستقيمات ذوي المعادلات ($u =$ ثابت) و($u + \Delta u =$ ثابت)، ($v =$ ثابت) و($v + \Delta v =$ ثابت) والرباعي المنحني ΔS في المستوي(oxy)، وفي آن واحد نرمز لمساحتي هذين العنصرين بالرمزين ΔS و $\Delta S'$ على التوالي. عندئذ يكون: $\Delta S' = \Delta u.\Delta v$، وبشكل عام فإن المساحتين ΔS و $\Delta S'$ مختلفتان.

نفرض أنه في المنطقة D معطاة الدالة المستمرة $(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$، كل قيمة للدالة $z = f(x, y)$ في المنطقة D تناظرها نفس القيمة للدالة $(u, v) \longmapsto z = F(u, v)$ في المنطقة D'، حيث: $F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$.

ندرس المجموع التكاملي للدالة $(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$ في المنطقة D.

من الواضح أنه تتحقق المعادلة التالية:

$$\sum f(x, y)\,\Delta S = \sum F(u, v)\,\Delta S \qquad (10)$$

نحسب ΔS، أي مساحة الشكل الرباعي المنحني $P_1P_2P_3P_4$ في المستوي(oxy) حسب الشكل $(20.II)$، نعين إحداثيات رؤوسه:

$$\left.\begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1), & x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v) \\ P_2(x_2, y_2), & x_2 = \varphi(u + \Delta u, v), & y_2 = \psi(u + \Delta u, v) \\ P_3(x_3, y_3), & x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v) \\ P_3(x_4, y_4), & x_4 = \varphi(u, v + \Delta v), & y_4 = \psi(u, v + \Delta v) \end{array}\right\} \qquad (11)$$

نعتبر عند حساب مساحة الشكل الرباعي المنحني $P_1P_2P_3P_4$، أن المنحنيات P_1P_2، P_2P_3، P_3P_4، P_4P_1 عبارة عن قطع مستقيمات متوازية؛ نعوض عن تغيرات الدوال بتفاضلاتها. وبذلك سنهمل المقادير المتناهية في الصغر من رتب أعلى من رتبة المقدارين المتناهيين في الصغر Δu، Δv، عندئذ تكون العلاقة (12)كالآتي:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v) \\ x_2 = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u, & y_2 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u \\ x_3 = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v, & y_3 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \\ x_4 = \varphi(u, v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v, & y_4 = \psi(u, v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \end{array}\right\} \qquad (12)$$

وبالافتراضات السابقة يمكن اعتبار الشكل المنحني الرباعي $P_1P_2P_3P_4$ كمتوازي أضلاع، مساحته ΔS تساوي بالتقريب ضعف مساحة المثلث $P_1P_2P_3$ التي يتم حسابها بالعلاقة المناسبة للهندسة التحليلية:

$$\Delta S \approx |(x_3 - x_1).(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2).(y_3 - y_1)|$$
$$= \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v\right)\right|$$
$$= \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}\Delta u\Delta v$$

المحدد يأخذ بقيمته المطلقة ونكتب الرمز كما يلي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

ومنه فإن:

$$\Delta S \approx |J|\Delta S' \qquad (13)$$

يسمى المحدد J بالمحدد الدالي للدالتين $\psi(u,v)$ ، $\varphi(u,v)$ ويسمى أيضا باليعقوبي نسبة إلى العالم الألماني يعقوبي.

والمعادلة (13) هي معادلة تقريبية فقط لأننا خلال عملية حساب المساحة ΔS أهملنا الكميات المتناهية في الصغر من رتب عليا، غير أنه كلما كانت أبعاد العناصر ΔS و$\Delta S'$ صغيرة كلما كانت هذه المعادلة أكثر دقة، نحصل على المساواة عند المرور إلى النهاية حينها قطري العنصرين ΔS يؤولان إلى الصفر.

$$|J| = \lim_{diam\Delta S' \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'}$$

يمكن على أساس المعادلة(10) أن نكتب مايلي:

$$\sum f(x,y)\,\Delta S \approx \sum F(u,v)\,|J|\Delta S'$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما يؤول قطر $\Delta S' \to 0$ نحصل على المعادلة الدقيقة:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\,|J|dudv \qquad (14)$$

بحيث

$$|J| = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right|$$

نظرية 6

في حالة التحويل التقابل الي يحول $D(x,y)$ الى $D=(u,v)$

$$x=\varphi(u,v) \qquad , \quad y=\psi(u,v)$$

علما بأن الدالتين φ,ψ ، مستمرتان ولهما مشتقات مستمرة في منطقة ما D' نحددها فيما بعد. حسب العبارتين(9) كل زوج من قيم u و v يرافقه زوج وحيد من قيم x و y. فانه لما

$$|J|=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|$$

عندئذ

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D'} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\,|J|dudv$$

وهذه هي علاقة تغيير المتغيرات في التكامل الثنائي، وهي تعطي إمكانية تحويل حساب التكامل الثنائي في المنطقة D إلى حساب التكامل الثنائي في المنطقة D' مما قد يؤدي إلى تبسيط المسألة.

2.6.1. الانتقال من الإحداثيات الديكارتيه إلى الإحداثيات التآلفية.

لتكن D المنطقة المشكلة كمتوازي أضلاع . التبديل التآلفي هو:

$$x=au+bv+c$$

$$y=a'u+b'v+c$$

بحيث

$$\Delta=\{(u,v)\in R^2:(x,y)\in D\}$$

فان :

$$\iint_D f(x,y)dxdy=|ab'-a'b|\iint_\Delta f(au+bv+c,a'u+b'v+v)dudv$$

مثال.4

أحسب التكامل الثنائي التالي: $\iint_D (x,y)\,dxdy$.

في المنطقة D الواقعة في المستوي (oxy) المحدد بالمستقيمات ذات المعادلات:

$$y=-\frac{1}{3}x+5 \;\;،\;\; y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \;\;،\;\; y=x-3 \;\;،\;\; y=x+1$$

الحل:

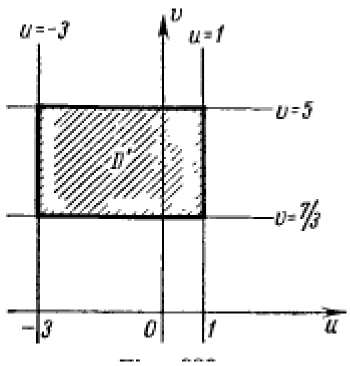
يصعب حساب هذا التكامل مباشرة غير أن تعويضا بسيطا بالمتغيرات يؤدي إلى تكامل في مستطيل أضلاعه توازي محوري الإحداثيات.

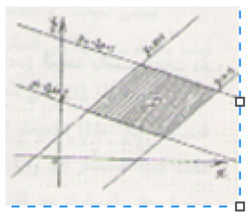
نضع:

$$v = y + \frac{1}{3}x \quad ، \quad u = y - x$$

عندئذ يتحول المستقيمان ذوي المعادلتين $y = x + 1$ ، $y = x - 3$، على الترتيب إلى المستقيمين ذوي المعادلتين $u = 1$ ، -3، في المستوي(ouv)، أما المستقيمين ذوي المعادلتين $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ ، $y = -\frac{1}{3}x + 5$، فيتحولان إلى المستقيمين ذوي المعادلتين $v = \frac{7}{3}$، $u = 5$.

وبالتالي تتحول المنطقة D كما في الشكل أسفله إلى منطقة مستطيله جديدة D' المبنية في الشك القرين له .





نعبر عن x،y بدلالة u، v كما يلي:

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \quad ، \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$$

نقوم بحساب اليعقوبي:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4} J = \quad ، \quad \Longrightarrow |J| = \frac{3}{4}$$

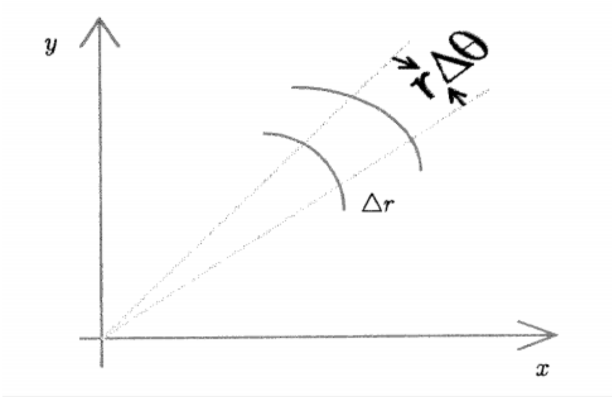
$$\iint_D (y - x)\, dxdy = \iint_{D'} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4} dudv = \iint_{D'} \frac{3}{4} ududv = \int_{\frac{7}{3}}^{5} \int_{-3}^{1} \frac{3}{4} ududv$$

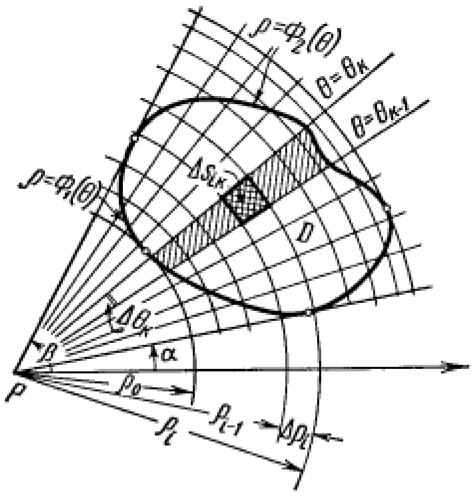
$$= \frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5} \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-3}^{1} dv = \frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{(3)^2}{2}\right)\right] dv = -\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5} 4dv = -3[v]_{\frac{7}{3}}^{5} = -3\left[5 - \frac{7}{3}\right] = -8$$

3.6.1. الانتقال من الإحداثيات الديكارتيه إلى الإحداثيات القطبية.

لتكن D المنطقة الدائرية :

$$D=\left\{(x,y):\varphi_1(\theta)\le\sqrt{x^2+y^2}\le\varphi_2(\theta),\alpha\le arctg\left(\frac{y}{x}\right)\le\beta\right\}$$





نضع :

$$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$$

وبالتالي تتحول المنطقة D الدائرية إلى منطقة مستطيله جديدة D' المبنية في الشكل القرين له .

$$D'=\{(\rho,\theta):\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\rho}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\theta & \cos\theta\\ \rho\cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}=-\rho\sin^2\theta-\rho\cos^2\theta=\rho$$

وبالتالي:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho\, d\theta$$

لتكن D المنطقة الدائرية :

$$D=\left\{(x,y):\alpha^2\le x^2+y^2\le\beta^2,\theta_1\le arctg\left(\frac{y}{x}\right)\le\theta_2\right\}$$

نضع :

$$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$$

وبالتالي تتحول المنطقة D الدائرية إلى منطقة مستطيله جديدة D'.

$$D'=\{(\rho,\theta):\alpha\le\rho\le\beta,\theta_1\le\theta\le\theta_2\}$$

و

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\rho}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\rho$$

وبالتالي:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho\, d\theta$$

مثال.5 مساحة القرص الذي نصف قطره r. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$$

$$dxdy=\rho d\rho d\theta$$

$$D'=\{(\rho,\theta):0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}$$

$$S(D)=\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho d\rho\, d\theta=\pi r^2$$

وحدة قياس مربعه.

4.6.1.دستور قرين الاول على القرص المملوء

القرص الذي نصف قطره r. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\{(x,y):x^2+y^2=r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

5.6.1. دستور قرين الثاني على القرص المملوء

القرص الذي نصف قطره r. $D = \{(x,y): 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C = \{(x,y): x^2 + y^2 = r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx - \frac{\partial q}{\partial x}dy\right) = = -\iint_D p(x,y)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}\right) dxdy$$

من الواضح :

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx - \frac{\partial q}{\partial x}dy\right) = \oint_C p(x,y)\frac{\partial q}{\partial y}dx - p(x,y)\frac{\partial q}{\partial x}dy$$

ثم نطبق دستور قرين الأول. نتحصل على :

$$\frac{\partial q}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial q}{\partial x}\right) - \frac{\partial q}{\partial y}\left(p(x,y)\frac{\partial q}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}$$

6.6.1.تطبيق نموذجي

القرص الذي نصف قطره r. $D = \{(x,y): 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C = \{(x,y): x^2 + y^2 = r^2\}$

لنحسب قيمة التكامل المضاعف : $\iint_D (4x^3 - 2xy)\, dxdy$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

بتطبيق دستور قرين

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

فان

$$\iint_D (4x^3 - 2xy)\, dxdy = \oint_C xy^2dx + x^4dy = -r^4 \int_0^{2\pi} cos\theta sin^3\theta d\theta + r^5 \int_0^{2\pi} cos^5\theta d\theta$$

يمكن للقارئ التفرغ الآن لاتمام الحساب .

7.6.1. الانتقال من الإحداثيات الديكارتيه الى الاحداثيات الألبسويدية.

لنقترح D أليبسويـد ذو المعادلة الديكارتيه :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \le 0\right\}$$

التبديل هو :

$$x = au\cos v, y = bu\sin v$$

$$dxdy = abududv$$

$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$$

بين أولا أن قانون الاحداثيات الألبسويدية. هوما يلي:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(au\cos v, bu\sin v)abududv$$

مثال : مساحة لنقترح D أليبسويـد.ذو المعادلة الكارتزيه

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \le 0\right\}$$

$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abududv = \pi ab$$

وحدة مربعه.

8.6.1.الانتقال من الإحداثيات الديكارتيه إلى احداثيات كيفيه

لنقترح D الحيز المحصور الآتي :

$$D=\{(x,y)\in R^2 : a\le xy\le b, x\ge 0, y\ge 0, y-x\ge 0, y^2-x^2\le 1\}$$

التبديل هو:

$$u=xy, v=y^2-x^2$$

$$dudv=\begin{vmatrix} y & -2x \\ 2y & 2y \end{vmatrix} dxdy$$

$$a\le u\le b, 0\le v\le 1$$

$$dudv=2(x^2+y^2)dxdy$$

قانون الاحداثيات الكيفيه هذا هوما يلي:

$$\iint_D f(xy, y^2-x^2)(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1\int_a^b f(u,v)dudv$$

مثال : أحسب التكامل الثنائي :

$$\iint_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy$$

على D الحيز المحصور.ذو المعادلة **الديكارتيه**

$$D=\{(x,y)\in R^2 : a\le xy\le b, x\ge 0, y\ge 0, y-x\ge 0, y^2-x^2\le 1\}$$

باستخدام الدستور أعلاه فان :

$$\iint_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1\int_a^b v^u dudv=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\int_0^1 v^u dv\right)du=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{du}{1+u}=\frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{a+1}$$

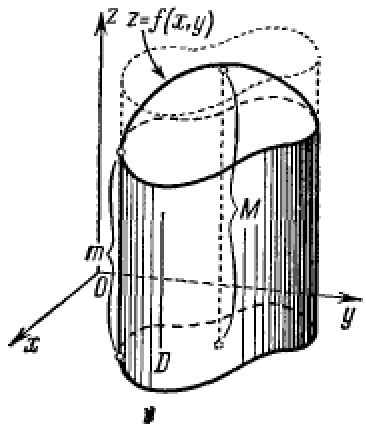
الفصل الثاني : حساب المساحات والحجوم وعزوم مراكز العطالة

1.2 تعريف الحجم

لتكن $f(x,y) \longmapsto (x,y)$ دالة موجبة في المنطقة D، إذا أردنا حساب حجم V لجسم محدود بالسطح $z = f(x,y)$ والمستوي $z = 0$، والسطح الأسطواني الذي يكون دليله حدود المنطقة D ومولداته موازية للمحور (oz)، فيكون مساويا للتكامل الثنائي للدالة f في المنطقة D أي:

$$V = \iint_D f(x,y)\, dS$$

كما يبين الشكل



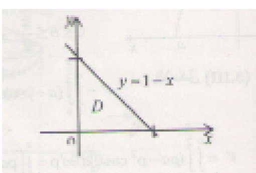
مثال.6

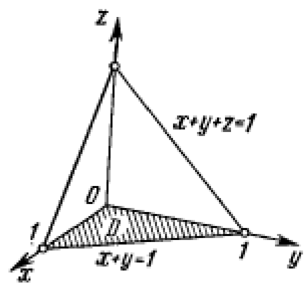
أحسب الحجم V للجسم المحدود بالسطوح ذات المعادلات :

$$.x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ x + y + z = 1$$

الحل:

D إسقاط السطح $z = 1 - x - y$ على المستوي(oxy)، فهي المنطقة المثلثة الموضحة في الشكل





D محدودة بالمستقيمات ذات المعادلات:$x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y = 1$

ومنه نقوم بحساب الحجم.

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx = \frac{1}{6} V$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1x} (1-x-y)\, dydx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1x} dx$$

بما أننا نحسب الحجم فإن: $V = \frac{1}{6}$ (وحدة الحجم).

مثال.7

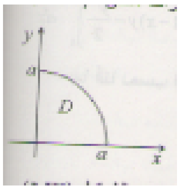
أحسب حجم V الجسم المحدود بالسطوح الآتية:

بالأسطوانة الدائرية التي نصف قطرها a ومحورها ينطبق على المحور (oz) وبالمستويات ذات المعادلات:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad x + z = a$$

الحل:

المنطقة D إسقاط السطح $x + z = a$ على المستوي (oxy) ،محدودة بالمنحنيات ذات المعادلات: $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ y = 0,$ $x = 0$. كما في الشكل :



ومنه نكتب التكامل كما يلي:

$$V = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a-x)\, dydx$$

ولكن حساب هذا التكامل يكون صعبا، نقوم بتغيير المتغيرات من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات القطبية نكتب :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

ونحسب اليعقوبي فيكون: $|J| = \rho$

وحسب المنطقة D فإن $0 \le \rho \le a$ و $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

فيصبح التكامل كما يلي:

$$V = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - \rho\cos\theta)\, \rho d\theta d\rho$$

$$V = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho a - \rho^{2\cos\theta}\right) d\theta d\rho = \int_0^a \left[\rho a\theta - \rho^{2\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho$$

$$= \int_0^a \left(\rho a\frac{\pi}{2} - \rho^2\right) d\rho$$

$$= \left[a\frac{\pi}{2}\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^a$$

$V = a^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$ (وحدة الحجم).

2.2. حساب مساحة منطقة مستوية

إذا كانت المنطقة D منتظمة، محصورة بين بياني الدالتين Φ_1 و Φ_2 بحيث $a \le x \le b$ فإنه يمكن التعبير عن هذه المساحة كما يلي:

$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} dy \right) dx$$

وبإجراء التكامل مابين قوسين نحصل على:

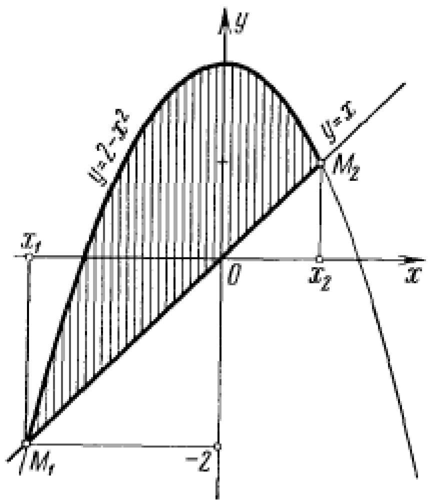
$$S = \int_a^b [\Phi_2(x) - \Phi_1(x)]\, dx$$

مثال.8

أحسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ذو المعادلة $y = 2 - x^2$ والمستقيم ذو المعادلة $x = y$

الحل:

نقوم برسم المنحنى والمستقيم كما هو في الشكل



نعين نقط تقاطع المنحنى والمستقيم،

لدينا:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$$

إذن نقطتي التقاطع هما: $M_1(-2,-2)$, $M_2(1,1)$ ومنه فإن المساحة المطلوبة هي:

$$S = \int_2^1 \left(\int_x^{2x^2} dy \right) dx = \int_2^1 (2 - x^2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_2^1 = \frac{9}{2} \quad (\text{وحدة مساحة})$$

التكامل الثنائي يمكّن من تسهيل بعض العمليات الحسابية التي لا يستطيع التكامل المحدود (البسيط) حسابها بشكل يسير.

بالفعل فالتكامل $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ ليس من السهل حسابه ليصبح من السهل حسابه عند التحول الى التكامل الثنائي :

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

من جهة ثانيه باستخدام احداثيات الكرويه والتحويل كم يلي : تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$K_n = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

نستخدم الاحداثيات القطبيه بتحويل مساعد:

$$x = \rho\cos\theta \quad \text{و} \quad y = \rho\sin\theta$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

حيث أن:

$$\rho \leq n, \qquad , \quad 0 \leq \theta \leq\leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{K_n} e^{-(x^2+y^2)} d\,\mathrm{xdy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{n} \rho e^{-\rho^2}\, d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-n^2}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{4}$$

و

$$\iint_{K_n} e^{-(x^2+y^2)} d\,\mathrm{xdy} \longrightarrow \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2$$

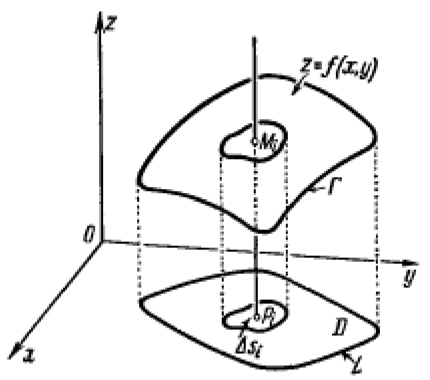
لما $\infty \longrightarrow n.$

ومنه

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. 3. حساب مساحة السطح

لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ الشكل أسفله ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $z =$ $f(x,y)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة.



الشكل

نرمز لمسقط المنحنى Γ على المستوي (oxy) بالحرف L، ونرمز للمنطقة الواقعة في المستوي (oxy) المحدودة بالمنحنى L بالحرف D.

نقسم بطريقة اختيارية المنطقة D إلى n من العناصر $(\Delta S_1, \Delta S_2, \dots \dots \dots \Delta S_n)$ –وهي قيمة مساحاتها– وفي كل عنصر ΔS_i نأخذ نقطة $P_i = (\xi_i, \eta_i)$ حيث النقطة P_i تناظرها على السطح النقطة $M_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$، نمد من النقطة M_i مستوي مماسي للسطح، حيث معادلة هذا المستوي المماس كمايلي:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \qquad (15)$$

وفي هذا المستوي نأخذ العنصر $\Delta\sigma_i$– وهي قيمة مساحاتها– الذي يكون مسقطه على المستوي (oxy) عبارة عن العنصر ΔS_i.

ندرس مجموع كل المساحات $\Delta\sigma_i$: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$، ونهاية هذا المجموع عندما يؤول أكبر قطر للعناصر $\Delta\sigma_i$ إلى الصفر، تكون هي مساحة السطح، أي:

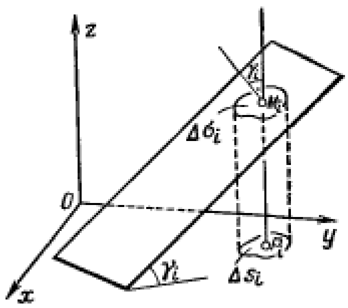
$$\sigma = \lim_{diam\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$$

والآن نحسب مساحة السطح:

نرمز بـδ_i للزاوية المحصورة بين المستوي المماس والمستوي (oxy)، وعلى أساس العلاقة المعروفة في الهندسة التحليلية يمكننا أن نكتب :

$$\Delta S_i = \Delta\sigma_i \cos\delta_i \Longrightarrow \Delta\sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\delta_i}$$

كما هو موضح في الشكل.



ومن جهة أخرى الزاوية δ_i محصورة بين المحور (oz) والمستقيم العمودي على المستوي ذو المعادلة (2)، لذا على أساس علاقات الهندسة التحليلية نحصل على:

$$\cos\delta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}}$$

ومنه فإن:

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i}$$

وتصبح σ كما يلي:

$$\sigma = \lim_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}$$

ومنه نكتب:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \qquad (16)$$

حيث D هو إسقاط السطح $z = f(x, y)$ على المستوي (oxy).وهذه هي العلاقة التي تحسب بها مساحة السطح ذو المعادلة $.z = f(x, y)$

ملاحظة.9

إذا كانت معادلة السطح معطاة كما يلي:

$$y = u(x, z) \quad \text{أو} \quad x = u(y, z) \qquad (17)$$

فإن العلاقتين المناظرتين لحساب مساحة السطح تكونان كما يلي:

$$\sigma = \iint_{D\prime} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz \qquad (18)$$

أو

$$\sigma = \iint_{D\prime} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz \qquad (19)$$

حيث D'' , D' منطقتان في المستويين $(oxz),(oyz)$ على الترتيب وهما مسقطا السطح المعطى على هذين المستويين.

بمعنى لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $y = f(x, z)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة.ومنه **مساحة السطح:**

$$\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$$

وحده مربعه. حيث D_{xz} هو إسقاط السطح $y = f(x, z)$ على المستوي (oxz).

أيضا لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $x = f(y, z)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة.ومنه **مساحة السطح:**

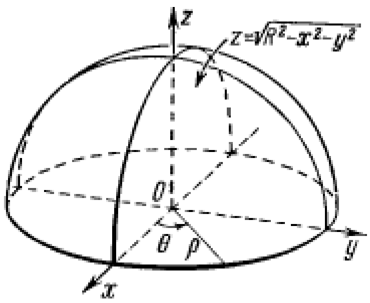
$$\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz$$

وحده مربعه. حيث D_{yz} هو إسقاط السطح $x = f(y, z)$ على المستوي (oyz).

مثال .9.

أحسب مساحة السطح σ للكرة التي معادلتها $.x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

الحل: نحسب سطح النصف العلوي للكرة: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ كما في الشكل.



في هذه الحالة:

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

و

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

وبالتالي:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}$$

تتحدد منطقة التكامل بالشرط $x^2 + y^2 \leq R^2$ وعلى أساس ووفقا للعلاقة (3) نحصل على:

$$\frac{1}{2}\sigma = \int_{R}^{R} \left(\int_{\sqrt{R^2 x^2}}^{\sqrt{R^2 x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy \right) dx$$

حساب هذا التكامل يكون صعبا لذا فإننا ننتقل إلى الإحداثيات القطبية، حيث تتحدد منطقة التكامل بـ: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq \rho \leq R$

وبالتالي فإن:

$$\sigma = 2\int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho}} \rho d\rho \right) d\theta = 2R \int_{0}^{2\pi} \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^R d\theta = 2R \int_{0}^{2\pi} R d\theta = 4\pi R^2$$

$\sigma = 4\pi R^2$ (وحدة مساحة).

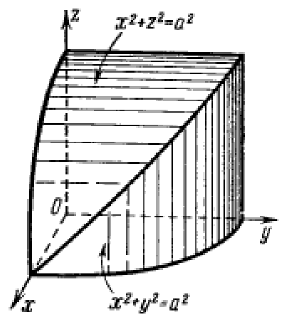
مثال 10.

عين مساحة ذلك الجزء من سطح الأسطوانة ذات المعادلة $x^2 + y^2 = a^2$ الذي تقطعه الأسطوانة ذات المعادلة $x^2 + z^2 = a^2$.

الحل:

نقوم برسم الشكل يمثل ثمن السطح المطلوب وتكون معادلة السطح هي:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



الشكل

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad و \quad \frac{\partial y}{\partial z}=0$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

ومنطقة التكامل عبارة عن ربع قرص، أي أنها تحدد بالشروط:

$$z\geq 0 \text{ و } x\geq 0 \text{ و } x^2+z^2\leq a^2$$

ومنه فإن:

$$\frac{1}{8}\sigma=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz\right)dx=a\int_0^a\left[\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{a^2x^2}}dx=a\int_0^a dx=a^2$$

.$\sigma=8a^2$ (وحدة مساحة)

4.2. حساب عزم العطالة الذاتي لمساحة الشكل المستوي

عزم العطالة الذاتي I للنقطة المادية ذات الكتلة m بالنسبة لنقطة ما ولتكن نقطة المبدأ، هو حاصل ضرب الكتلة في مربع بعدها r عن نقطة المبدأ أي:$I=mr^2$.

وعزم العطالة الذاتي لمجموعة من النقط المادية ذات الكتل $(m_1,m_2,\dots\dots\dots\dots m_n)$ بالنسبة إلى نقطة المبدأ هو مجموع عزوم العطالة الذاتية للنقط كل على إنفراد أي:

$$I=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2$$

نعين الآن عزم العطالة الذاتي لشكل مستوي مادي وليكن D.

نفرض أن الشكل D يقع في المستوي (oxy)، نعين عزم العطالة الذاتي لهذا الشكل بالنسبة إلى المبدأ، بافتراض أن الكثافة السطحية تساوي الواحد في كل المنطقة (أي أن الكتلة متجانسة).

نقسم المنطقة إلى عناصر ΔS_i، $(i=1,2,\dots\dots\dots n)$؛ وفي كل عنصر نأخذ نقطة P_i إحداثيتيها ξ_i,η_i نسمي عزم العطالة الذاتي للعنصر ΔS_i ΔI_i حاصل ضرب كتلة العنصر ΔS_i في مربع البعد ${r_i}^2={\xi_i}^2+{\eta_i}^2$ أي:

$$\Delta I_i=({\xi_i}^2+{\eta_i}^2)\Delta S_i$$

أو

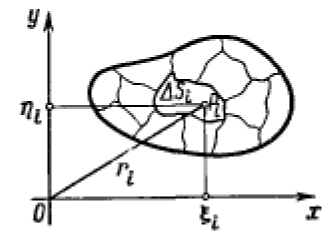
$$\Delta I_i={r_i}^2\Delta S_i$$

نكتب مجموع هذه العزوم كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n}({\xi_i}^2+{\eta_i}^2)\Delta S_i$$

وهو عبارة عن المجموع التكاملي للدالة $f(x,y)$ حيث: $(x,y)\longmapsto f(x,y)=x^2+y^2$ في المنطقة D، ونهاية المجموع التكاملي عندما يؤول أكبر قطر لكل عنصر ΔS_i إلى الصفر يعطينا عزم العطالة الذاتي للشكل D أي:

$$I_0=\lim_{diam\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}({\xi_i}^2+{\eta_i}^2)\,\Delta S_i$$



نهاية هذا المجموع هو التكامل الثنائي: $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ ومنه فإن عزم العطالة الذاتي للشكل المستوي بالنسبة إلى المبدأ هو:

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

ونسمي I_{xx}, I_{yy} بعزمي العطالة الذاتي للشكل D بالنسبة إلى المحورين $(ox),(oy)$ على الترتيب حيث:

$$I_{xx}=\iint_D y^2\,dxdy$$

و

$$I_{yy}=\iint_D x^2\,dxdy$$

مثال 11.

أحسب عزم العطالة الذاتي لقرص نصف قطره r، بالنسبة لمركز.

الحل:

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

حيث D هو القرص.

لحساب هذا التكامل ننتقل إلى الإحداثيات القطبية θ,ρ وذلك لتسهيل الحساب.

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases} \quad \text{و} \quad x^2+y^2=\rho^2 \quad ، \quad |J|=\rho$$

ومنه:

$$I_0=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{r}\rho^3 d\rho\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{r}d\theta، \quad I_0=\frac{\pi.r^4}{2}.$$

ملاحظة.10

إذا لم تكن الكثافة السطحية تساوي الواحد وإنما كانت دالة ما في المتغيرين x و y أي إذا كانت $\gamma = f(x,y)$ فإن كتلة العنصر ΔS_i تكون مساوية $f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ عندما يؤول أكبر قطر للعنصر ΔS_i نحو الصفر، فإن عزم العطالة الذاتي للشكل المستوي بالنسبة إلى المبدأ يساوي:

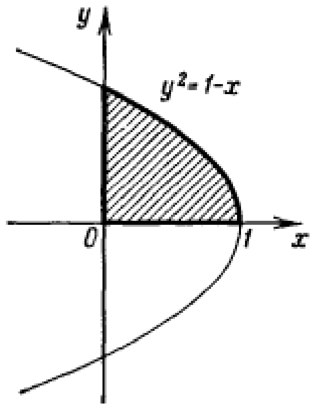
$$I_0 = \iint_D f(x,y)(x^2+y^2)\,dxdy$$

مثال.12

أحسب عزم العطالة الذاتي للمادة ذات الشكل المستوي المحدود بالمنحنيات ذات المعادلات:

$$y = 0 \ ، \ x = 0 \ ، \ y^2 = 1 - x$$

بالنسبة إلى المحور (oy)، علما أن الكثافة السطحية في كل نقطة هي: $\gamma = y$ كما يوضح الشكل:



$$I_{yy} = \iint_D yx^2\,dxdy$$

الحل:

$$\Rightarrow I_{yy} = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} yx^2 dy \right) dx$$

(وحدة عزم العطالة)

$$I_{yy} = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2\,(1-x)dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

5.2.حساب إحداثيات مركز ثقل الشكل المستوي

إذا كانت لدينا مجموعة من النقط المادية $(P_1, P_2, \dots \dots P_n$ ذات الكتل $(m_1, m_2, \dots \dots m_n$، فإن إحداثيتي مركز ثقلها C يتحدد بالعلاقة:

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \quad , \quad y_i = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

نعين الآن إحداثيتي مركز ثقل الشكل المستوي D.

نقسم هذا الشكل إلى مساحات صغيرة أولية ولتكن ΔS_i ونعتبر أن الكثافة السطحية تساوي الواحد، إذن كتلة العنصر ΔS_i تكون مساوية لمساحته.

وإذا اعتبرنا بالتقريب أن كتلة المساحة الأولية ΔS_i تكون مركزة في نقطة ما من نقطها $P_i(\xi_i,\eta_i)$، فإنه يمكن اعتبار الشكل D مجموعة من النقط المادية، وعندئذ يحدد إحداثيتا مركز ثقل هذا الشكل بالتقريب كما يلي:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i}$$

و

$$y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \, \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta S_i \longrightarrow 0$ تتحول المجاميع التكاميلية في البسطين والمقامين إلى تكاملات ثنائية فنحصل على العلاقتين الدقيقتين لحساب إحداثيتي مركز ثقل الشكل المستوي.

$$x_c = \frac{\iint_D \ xdxdy}{\iint_D \ dxdy} \quad , y_c = \frac{\iint_D \ ydxdy}{\iint_D \ dxdy} \qquad (20)$$

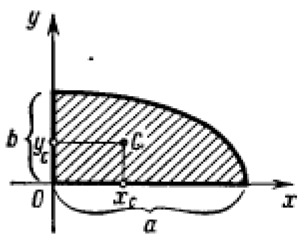
العلاقتان(20) تظل صحيحة في حالة الكثافة السطحية تساوي ثابت، أما إذا كانت الكثافة السطحية متغيرة أي: $\gamma = f(x,y)$ فإن العلاقتين المناظرتين تكونان على الصورة:

$$x_c = \frac{\iint_D \ f(x,y)xdxdy}{\iint_D \ f(x,y)dxdy} \quad , y_c = \frac{\iint_D \ f(x,y)ydxdy}{\iint_D \ f(x,y)dxdy} \qquad (21)$$

مثال.13

عين إحداثيتي مركز ثقل ربع القطع الناقص .حيث معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



الحل:

$$x_c = \frac{\iint_D \ xdxdy}{\iint_D \ dxdy} \quad , y_c = \frac{\iint_D \ ydxdy}{\iint_D \ dxdy}$$

نفرض أن $c(x_c,y_c)$ هو مركز الثقل إذا $\gamma(x,y) = 1$ حيث γ هي الكثافة السطحية.

$$M_D = \iint\limits_D dxdy = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx = \int_0^a [y]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$$

$$= \int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2 dx}$$

نضع :

$$x = a\cos r$$

يستلزم

$$\left.\begin{array}{l} r = \frac{\pi}{2} \quad \longleftarrow \quad x = 0 \\ r = 0 \quad \longleftarrow \quad x = a \end{array}\right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{a^2 - a^{2\cos^2 r}}\,.\,a(-\sin r)dr - b\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{a^2(1-\cos^2 r)}\,.\sin r\,dr = b\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1-\cos^2 r}\,.\sin r\,dr$$

$$= ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 r\,dr$$

(لأن $\sin r \geq 0$ عندما يكون $0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}$)

$$= ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2r}{2}dr = ab\left[\frac{1}{2}r - \frac{\sin 2r}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = ab\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{4}\pi ab$$

$$x_c = \frac{1}{M_D}\iint_{D} xdxdy = -\frac{1}{M_D}\int_{0}^{a}\left(\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2\ x^2}} xdy\right)dx = \frac{1}{M_D}\int_{0}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}xdx = \frac{1}{M_D}\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,xdx$$

نضع:

$$-\frac{1}{2}du = xdx \quad \Leftarrow \quad du = -2xdx \quad \Leftarrow \quad u = a^2 - x^2$$

$$x_c = \frac{1}{M_D}\frac{b}{a}\int_{a^2}^{0} -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{M_D}\frac{b}{2a}\int_{0}^{a^2} u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$x_c = \frac{1}{M_D}\frac{b}{2a}\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{a^2} = \frac{4}{\pi ab}\frac{b}{2a}\frac{2}{3}a^3 = \frac{4a}{3\pi}$$

$$y_c = \frac{1}{M_D}\iint_{D} ydxdy = \frac{1}{M_D}\int_{0}^{a}\left(\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2\ x^2 1}} ydy\right)dx = \frac{1}{M_D}\int_{0}^{a}\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$= \frac{1}{M_D}\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{a} = \frac{4}{\pi ab}.\frac{1}{2}.\frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$$

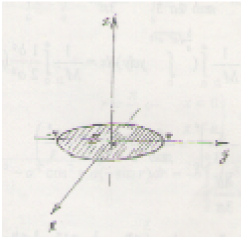
$$\Longrightarrow y_c = \frac{4}{\pi ab}\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{2}{3}a^3 = \frac{4b}{3\pi}$$

6.2. بعض التطبيقات في الكهرباء والمغناطيسية وميكانيك الموائع

1.6.2. حساب التدفق الكهربائي الذي يعبر سطح مستوي:

مثال.14

ما هي قيمة التدفق الكهربائي الذي يعبر السطح S المبين في الشكل $(12.III)$، الذي يحتوي على شحنة موزعة على شكل قرص مستوي نصف قطره $4m$ وكثافته $\tau = \frac{\sin^2\theta}{2\rho}(c/m^2)$.



الشكل

الحل:

لدينا: $\Psi = \iint_S \vec{\tau}.\overrightarrow{dS}$ حيث: Ψ:التدفق، $\vec{\tau}$:كثافة الشحنة.

نستعمل الإحداثيات القطبية لأن عبارة كثافة الشحنة مكتوبة بدلالة المتغيرين ρ, θ

$$\Psi = \int_0^{2\pi}\int_0^{4}\frac{\sin^2\theta}{2\rho}\rho d\rho d\theta$$

$$\Psi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\rho\right]_0^4 d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = [\theta]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}[\sin^2\theta]_0^{2\pi} = 2\pi c$$

2.6.2.حساب الحقل الكهربائي:

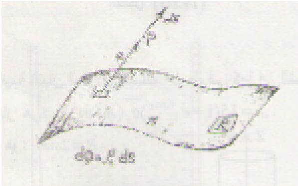
عندما تكون شحنة موزعة على سطح صفيحة، فإن كل شحنة عنصرية dQ على الصفيحة، تنتج حقلا كهربائيا عنصريا $\overrightarrow{dE}$ في نقطة ما، ولتكن P أي:

$$\overrightarrow{dE} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\overrightarrow{e_r}$$

إذا كانت لدينا كثافة الشحنة السطحية $\rho_s(c/m^2)$ ولم تكن هناك شحنات أخرى في المنطقة، فإن الحقل الكهربائي في النقطة P يكون كما يلي:

$$E = \iint_S \frac{\rho_s a_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dS$$

حيث $dQ = \rho_s dS$ كما هو موضح في الشكل التخطيطي .


الشكل

3.6.2 حساب التيار الكهربائي

إذا أعطيت لنا كثافة التيار J والتي تعبر السطح S في الشكل :

فإن التيار يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$dI = J.dS \;\Rightarrow\; I = \iint_S J.dS$$

حيث J ليس بالضرورة منتظم على السطح S والسطح S ليس بالضرورة سطح مستوي.

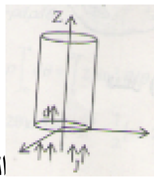
مثال.15

أوجد قيمة التيار المار في السلك الاسطواني كما في الشكل $(15.III)$.

حيث كثافة التيار هي:

$$\vec{J} = 15(1 - e^{1000r})\overrightarrow{e_z}(A/m^2)$$

ونصف قطره هو:$R = 2mm$.


الشكل

الحل:

نختار مقطع السلك S ومنه: $dI = \vec{J}.\overrightarrow{dS}$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{0.002} 15(1 - e^{1000r})\,rdrd\phi = 1{,}33.10^4 A = 0.133mA$$

4.6.2.حساب التدفق المغناطيسي

يعرف التدفق المغناطيسي Φ الذي يعبر السطح S كما يلي:

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS}$$

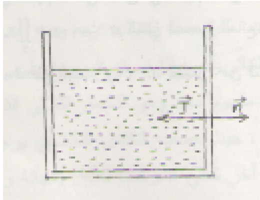
حيث:

$\vec{B}$ كثافة التدفق المغناطيسي، و $\vec{B} = u.\vec{H}$

$\vec{H}$ شدة الحقل المغناطيسي، u نفاذية الوسط.

هـ) القوة المؤثرة على سطح مائع في حالة سكون:

عندما يكون لدينا مائع (سائل) في وعاء كما يوضحه الشكل



الشكل

حيث قوة اللزوجة معدومة $\tau_{ij} = 0$ في المائع الساكن.

يؤثر المائع المتواجد في الوعاء بقوى على جوانبه متجه نحو الخارج.

ومن ناحية أخرى القوة $\overrightarrow{dF}$ المؤثرة في عنصر السطح $\overrightarrow{dS}$، الناتجة عن المائع متناسبة مع $\overrightarrow{dS}$، وليكن P معامل التناسب.

$$\lim_{dS \to 0} \frac{\overrightarrow{dF}}{dS} = P\vec{n} = -\vec{T}$$

يصبح لدينا:

$$\overrightarrow{dF} = P\overrightarrow{dS}$$

أي أن

$$\vec{F} = \iint_S P \, \overrightarrow{dS}$$

حيث P الضغط على السطح dS وهذا في عدم وجود احتكاك.

و)التدفق لمائع في حالة حركة:

1) التدفق بالكتلة

نسمي التدفق بالكتلة التدفق الكتلي عبر السطح S بالكمية

$$q_m = \iint_S \rho v_n \, d\delta.$$

2)التدفق في الحجم

نسمي التدفق في الحجم التدفق الحجمي عبر السطح S بالكمية :

$$q_v = \iint_S v_n \, d\delta$$

حيث ρ الكتلة الحجمية للمائع، v_n إسقاط السرعة $\vec{v}$ على منتصف السطح العنصري، $d\delta$ عنصر من السطح.

7.2. حوصلة دساتير حساب التكاملات الثنائية

1.في حالة المنطقة $D = [a \quad b] \times [c \quad d]$ مستطيل منطقة التكامل فان

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i, c + \frac{d-c}{n} j\right)$$

إذا كانت المنطقة $f(x,y)$ معرفة ومستمرة على المربع :

$$D=\{\langle x,y\rangle/0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$$

فان :

$$Lim_{n\to\infty}\coprod_{\mu=1}^{n}\coprod_{\nu=1}^{n}\left[1+\frac{1}{n^2}f\left(\frac{\mu}{n},\frac{\nu}{n}\right)\right]=\exp\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy\right)$$

2.نفرض أن المنطقة D محدودة بالمنحنيات $y=\varphi_1(x)$ ، $y=\varphi_2(x)$ ، $x=a$ و $x=b$ حيث: $a<$ و φ_1، φ_2 $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ ، مستمرتان على المجال $[a,b]$.نسمي المنطقة D مثل ما سبق بالمنطقة المنتظمة في اتجاه المحور (oy).

عندئذ :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dxdy}=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

3. إذا كانت المنطقة المغلقة D منتظمة في اتجاه المحور (ox) ومحدودة بالمنحنيات ذات المعادلات:

$x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$ علما أن $c<d$ و $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$.عندئذ

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

4. نظرية المتوسط

.نفرض أن المنطقة D محدودة بالمنحنيات $y=\varphi_1(x)$ ، $y=\varphi_2(x)$ ، $x=a$ و $x=b$ حيث: $a<$ و φ_1، φ_2 $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ ، مستمرتان على المجال $[a,b]$.إن (التكامل الثنائي) للدالة المستمرة f على المنطقة D ذات مساحة S يساوي حاصل ضرب المساحة S في قيمة الدالة في نقطة ما P من المنطقة D أي:

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=f(P).S$$

5. إذا كانت المنطقة D مستطيل

$$D=\left\{(x,y)\in\frac{IR^2}{}\,a\le x\le b,c\le y\le d\right\}$$

إذا أمكن كتابة $f(x,y)$ على الشكل

$$f(x,y)=\varphi(x).\psi(y)$$

فإن:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_Q \varphi(x).\psi(y)\,dxdy = \left(\int_a^b \varphi(x)dx\right).\left(\int_c^d \psi(y)dy\right)$$

6. الانتقال من إحداثيات معطاة إلى إحداثيات أخرى كيفية

نفرض أن في المستوي (oxy) لدينا المنطقة المغلقة D المحدودة بالمنحنى L ونفرض أن الإحداثيين y,x دالتان لمتغيرين جديدين u و v:

$$x = \varphi(u,v) \qquad , \quad y = \psi(u,v)$$

علما بأن الدالتين φ,ψ ، مستمرتان ولهما مشتقات مستمرة في منطقة ما D' صورة المنطقة D في المستوي (ouv).

المحدد اليعقوبية يأخذ بقيمته المطلقة ونكتب الرمز كما يلي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|$$

عندئذ

$$\iint_D f(x,y)\,dx = \iint_{D\prime} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right| dudv$$

7. الانتقال من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات التآلفية.

لتكن D المنطقة المشكلة كمتوازي أضلاع . التبديل التآلفي هو :

$$x = au + bv + c$$

و

$$y = a'u + b'v + c$$

بحيث

$$\Delta = \{(u,v) \in R^2 : (x,y) \in D\}$$

عادة مستطيل أو مربع.

فان :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = |ab' - a'b| \iint_\Delta f(au + bv + c, a'u + b'v + v)dudv$$

8. الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية.

لتكن D المنطقة الدائرية :

$$D=\left\{(x,y):\alpha^2\le x^2+y^2\le\beta^2,\theta_1\le arctg\left(\frac{y}{x}\right)\le\theta_2\right\}$$

نضع :

$$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$$

وبالتالي تتحول المنطقة D الدائرية إلى منطقة مستطيله جديدة D'.

$$D'=\{(\rho,\theta):\alpha\le\rho\le\beta,\theta_1\le\theta\le\theta_2\}$$

و

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\rho}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\rho$$

وبالتالي:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho\, d\theta$$

9. الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية.

لتكن D المنطقة الدائرية :

$$D=\left\{(x,y):\alpha\le arctg\left(\frac{y}{x}\right)\le\beta,\varphi_1(\theta)\le\sqrt{x^2+y^2}\le\varphi_2(\theta)\right\}$$

نضع :

$$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$$

وبالتالي تتحول المنطقة D الدائرية إلى منطقة مستطيله جديدة D'.

$$D'=\{(\rho,\theta):\varphi_1(\theta)\le\theta\le\varphi_2(\theta),\alpha\le\rho\le\beta\}$$

و

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\rho}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\rho$$

وبالتالي:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho d\rho\, d\theta$$

11..مساحة القرص الذي نصف قطره r.

$$D = \{(x,y): 0 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$S(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} \rho d\rho = \pi r^2$$

وحده مربعه.

12. مساحة منطقة مستوية

إذا كانت المنطقة D منتظمة، محصورة بين بياني الدالتين Φ_1 و Φ_2 بحيث $a \le x \le b$ فإنه يمكن التعبير عن هذه المساحة كما يلي:

$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} dy \right) dx$$

وبإجراء التكامل ما بين قوسين نحصل على:

$$S = \int_a^b [\Phi_2(x) - \Phi_1(x)]\, dx$$

وحده مربعه.

13. الحجم

لتكن $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ دالة موجبة في المنطقة D، في المستوي oxy إذا أردنا حساب حجم V لجسم محدود بالسطح $z = f(x,y)$ والمستوي $z = 0$، والسطح الأسطواني الذي يكون دليله حدود المنطقة D ومولداته موازية للمحور (oz)، فيكون مساويا للتكامل الثنائي للدالة f في المنطقة D أي:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

وحده مكعبه.

14. مساحة السطح

لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ الشكل أسفله ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $z = f(x, y)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة.

ومنه **مساحة السطح:**

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

وحده مربعه. حيث D هو إسقاط السطح $z = f(x, y)$ على المستوي (oxy).

15. أحسب مساحة السطح σ للكرة التي معادلتها

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

في هذه الحالة:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad و \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sigma = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho}}\rho d\rho\right) d\theta = 2R\int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}\right]_0^R d\theta = 2R\int_0^{2\pi} Rd\theta = 4\pi R^2$$

وحده مربعه.

16. عزم العطالة الذاتي لمساحة الشكل المستوي

عزم العطالة الذاتي للشكل المستوي بالنسبة إلى المبدأ هو:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

عزمي العطالة الذاتي للشكل D بالنسبة إلى المحورين $(ox), (oy)$ على الترتيب حيث:

$$I_{xx} = \iint_D y^2\, dxdy$$

و

$$I_{yy} = \iint_D x^2\, dxdy$$

17. إحداثيتي مركز ثقل الشكل المستوي D.

$$x_c = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy} \quad , \quad y_c = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}$$

18. عزم العطالة الذاتي للشكل المستويD بكثافه $\rho(x, y)$ بالنسبة إلى المبدأ هو:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, \rho(x, y) dxdy$$

عزمي العطالة الذاتي للشكل D بالنسبة إلى المحورين $(ox), (oy)$ على الترتيب حيث:

$$I_{xx} = \iint_D y^2 \rho(x, y) dxdy$$

و

$$I_{yy} = \iint_D x^2 \rho(xy)\, dxdy$$

19.دستور قرين على القرص المملوء الأول

القرص الذي نصف قطره r. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\{(x,y):x^2+y^2=r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

20. .دستور قرين على القرص المملوء الثاني

القرص الذي نصف قطره r. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\{(x,y):x^2+y^2=r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx - \frac{\partial q}{\partial x}dy\right) = = -\iint_D p(x,y)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}\right) dxdy$$

من الواضح :

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx - \frac{\partial q}{\partial x}dy\right) = \oint_C p(x,y)\frac{\partial q}{\partial y}dx - p(x,y)\frac{\partial q}{\partial x}dy$$

ثم نطبق دستور قرين الأول.

هذا الدستور أي د ستور قرين 29 يفيد في حساب تكامل ثناءي على القرص المملوء بتحويله الى تكامل منحنياتي على الدائرة حافة القرص .

21. القرص الذي نصف قطره r. $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\{(x,y):x^2+y^2=r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

بتطبيق دستور قرين

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

فان

$$\iint_D (4x^3 - 2xy)\, dxdy = \oint_C xy^2 dx + x^4 dy = -r^4 \int_0^{2\pi} cos\theta sin^3 \theta d\theta + r^5 \int_0^{2\pi} cos^5\theta d\theta$$

22. الانتقال من الإحداثيات الديكارتيه الى الاحداثيات الألبسويدية.

لنقترح D أليبسويـد ذو المعادلة الديكارتيه :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\right\}$$

التبديل هو:

$$x = au\cos v, y = bu\sin v$$

$$dxdy = abududv$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$$

قانون الاحداثيات الألبسويدية. هوما يلي:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(au\cos v, bu\sin v)abududv$$

23.الانتقال من الإحداثيات الدائرية الى الألبسويدية

لنقترح D أليبسويـد ذو المعادلة الديكارتيه :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\right\}$$

التبديل هو:

$$x = au, y = bv$$

$$dxdy = abdudv$$

و

$$u^2 + v^2 = 1$$

قانون الاحداثيات الألبسويدية **الدائرية**. هوما يلي:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = ab \iint_{u^2+v^2 1} f(au, bv)dudv$$

24.الانتقال من الإحداثيات الديكارتيه الى احداثيات كيفيه

لنقترح D الحيز المحصور الآتي :

$$D = \{(x, y) \in R^2 : a \le xy \le b, x \ge 0, y \ge 0, y - x \ge 0, y^2 - x^2 \le 1\}$$

التبديل هو:

$$u = xy, v = y^2 - x^2$$

$$dudv = \begin{vmatrix} y & -2x \\ 2y & 2y \end{vmatrix} dxdy$$

$$a \le u \le b, 0 \le v \le 1$$

$$dudv = 2(x^2 + y^2)dxdy$$

قانون الاحداثيات الكيفيه هذا هوما يلي:

$$\iint_D f(xy, y^2 - x^2)(x^2 + y^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_a^b f(u, v)dudv$$

25.تطبيق نموذجي

لنقترح D الحيز المحصور الآتي :

$$D = \{(x, y) \in R^2 : a \le xy \le b, x \ge 0, y \ge 0, y - x \ge 0, y^2 - x^2 \le 1\}$$

التبديل هو:

$$u = xy, v = y^2 - x^2$$

$$dudv = \begin{vmatrix} y & -2x \\ 2y & +2y \end{vmatrix} dxdy, \quad a \le u \le b, 0 \le v \le 1, \quad dudv = 2(x^2 + y^2)dxdy$$

قانون الاحداثيات الكيفية هوما يلي:

$$\iint_D f\left(xy, y^2-x^2\right)\left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_a^b f(u,v)dudv$$

التكامل الثنائي :

$$\iint_D \left(y^2-x^2\right)^{xy}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

على D الحيز المحصور. ذو المعادلة الكارتزيه

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 : a\le xy\le b, x\ge 0, y\ge 0, y-x\ge 0, y^2-x^2\le 1\right\}$$

باستخدام الدستور أعلاه فان :

$$\iint_D \left(y^2-x^2\right)^{xy}\left(x^2+y^2\right)dxdy = = \frac{1}{2}\int_0^1\int_a^b v^u dudv = \frac{1}{2}\int_a^b\left(\int_0^1 v^u dv\right)du = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{a+1}$$

الفصـــــل الثـــالــث: التكامـلات الثلاثيــة نظريات و نماذج وحلول

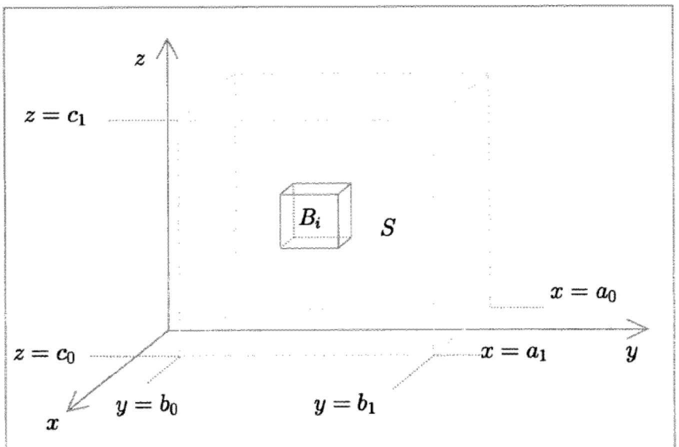
ليكن Σ الجسم من R^3 و $f\langle x,y,z\rangle$ الدالة معرفة ومستمرة على Σ سنعرف التكامل الثلاثي للدالة f على Σ.

1.3. تعريف التكامل الثلاثي على متوازي السطوح

تعريف التكامل الثلاثي يوازي تعريف التكامل الثنائي، فإذا Σ اعتبرنا متوازي السطوح المحدد بالمستويات الستة

$$c_0\le z\le c_1 \quad , \quad b_0\le y\le b_1 \quad , \quad a_0\le x\le a_1$$

الشكل(1)



شكل 1

وإذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ معرفة في المنطقة المغلقة S، فإنه بصورة مشابهة للتكامل الثنائي تقسم المنطقة المجسمة S إلى متوازيات السطوح بمستويات موازية للمستويات الإحداثية(x,y,z). وإذا كانت $B_1, B_2, \dots, B_n$ تمثل متوازيات السطوح في S، وإذا رمزنا لحجم متوازي السطوح B_i بـ $V(B_i)$ وباختيار النقطة $P_i(x_i, y_i, z_i)$ في أي مكان من B_i، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, V(B_i) \qquad (22)$$

يكون قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\iiint_{\Sigma} f(x,y,z)\, dv = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z)\, dzdydx$$

في حالة المنطقة لمتوازي السطوح $D = [\,a_0 \quad a_1] \times [b_0 \quad b_1] \times [c_0 \quad c_1]$ منطقة التكامل فان دستور **ريمان** يصبح من الشكل :

$$\int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z)\, dzdydx =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)(c_1 - c_0)}{n^3} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a_0 + \frac{a_1 - a_0}{n} i, b_0 + \frac{b_1 - b_0}{n} j, c_0 + \frac{c_1 - c_0}{n} k\right)$$

في حالة المنطقة $D = [0 \quad 1]^3$ مربع منطقة التكامل فان

$$\iiint_{[0 \quad 1]^3} f(x,y,z) dzdydx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)$$

على سبيل المثال

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{i+j+k}{n}} = \iiint_{[0 \quad 1]^3} e^{x+y+z} dzdydx$$

أي أن :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{i+j+k}{n}} = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy \int_0^1 e^z dz = (e-1)^3$$

مثال 15 . أحسب التكامل الثلاثي $\iiint_A f(x,y,z) dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لما :

$$f(x,y,z) = x + 3yz, \qquad A = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le 3\}$$

الاجابه . من الواضح أن متوازي السطوح من السهل حساب التكامل عليه فالمتغيرات مستقلة وكل منها يمسح مجال محدد ومنه

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \int_1^{3}\int_1^{2}\int_0^{1}(x+3yz)dxdydz = \int_1^{3}\int_1^{2}\int_0^{1} xdxdydz + 3\int_1^{3}\int_1^{2}\int_0^{1} yzdxdydz$$

$$\int_0^1 xdx\int_1^2 dy\int_1^3 dz + 3\int_1^{3} zdz\int_1^2 ydy\int_0^1 dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 [y]_1^2 [z]_1^3 + 3\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 [x]_0^1 = 19$$

مثال 16: أوجد قيمة التكامل :

$$\iiint_S ye^{xy}\, dxdydz$$

حيث أن S المكعب المحدد بالمستويات التالية:

$$z = 0 \text{ و } z = -2\,, y = 2\,, y = 0\,, x = 3\,, x = 1$$

الحل:

$$\iiint_S ye^{xy}\, dV = \int_0^2\int_1^3\int_{-2}^0 ye^{xy}\, dz\, dx\, dy$$

$$= 2\int_0^2\int_1^3 ye^{xy}\, dx\, dy$$

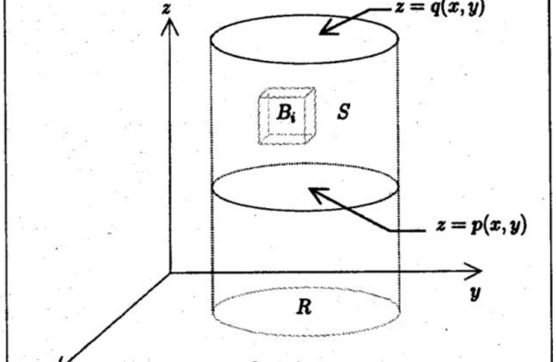
$$= \int_0^2 (e^{3y} - e^{y})\, dy$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^6 - 2e^2$$

إذا كانت المنطقة S محددة كما يلي:

$$p(x,y) \le z \le q(x,y)\ \ ,\ \ b_0 \le y \le b_1\ \ ,\ \ a_0 \le x \le a$$

كما هو موضح في الشكل(2).



شكل 2

نظرية 7

نفرض أن المنطقة S معرفة بالمنحنيات التالية:

$$r_1(x,y) \le z \le r_2(x,y) \quad , \quad p(x) \le y \le q(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

حيث أن الدوال r_1, r_2, q, p تكون متصلة.

وإذا كانت الدالة f متصلة في المنطقة S، فإن:

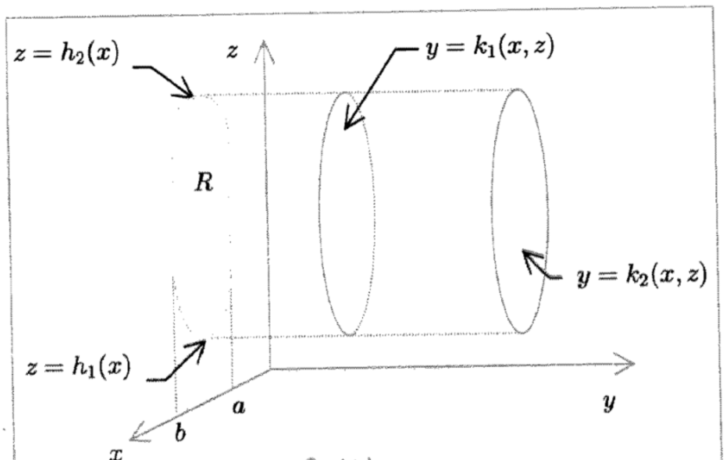
$$\iiint_S f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y,z)\, dzdydx$$

2.3 تغيير ترتيب التكامل الثلاثي

رأينا أهمية ترتيب التكامل الثنائي، حين يتعذر في بعض المسائل إجراء عملية التكامل، كذلك الحال في التكامل الثلاثي يكون للترتيب أهمية كبيرة. فإذا كانت المنطقة S كما يلي:

$$S = \{(x,y,z): a \le x \le b, h_1(x) \le z \le h_2(x), k_1(x,z) \le y \le k_2(x,z)\}$$

أنظر الشكل(3)



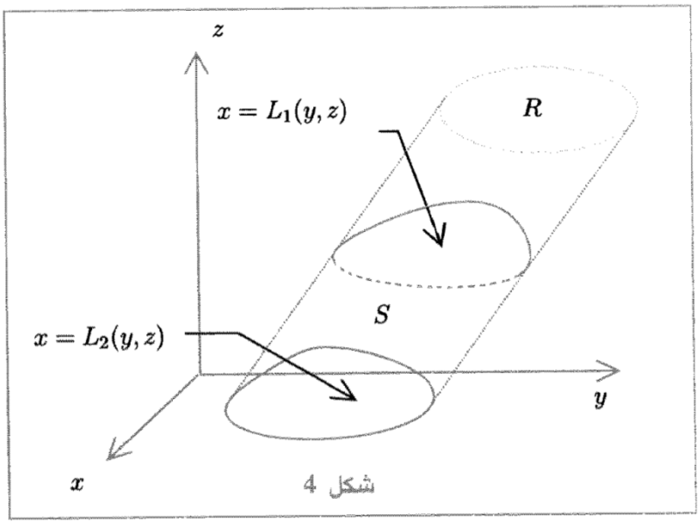
شكل 3

فإن تكامل الدالة على المنطقة S يمكن كتابته كما يأتي:

$$\iiint_S f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z)\, dyxdz\, dx$$

بطريقة مخالفه كما في الشكل 4 ، إذا كانت المنطقة S على الصورة التالية:

$$S = \{(x,y,z): c_1 \le z \le c_2, r_1(z) \le z \le r_2(z), L_1(y,z) \le x \le L_2(y,z)\}$$



شكل 4

فإن التكامل الثلاثي للدالة f يكتب كما يأتي:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \int_{c_1}^{c_2} \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} \int_{L_1(y,z)}^{L_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

ملاحظة10 يمكن حساب التكامل المعمم $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ ببساطه أكثر كلما ذهبنا بعيدا في التكامل المضاعف لنضرب مثالا حيا

$$\iiint_{\mathbb{R}_+^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^3$$

من جهة ثانيه باستخدام احداثيات الكرويه والتحويل كم يلي : تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$K_n = \{(x,y,z), x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le n^2\}$$

$x = \rho \sin \emptyset \cos \theta$ و $y = \rho \sin \emptyset \sin \theta$ $, z = \rho \cos \emptyset$

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2$$

حيث أن:

$$\rho \ge 0 \ , \ 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le \theta \le\le \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_{K_n} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^n \rho^2 e^{-\rho^2} \sin \emptyset d\rho d\theta d\emptyset \longrightarrow \frac{\pi}{4} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\iiint_{K_n} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz = \frac{\pi}{4} (-cos\emptyset)_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-ne^{-n^2+} \int_0^n e^{-\rho^2} d\rho\right) \longrightarrow \frac{\pi}{4} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

لما $n \longrightarrow \infty$. وحيث أن

$$\iiint\limits_{K_n} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz \longrightarrow \iiint\limits_{\mathbb{R}_+^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$$

لما $n \longrightarrow \infty$.

ومنه

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^3 = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-x^2}dx \Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ومنه نستنتج ان

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

نحتاج الى تعريفي الكتلة والحجم.

1)الكتلة: $(Mass)$ بالوحدة يساوي

إذا كانت الدالة $\rho(x,y,z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم، فإن:

$$M(S) = \iiint\limits_S \rho(x,y,z)\, dV$$

2)الحجم: $(Volume)$ بالوحدة مكعبه يساوي

إذا كانت $f(x,y,z) = 1$، فإن:

$$V(S) = \iiint\limits_S dV$$

مثال 17 أوجد قيمة التكامل $I = \iiint_S (x^2 - y^2)\, dv$

حيث أن S المجسم بين السطحين $z = -y^2$ و $z = x^2$ لكل $(x,y) \in R$ و R وفي المستوي xy حيث أن $0 \le x \le 1$ و $y = x$ و $y = 0$.

الحل: كما هو موضح في الشكل(5) يمكن كتابة حدود التكامل كما يأتي:

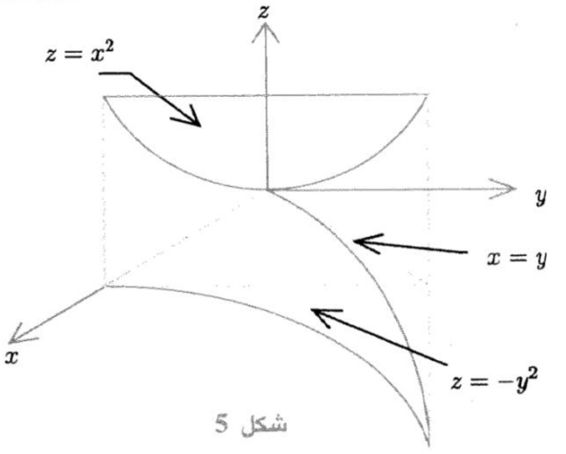
$$I = \int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x^2 - y^2)\, dz\, dy\, dx$$

ولإيجاد قيمة التكامل الثلاثي نعتبر أولا المتغيرين y وx ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z أي أن:

$$I = \int_0^1 \int_0^x (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

والخطوة الثانية نكامل بالنسبة للمتغير y ونعتبر x ثابتا:

$$I = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{5}x^5\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2\right) dx = \frac{4}{30}x^6\Big|_0^1 = \frac{2}{15}$$



شكل 5

مثال 18 أوجد حجم الكرة :

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

الحل: نستخدم النظريات السابقه لنرسم حدود التكامل كما يلي :

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$$

فحجم الكرة يساوي

$$V(S) = \iiint_S dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2},} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2})}^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$$

يمكن حساب الحجم بطريقه اسهل وهي

$$V(S) = 2\int \int_{x^2+y^2=1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, \mathrm{dydx}$$

نستخدم الاحداثيات الفطبيه :

$$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta, dxdy = \rho d\rho d\theta, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$V(S) = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta = -\frac{4\pi}{3}\left[(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi}{3}\,u^3$$

مثال 19

أوجد حجم المجسم المحدد بالأسطوانة $y = x^2$ والمستويين $z = 0\,, y + z = 4$

الحل: لتحديد حدود التكامل، نرسم مسقط المجسم في المستويxy، واضح أن المستوي $y + z = 4$ فوق المستوي $z = 0$ (المستويxy)

ولذلك

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(4y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(8 - 4\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2}x^4\right)dx$$

$$= 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10} = 17.067$$

3.3. تغيير المتغير في حساب التكامل الثلاثي الحالة العامة

نفرض أن G المنطقة و في الفضاء$(\mathrm{x}\,,\mathrm{y}, z)$ F يمكن التفكير فيها كالدالة التالية :

$$F(G(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w)$$

معرفة على المنطقة G في الفضاء$u\ v\ w$ حولت احاديا الى المنطقة في الفضاء $x\ y\ z$ لمعادلات قابلة للتفاضل عل الصورة التالية:

$$x = g(u,v,w),\qquad y = h(u,v,w),\qquad z = k(u,v,w)$$

اي دالة معرفة على في الفضاء$u\ v\ w$ اذا كانت مشتقات الدوال $g, h\,, k$من الرتبة الاولى متصلة فإن التكامل الدالة $f(x,y,z)$ على Ω يعرف كما يلي

$$\iiint_{\Omega} f(x,y\,,z)dx\,dy\,dz = \iiint_{G} H(u,v\,,w)|\,J(u,v\,,w)|du\,dv\,dw$$

حيث أن : $J(u,v\,,w)$ يعرف كما يلي:

$$J(u,v\,,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

في الحقيقه يحسب التكامل الثلاثي بطرق أخرى ومن بينها نظرية تبديل المتغير ومن أشهر التبديلات هي الاحداثيات الأسطوانيه و الأحداثيات الكرويه و الأحداثيات الالبسويديه. الإحداثيات الأسطوانية والكروية تعتبر حالات خاصة من طريقة تغيير المتغيرات في التكامل الثلاثي أو تحويل المناطق في ثلاثة أبعاد .

تطبيق نموذجي

نعتبر المنطقةٍ :

$$G = \{(x,y,z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$$

لنحسب التكامل :

$$I(a,b,c,d) = \iiint_{G} \mathrm{x}^{a} y^{b} z^{c} (1-x-y-z)^{d} dxdydz$$

التحويل المناسب هو :

$$\mathrm{w} = \mathrm{xyz} \text{ و } \mathrm{uv} = \mathrm{y} + \mathrm{z} \text{ و } u = x+y+z$$

التحويل يحول المنطقه G الى المنطقه :

$$H = \{(u,v,w)/0 \leq u \leq 1{,}0 \leq v \leq 1{,}0 \leq w \leq 1\}$$

وحيث أن :

$$\mathrm{x} = \mathrm{u}(1-v) \text{ و } \mathrm{y} = \mathrm{uv}(1-w) \text{ و } z = uvw$$

حيث أن : $J(u,v\,,w)$ يعرف كما يلي:

$$J(u,v\,,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=u^2v\begin{vmatrix}1-v & -1 & 0\\ v(1-w) & 1-w & -1\\ vw & w & 1\end{vmatrix}=u^2v$$

ومنه :

$$I(a,b,c,d)=\iiint_H \mathrm{u}^a(1-v)^a u^b v^b(1-w)^b u^c v^c w^c(1-u)^d u^2 v du dv dw$$

وبالتالي :

$$I(a,b,c,d)=\int_0^1 \mathrm{u}^{a+b+c+2}(1-u)^d\,du\int_0^1 v^{b+c+1}\,(1-v)^a dv\int_0^1 w^c(1-w)^b dw$$

وحيث أن :

$$B(p,q)=\int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1}ds=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ومنه :

$$I(a,b,c,d)=\frac{\Gamma(a+b+c+3)\Gamma(b+c+2)\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(d+1)}{\Gamma(a+b+c+d+4)\Gamma(a+b+c+3)\Gamma(b+c+2)}$$

يذكر ان :

$$\Gamma(p+1)=p!$$

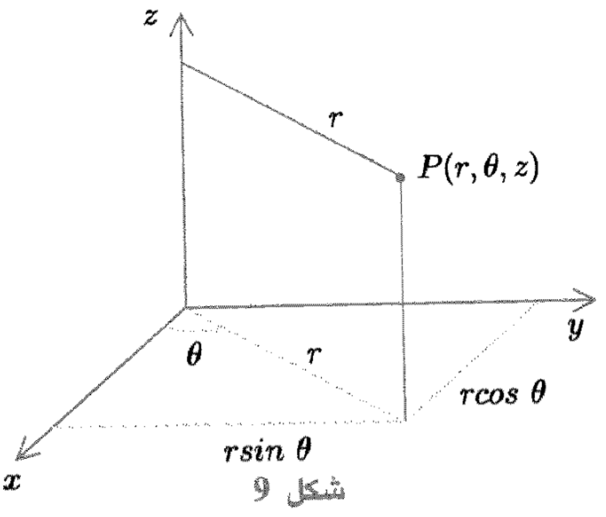
وهذا لما p عدد صحيح موجب.

4.3 الإحداثيات الأسطوانية والتكامل الثلاثي

كثير من المسائل في ثلاثة أبعاد يمكن التعامل معها باستخدام الإحداثيات الأسطوانية وسنناقش الآن نظام الإحداثيات الأسطوانية.

الإحداثيات الأسطوانية

في هذا النظام النقطة P تحدد بالإحداثيات القطبية (r,θ) في المستوى xy والمسافة الأفقية الإتجاهية z من المستوى xy انظر الشكل المرفق .



شكل 9
الإحداثيات الأسطوانية

حيث أن $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r \geq 0$ لكل نقطة ليست على محور z لها تمثيل وحيد أو مفرد (r,θ,z).

العلاقة بين الإحداثيات الأسطوانية والمستطيلة:

تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta\ y = r\sin\theta\ \ , z = z$$

وموقع الزاوية θ يحدد من إشارتي x و y

والتكامل الثلاثي يمكن التعامل معه بسهولة باستخدام الإحداثيات الأسطوانية وخاصة عندما يظهر التعبير (x^2+y^2) في الدالة المكاملة أو حدود التكامل والمنطقة R يمكن التعبير عنها بسهولة باستخدام الإحداثيات القطبية.

والنظرية 7 في الفصل الثاني البند الرابع يمكن تعميمها إلى التكامل الثلاثي بحيث أن الجاكوبي :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

والعلاقة التي تربط بين التكامل الثلاثي بالإحداثيات المستطيلة (x,y,z) والإحداثيات الأسطوانية تكتب على الصورة التالية:

$$\iiint_{Sxyz} f(x,yz)\,dV = \iiint_{Sr\theta z} f(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dr\,d\theta\,dz$$

مثال 20 أوجد التكامل :

$$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dV$$

حيث أن المجسم S المحدد من أعلى بالمستوي $y+z=4$، ومن أسفل بالمستوي xy ومن الجوانب بالأسطوانة $x^2+y^2=16$

الحل: لاحظ أن المنطقة R في المستوي xy عبارة عن دائرة نصف قطرها 4 أي أن : $r-4$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ ولذلك

$$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{4-r\sin\theta} (r)\,(r\, dz\, dr\, d\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2[z]_0^{4-r\sin\theta}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2(4-r\sin\theta)dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\sin\theta\right)\Big|_0^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{256}{3} - 64\sin\theta\right) d\theta = \left(\frac{256}{3}\theta + 64\cos\theta\right)_0^{2\pi} = \frac{512}{3}\pi = 536.165$$

مثال 21 أوجد التكامل الثلاثي :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{(x^2+y^2)^2}^{1} x^2\, dz\, dy\, dx$$

الحل: حدود التكامل في التكامل الأول والثاني من اليسار تبين بأن المنطقة R في المستوي xy هي دائرة نصف قطرها 1 أي $r=1$ ولذلك

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{(x^2+y^2)^2}^{1} x^2\, dz\, dy\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^4}^1 r^3\cos^2\theta\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\cos^2\theta)z|_{r^4}^1\, dr\, d\theta$$

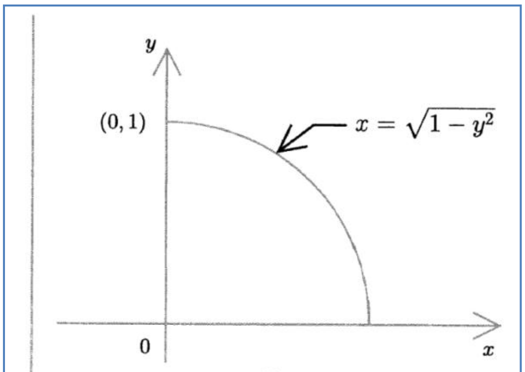
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,(1-r^4)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta - \frac{1}{8}r^8\cos^2\theta\right) d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} (\cos 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{16}(2\pi) = \frac{\pi}{8}$$

مثال 22 أوجد $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\, dz\, dx\, dy$

الحل: المنطقة R في المستوي xy عبارة عن ربع دائرة كما هو موضح بالشكل (10).



شكل 10

ولذلك:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\, dz\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, z\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\pi}{2}(4-r^2)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 - \frac{1}{8}r^4\right)\Big|_0^1 d\theta = \frac{7}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{7\pi}{16}$$

مثال 23 . *أحسب التكامل الثلاثي* $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ *نفرض أن* f *دالة مستمرة وهذا لما :*

$$f(x,y,z) = 1 + y^2 + x^2,\ \ A = \{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 2\}$$

الحل: الإحداثيات الأسطوانية: تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية: $x = r\cos\theta\ y = r\sin\theta\ \ , z = z$

بحيث

$$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta, z = z,$$

$$dxdydz = \rho d\rho d\theta, 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 1$$

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 (1+r^2)\, r\, dz\, dr\, d\theta = \pi(1+r^2)2_0^1 = 4\pi$$

حجم الأسطوانة :

$$A = \{(x,y,z): x^2 + y^2 - z^2 \le 0, a \le z \le b\}$$

تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta\ y = r\sin\theta\ \ , z = z$$

حجم الأسطوانة يحسب كما يلي :

حيث أن $0 \le r \le z$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ لكل نقطة ليست على محور z لها تمثيل وحيد أو مفرد (r,θ,z).

$$V=\iiint\limits_{A} dxdydz=\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^z rdrd\theta dz=\pi\int_a^b (r^2)_0^z\,dz=\pi\frac{b^3-a^3}{3}$$

وحده مكعبه.

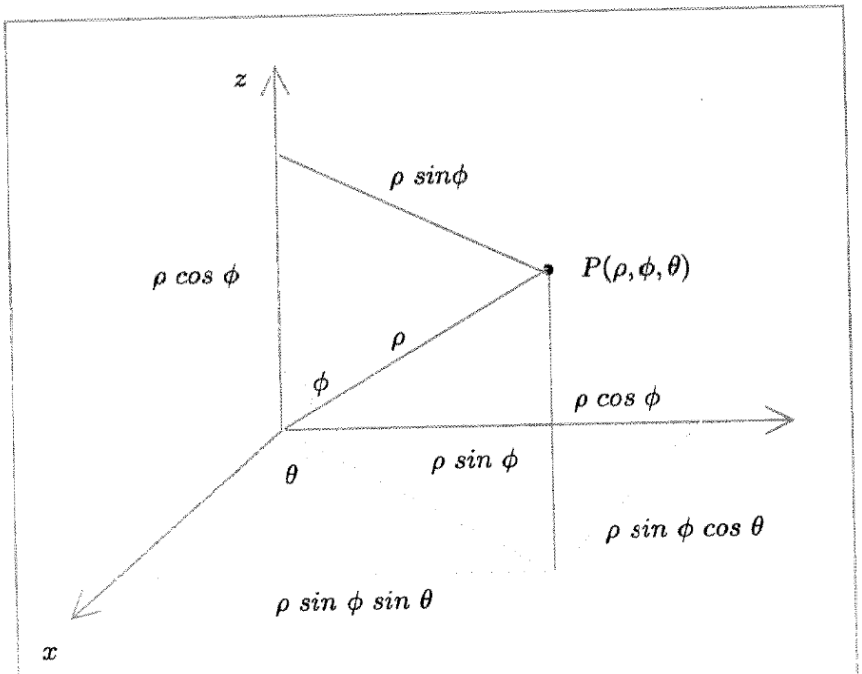
5.3 الإحداثيات الكروية والتكامل الثلاثي

الإحداثيات الكروية للنقطة $P(\rho,\emptyset,\theta)$ كما هو في الشكل المرفق تشتمل على ما يأتي:

1–المسافة من نقطة الأصل يرمز لها بالرمز ρ.

2– الزاوية $\emptyset$ بين ρ ومحور z.

3– الإحداثيات القطبية للزاوية θ في المستوي xy



شكل 11

الإحداثيات الكروية

حيث أن: $\rho\geq 0\ ,\ 0\leq\emptyset\leq\pi\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$

وبصورة مماثلة للإحداثيات الأسطوانية كل نقطة لا تقع على محور z وحيدة.

العلاقة بين الإحداثيات الكروية والمستطيلة

تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$x=\rho\sin\emptyset\cos\theta \quad \text{و} \qquad z=\rho\cos\emptyset\ ,\ \ y=\rho\sin\emptyset\sin\theta$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2\ ,$$

$$\text{و}\quad \cos\emptyset = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\rho}\ ,\qquad z=\rho\cos\emptyset \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{x}{y}$$

وبصورة مماثلة للإحداثيات الأسطوانية نجد أن:

$$\iiint\limits_{S_{xyz}} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{S_{\rho\emptyset\theta}} f(\rho\sin\emptyset\cos\theta\,,\rho\sin\theta\sin\theta\,,\rho\cos\emptyset)\,|J\,|d\rho\,d\emptyset\,d\theta$$

حيث أن

$$J = \left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\emptyset,\theta)}\right\| = \rho^2\sin\emptyset$$

أي أن :

$$dxdydz = \rho^2\sin\emptyset d\rho d\phi d\theta$$

بالتالي :

$$\iiint\limits_{S_{xyz}} f(x,y,z)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} f(\rho\sin\emptyset\cos\theta\,,\rho\sin\theta\sin\theta\,,\rho\cos\emptyset)\rho^2\sin\emptyset\ \ d\rho\,d\emptyset\,d\theta$$

مثال 24 أوجد $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2\sin\emptyset\,d\rho\,d\emptyset\,d\theta$

الحل:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1} \rho^2\sin\emptyset\,d\rho\,d\emptyset\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\emptyset\,d\emptyset\,d\theta = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

مثال 25 أوجد قيمة التكامل $\iiint_S\ x^2\,dxdydz$

حيث أن S المجسم بين الكرتين : $x^2+y^2+z^2=4$ و $x^2+y^2+z^2=9$.

الحل: باستخدام نص قانون الاحداثيات الكرويه

$$\iiint\limits_{S} x^2\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^{3}\rho^2\sin^2\emptyset\cos^2\theta\,(\rho^2\sin\emptyset)\,dP\,d\emptyset\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{5}\rho^5\right)\Big|_2^3\sin^3\emptyset\cos^2\theta\,d\emptyset\,d\theta$$

$$= \frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\int_0^{\pi}\sin^2\emptyset\,d\cos\emptyset\right)\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}(1-\cos^2\emptyset)\,d\cos\emptyset\right)\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\left(\cos\emptyset-\frac{1}{3}\cos^3\emptyset\right)\Big|_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{844}{15}\int_0^{2\pi}\cos^2 d\theta$$

$$= \frac{844}{30}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{-\pi} = \frac{844}{30}(2\pi) = \frac{844}{15}\pi$$

مثال 26 أوجد الحجم الذي يقع فوق المخروط $z^2 = x^2 + y^2$ وداخل الكرة : $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$

الحل: معادلة المخروط بالإحداثيات الكروية هي:

$$\rho^2 \cos^2 \emptyset = \rho^2 \sin^2 \emptyset \Longrightarrow \emptyset = \frac{\pi}{4}$$

ومعادلة الكرة بالإحداثيات الكروية هي:

$$\rho^2 = 2a\rho \cos \emptyset \Longrightarrow \rho = 2a \cos \emptyset$$

وهكذا فإن:

$$V(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2a\cos\emptyset} \rho^2 \sin \emptyset \; d\rho \, d\emptyset \, d\theta = \frac{8a^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \emptyset \sin \emptyset \, d\emptyset \, d\theta$$

$$= -\frac{8a^3}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \emptyset \, d \cos \emptyset \right) d\theta = -\frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 \emptyset |_0^{\frac{\pi}{4}} \right) d\theta = -\frac{2a^3}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left(\frac{6a^3}{12}\right)(2\pi) = \pi a^3 \quad , u^3$$

مثال 27 أوجد التكامل الثلاثي :

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx$$

الحل : لاحظ أن المجسم يقع بين المخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ والكرة $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ والمنطقة R في المستوي xy، هي عبارة عن دائرة $x^2 + y^2 = 4$ وباستخدام الإحداثيات الكروية نجد أن: معادلة المخروط:

$$\rho \cos \emptyset = \rho \sin \emptyset \Longrightarrow \emptyset = \frac{\pi}{4}$$

ومعادلة الكرة:

$$\rho^2 = 8 \Longrightarrow \rho = 2\sqrt{2}$$

وبما أن المنطقة R في المستوي xy وهي عبارة عن دائرة فإن $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

ولذلك

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\left(\rho^{2\sin\emptyset}\right)d\rho\, d\emptyset\, d\theta=\frac{1}{5}\left(2\sqrt{2}\right)^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\emptyset\, d\emptyset\, d\theta=\frac{1}{5}\left(2\sqrt{2}\right)^5\int_0^{2\pi}(-\cos\emptyset)|_0^{\frac{\pi}{4}}\, d\theta$$

$$=\frac{1}{5}\left(2\sqrt{5}\right)^5\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{32}{5}(4)\left(\sqrt{2}-1\right)(2\pi)=\frac{256\pi}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

مثال 28 أوجد قيمة التكامل الثلاثي :

$$\iiint\limits_{S} z\, dv$$

حيث أن S جزء من الكرة $x^2+y^2+z^2\le a^2$ الذي يقع في الثمن الأول

الحـل:

$$\iiint\limits_{S} z\, dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\rho\cos\emptyset\,\rho^2\sin\emptyset\, d\rho\, d\emptyset\, d\theta=-\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\emptyset\, d\cos\emptyset\;\; d\theta$$

$$=-\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\emptyset|_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\; d\theta=\frac{\pi a^4}{16}$$

مثال 29 المنطقة الواقعة تحت الكرة $x^2+y^2+z^2=z$ وفوق المخروط $z^2=x^2+y^2$.

يمكن كتابة معادلة الكرة على الصورة التالية:

$$\rho=\cos\emptyset \qquad \text{أو} \qquad \rho^2=\rho\cos\emptyset$$

وبما أن : $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\emptyset\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\emptyset\sin^2\theta=\rho\sin^2\emptyset$

فإن معادلة المخروط تكتب على الصورة التالية:

$$\rho^2\cos^2\emptyset=\rho^2\sin^2\emptyset$$

أو

$$\cos^2\emptyset=\sin^2\emptyset$$

وبما أن $\pi \ge \emptyset \ge 0$ إذن $\emptyset=\frac{\pi}{4}$. كذلك $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$ إذن:

$$k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\varphi}(\rho\sin\varphi\cos\theta)\rho^2\sin\varphi\;\; d\rho\; d\varphi\; d\theta=-\frac{k}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi\sin\varphi\;\; d\varphi\; d\theta$$

$$= -\frac{k}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\varphi\, d\ \cos\varphi\ \ d\theta = -\frac{k}{24}\int_0^{2\pi}\left(\cos^6\varphi|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)d\theta = -\frac{k}{24}\left(\frac{1}{8}-1\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left(-\frac{k}{24}\right) - \left(-\frac{7}{8}\right)(2\pi) = \frac{7\pi k}{96}$$

6.3. الإحداثيات الالبسويديه والتكامل الثلاثي

لنقترح D أليبسويـد. ذو المعادلة الكارتزيه

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \le 0\right\}$$

التبديل هو:

$$x = au \sin v \cos w,\ y = bu \sin v \sin w,\ z = cu \cos v$$

$$dxdy = abcu^2 \sin v du dv dw$$

$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi, 0 \le w \le 2\pi$$

بين أولا أن قانون الاحداثيات الألبسويدية. هوما يلي:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(au \sin v \cos w, bu \sin v \sin w, cu \cos v)abcu^2 \sin v du dv dw$$

مثال 30 اوجد حجم المجسم الناقص **الالبسويدي**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$$

الطريقة الاولى : التبديل هو:

$$x = au \sin v \cos w,\ y = bu \sin v \sin w,\ z = cu \cos v$$

$$dxdydz = abcu^2 \sin v du dv dw$$

$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi, 0 \le w \le 2\pi$$

حجم هذا الالبسويد :

$$\iiint_D\ dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} abcu^2 \sin v du dv dw = 2\pi abc\left(\frac{1}{3}\right)(-\cos v)_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi abc$$

وحدة مكعبه.

الطريقة الثانيه :

نستخدم التحويل:

$$z = cw \text{ و } y = bv \text{ و} x = au$$

معادلة المجسم الناقص في الفضاء x y z تكةن كرة في الفضاء u v w اي أن:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

حجم هذه الكرة يكون $\pi\frac{4}{3}$ ومن العلاقة (2) نجد أن:

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

وبم أن محدد جاكوبي مقدار ثابت اذن حجم المجسم الناقص يكون:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi \text{ a b c}$$

وحدة مكعبه .

مثال 31 أوجد

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{\frac{y}{2}+1} (\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3})\, dx\, dy\, dz$$

مستخدما التحويل:

$$w = \frac{z}{3}, \quad v = \frac{y}{2}, \qquad u = (2x-y)/2$$

الحل: واضح ان $z = 3w\ ,\ y = 2v\ ,\ x = u + v\ :$

المنطقة G في الفضاء $u\ v\ w$ تحدد من معادلات حدود المنطقة Ω في الفضاء $x\ y\ z$ كما يلي:

$$x = \frac{y}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$x = \left(\frac{y}{2}\right) + 1 \Rightarrow u = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$y = 4 \Rightarrow v = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow w = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow w = 1$$

ويمكن ايجد محدد جاكوبي من العلاقة(2)

$$J(u, v, w) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

والان يمكن تطبيق لعلاقة (1):

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{\left(\frac{y}{1}\right)+1} \frac{(2x-y}{2} + \frac{z}{3})\, dx\, dy\ \ dz \ \ = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)|J|\, dw\, dv\ \ du$$

$$= 6\int_0^1 \int_0^2 uw + \frac{1}{2}w^2)|_0^1\ dv\ \ du \ \ = 6\int_0^1 \int_0^2 (u + \frac{1}{2})\ dv\ \ du \ \ = 12\int_0^1 (u + \frac{1}{2})\ \ \ du$$

$$= 12(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u|_0^1 \ \ = 12(1) = 12$$

مثال 32 اذا كانت Ωمنطقة في الفضاء $x\ y\ z$ معرفة بالمتباينات التالية:

$$1 \le x \le 2, \qquad 0 \le xy \le 2, \qquad 0 \le z \le 1$$

فأوجد

$$\iiint_{\Omega} f(x^2y + 3xyz)dx\, dy\, dz$$

الحـل : بعد فحص الدالة المكاملة وحدود المنطقة Ω في الفضاء $x\ y\ z$ يفضل استخدام التحويل التالي:

$$w = 3z\ , \qquad v = xy, \quad u = z$$

$$z = \frac{1}{3}w\ , \qquad y = \frac{v}{u}, \quad x = u$$

حدود المنطقة في الفضاء$u\ v\ w$ تحدد التباينات حدود المنطقة Ω في الفضاء x y z

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le u \le 2$$

$$0 \le xy \le 2 \Rightarrow 1 \le v \le 2$$

$$0 \le z \le 1 \Rightarrow 0 \le w \le 3$$

وبتطبيق العلاقة(2) نجد أ.ن:

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحدد نحصل على:

$$J = \frac{1}{3u}$$

الان يمكن تطبيق العلاقة السابقة :

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{\left(\frac{y}{1}\right)+1} \frac{(2x - y}{2} + \frac{z}{3})\, dx\, dy\ \ dz \ \ = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (uv + vw) \left(\frac{1}{3u}\right) dw\, dv\ \ du$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \int_0^2 (uw + \frac{1}{2}\frac{vw^2}{u})|_0^3\ dv\ \ du \ \ = \frac{1}{3} \int_1^2 \int_0^2 (3v + \frac{9v}{2u})\ dv\ \ du$$

$$= \int_1^2 (\tfrac{1}{2} v^2 + \tfrac{3}{4}\ \ \tfrac{v^2}{u})|_0^3\, dy = \int_1^2 (2 + \tfrac{3}{u})\, du = 2u + 3Lnu|_0^3 = 2 + 3ln2$$

7.3.مفاهيم فيزيائية في حساب التكاملات الثلاثيه

1)**الكتلة:** $(Mass)$: إذا كانت الدالة $\rho(x, y, z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم، فإن:

$$M(S) = \iiint_S \rho(x, y, z)\, dV$$

وحده.

2)**الحجم:** $(Volume)$: إذا كانت $f(x, y, z) = 1$، فإن:

$$V(S) = \iiint_S dV$$

وحده مكعبه .

3)**عزم المجسم** : S بالنسبة للمستويات yz, xz, xy يعرف كما يلي:

$$M_{xy} = \iiint_S\ \ z\, \rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_S\ \ y\, \rho(x, y, z)\, dV \qquad ,$$

$$M_{yz} = \iiint_S x\, \rho(x, y, z)\, dV$$

حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

4)**مركز الكتلة** : مركز الكتله هو النقطة (x, y, z)

حيث أن:

$$x = \frac{M_{yz}}{M}\ , \qquad y = \frac{M_{xz}}{M}\ , \qquad z = \frac{M_{xy}}{M}$$

5)**عزم القصور الذاتي :** بالنسبة للمحاور z, y, x

$$\mathrm{I}_y = \iiint\limits_{S} (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z) dV$$

$$\mathrm{I}_x = \iiint\limits_{S} (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z) dV\ ,$$

$$\mathrm{I}_z = \iiint\limits_{S} (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z) dV$$

حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

مثال 33 أوجد الحجم الواقع بين السطحين $z = 8 - x^2 - y^2\ ,\ z = x^2 + 3y^2$

الحل: السطحان يتقاطعان عند الأسطوانة التي قاعدتها قطع ناقص في المستوي xy

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

أو

$$x^2 + 2y^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4 - 2y^2}$$

وعندما $x = 0$ فإن : $y = \pm\sqrt{2}$.ولذلك

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dx\, dy$$

وبإجراء عملية التكامل بالنسبة للمتغير x(y ثابت) يمكن أن نبين أن:

$$V = \frac{8}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy$$

وباستخدام التعويض $y = \sqrt{2}\sin\theta$، وهذا يتضمن $dy = \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$، نجد أن:

$$V=\frac{64\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)^2\,d\theta$$

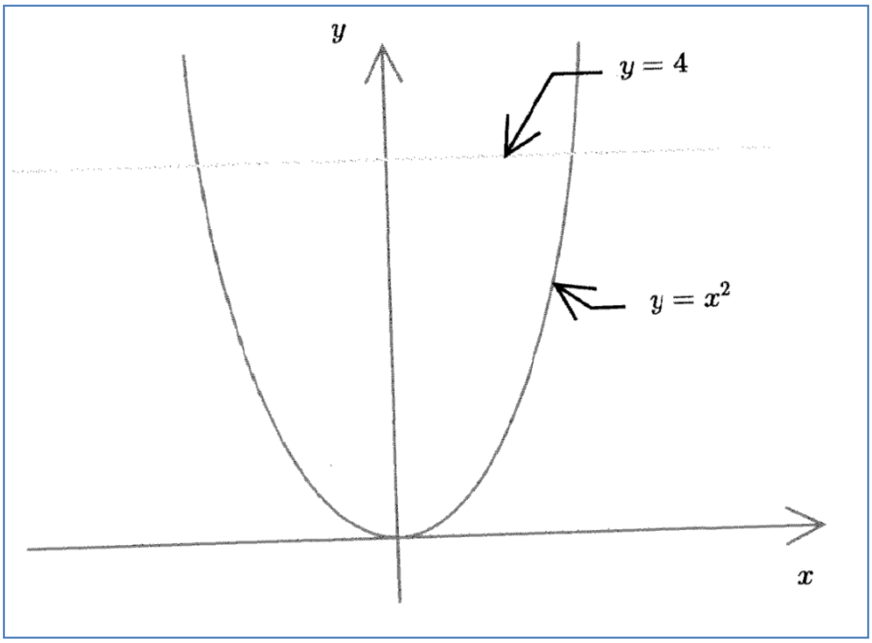
ويمكن كتابة التكامل الأخير على الصورة التالية:

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}(\cos 4\theta+1)\right)d\theta$$

وبعد إجراء التكامل نجد أن:

$$V=\frac{16\sqrt{2}}{3}.\frac{3}{2}\pi=8\sqrt{2}\pi=35.54306351$$

وحده مكعبه .



مثال 34 أوجد حجم المجسم المحدد بالأسطوانة $y=x^2$ والمستويين $z=0\,, y+z=4$

الحل: لتحديد حدود التكامل، نرسم مسقط المجسم في المستويxy، انظر الشكل المرفق اعلاه .

واضح أن المستوي : $y+z=4$ فوق المستوي $z=0$ (المستويxy)

ولذلك

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y^2}dz\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{4} dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 4\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2}x^4\right) dx$$

$$= 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\Big|_{-2}^{2} = 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10} = 17.067$$

وحده مكعبه .

مثال 35 إذا كانت المنطقة Ω معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 , x^2 \leq y \leq x , x - y \leq z \leq x + y\}$$

فأوجد ما يأتي:

أ) حجم المنطقة Ω

ب) $\iiint_\Omega 2x^3y^2z\, dV$

ج) الكتلة الكلية

إذا كانت الكثافة :

$$\rho(x, y, z) = x + 2y + 4z$$

الحل:

أ) يمكن إيجاد الحجم V كما يلي:

$$V = \iiint_\Omega dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{2} \int_{x-y}^{x+y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y\, dy\, dx = \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

وحده مكعبه .

ب)

$$\iiint_\Omega 2x^3y^2\mathrm{z}\, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} 2x^3y^2\, z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^3y^2\, [(x+y)^2 - (x-y)^2] dy\, dx$$

من جهة أخرى

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^3y^2\, [(2x)(2y)] dy\, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 4x^4y^3\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x^4 y^4 |_{x^2}^{x}\, dx \;\; = \int_0^1 x^4[x^4 - x^8]\, dx \;\; = \int_0^1 (x^8 - x^{12})\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{13}x^{13}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{13} = \frac{4}{117}$$

ج) الكتلة الكلية يمكن إيجادها كما يلي:

$$M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} (x + 2y + 4z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} [(x+y)(2y) + (4xy)]\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} [10xy + 4y^2] dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[5xy^2 + \frac{4}{3}x^3\right]\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left[\left(5x^3 + \frac{4}{3}x^3\right) - \left(5x^5 + \frac{4}{3}x^6\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{19}{3}x^3 - 5x^5 - \frac{4}{3}x^6\right) dx = \left(\frac{19}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^6 - \frac{4}{21}x^7\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{19}{12} - \frac{5}{6} - \frac{4}{21} = \frac{133 - 70 - 16}{84} = \frac{47}{84} = 0.5595$$

وحده.

8.3.حوصلة شامله لدساتير حساب التكاملات الثنائية و الثلاثيه للحفظ والمراجعة

1.إذا كانت المنطقة $f(x,y)$ معرفة ومستمرة على المربع :

$$D = \{\langle x,y\rangle / a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

في حالة المنطقة $D = [a \quad b] \times [c \quad d]$ مستطيل منطقة التكامل فان

$$\iint_D f(x,y) dx dy \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i, c + \frac{d-c}{n} j\right)$$

إذا كانت المنطقة $f(x,y)$ معرفة ومستمرة على المربع :

$$D = \{\langle x,y\rangle / 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

فان :

$$Lim_{n\to\infty} \prod_{\mu=1}^{n} \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{n^2} f\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\nu}{n}\right)\right] = \exp\left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy\right)$$

2.نفرض أن المنطقة D محدودة بالمنحنيات $y = \varphi_1(x)$، $y = \varphi_2(x)$، $x = a$ و $x = b$ حيث: $a <$ و φ_1،φ_2 $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ ، مستمرتان على المجال $[a,b]$.نسمي المنطقة D مثل ما سبق بالمنطقة المنتظمة في اتجاه المحور (oy).

عندئذ :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dxdy} = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

3. إذا كانت المنطقة المغلقة D منتظمة في اتجاه المحور (ox) ومحدودة بالمنحنيات ذات المعادلات:

$x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$ علما أن $c < d$ و $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.عندئذ

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

4. نظرية المتوسط

.نفرض أن المنطقة D محدودة بالمنحنيات $y = \varphi_1(x)$، $y = \varphi_2(x)$، $x = a$ و $x = b$ حيث: $a <$ و φ_1،φ_2 $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ ، مستمرتان على المجال $[a,b]$.إن (التكامل الثنائي) للدالة المستمرة f على المنطقة D ذات مساحة S يساوي حاصل ضرب المساحة S في قيمة الدالة في نقطة ما P من المنطقة D أي:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = f(P).S$$

5. إذا كانت المنطقة D مستطيل $D = \{(x,y) \in IR^2 \ / \ a \le x \le b, c \le y \le d\}$، إذا أمكن كتابة $f(x,y)$ على الشكل

$$f(x,y) = \varphi(x).\psi(y)$$

فإن:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_Q \varphi(x).\psi(y)\,dxdy = \left(\int_a^b \varphi(x)dx \right).\left(\int_c^d \psi(y)dy \right)$$

6. الانتقال من إحداثيات معطاة إلى إحداثيات أخرى كيفية

نفرض أن في المستوي (oxy) لدينا المنطقة المغلقة D المحدودة بالمنحنى L ونفرض أن الإحداثيين y, x دالتان لمتغيرين جديدين u و v:

$$x = \varphi(u,v) \qquad , \quad y = \psi(u,v)$$

علما بأن الدالتين φ, ψ ، مستمرتان ولهما مشتقات مستمرة في منطقة ما D' صورة المنطقة D في المستوي (ouv).

المحدد اليعقوبية يأخذ بقيمته المطلقة ونكتب الرمز كما يلي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|$$

عندئذ

$$\iint_D f(x,y)\,dx = \iint_{D'} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right| dudv$$

7. الانتقال من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات التآلفية.

لتكن D المنطقة المشكلة كمتوازي أضلاع . التبديل التآلفي هو :

$$x = au + bv + c$$

و

$$y = a'u + b'v + c$$

بحيث

$$\Delta = \{(u,v) \in R^2 : (x,y) \in D\}$$

عادة مستطيل أو مربع.

فان :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = |ab' - a'b| \iint_\Delta f(au + bv + c, a'u + b'v + v)dudv$$

8. الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية.

لتكن D المنطقة الدائرية :

$$D = \left\{(x,y) : \alpha^2 \le x^2 + y^2 \le \beta^2, \theta_1 \le arctg\left(\frac{y}{x}\right) \le \theta_2\right\}$$

نضع :

$$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta$$

وبالتالي تتحول المنطقة D الدائرية إلى منطقة مستطيله جديدة D'.

$$D' = \{(\rho,\theta) : \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$$

و

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \rho$$

وبالتالي:

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho d\rho\, d\theta$$

10. الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية.

وبالتالي:

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\varphi_{1(\theta)}}^{\varphi_{2(\theta)}} f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho d\rho \right) d\theta$$

11..مساحة القرص الذي نصف قطره r.

$$D = \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$S(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \rho d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r} \rho d\rho = \pi r^2$$

وحده مربعه.

12.دستور قرين على القرص المملوء الأول

القرص الذي نصف قطره r.$D = \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

هذا الدستور أي دستور قرين 29 يفيد في حساب تكامل ثناءي على القرص المملوء بتحويله الى تكامل منحنياتي على الدائرة حافة القرص .

13. القرص الذي نصف قطره r. $D = \{(x,y): 0 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C = \{(x,y): x^2 + y^2 = r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy$$

14 .دستور قرين على القرص المملوء الثاني

القرص الذي نصف قطره r. $D = \{(x,y): 0 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C = \{(x,y): x^2 + y^2 = r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx - \frac{\partial q}{\partial x}dy\right) = = -\iint_D p(x,y)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}\right) dxdy$$

من الواضح :

$$\oint_C p(x,y)\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx - \frac{\partial q}{\partial x}dy\right) = \oint_C \left(p(x,y)\frac{\partial q}{\partial y}dx - p(x,y)\frac{\partial q}{\partial x}dy\right)$$

ثم نطبق دستور قرين الأول.

$$\frac{\partial q}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial q}{\partial x}\right) - \frac{\partial q}{\partial y}\left(p(x,y)\frac{\partial q}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}$$

15. القرص الذي نصف قطره r. $D = \{(x,y): 0 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$ الذي حافته الدائرة : $C = \{(x,y): x^2 + y^2 = r^2\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x = r cos\theta, y = r sin\theta$$

$$dx = -r sin\theta d\theta, dy = r cos\theta d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

بتطبيق دستور قرين

$$\oint_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$$

فان

$$\iint_D (4x^3 - 2xy)\, dxdy = \oint_C xy^2 dx + x^4 dy = -r^4 \int_0^{2\pi} cos\theta sin^3 \theta d\theta + r^5 \int_0^{2\pi} cos^5\theta d\theta$$

ثم نكمل حساب التكامل.

16. الانتقال من الاحداثيات الديكارتيه الى الاحداثيات الألبسويدية.

لنقترح D أليبسويـد.ذو المعادلة الكارتزيه

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\right\}$$

التبديل هو :

$$x = au\cos v, y = bu\sin v$$

$$dxdy = abududv$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$$

قانون الاحداثيات الألبسويدية. هوما يلي:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(au\cos v, bu\sin v) abududv$$

الانتقال من الإحداثيات القطبيه الى الألبسويدية

لنقترح D أليبسويـد ذو المعادلة الديكارتيه :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\right\}$$

التبديل هو:

$$x = au, y = bv$$

$$dxdy = abdudv$$

و

$$u^2 + v^2 = 1$$

قانون الاحداثيات **الألبسويدية القطبيه**. هوما يلي:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = ab \iint_{u^2+v^2 1} f(au, bv)dudv$$

17. الانتقال من الاحداثيات الديكارتيه الى احداثيات كيفيه

لنقترح D الحيز المحصور الآتي :

$$D = \{(x, y) \in R^2 : a \le xy \le b, x \ge 0, y \ge 0, y - x \ge 0, y^2 - x^2 \le 1\}$$

التبديل هو:

$$u = xy, v = y^2 - x^2$$

$$dudv = \begin{vmatrix} y & -2x \\ 2y & 2y \end{vmatrix} dxdy$$

$$a \le u \le b, 0 \le v \le 1$$

$$dudv = 2(x^2 + y^2)dxdy$$

قانون الاحداثيات الكيفيه هوما يلي:

$$\iint_D f(xy, y^2 - x^2)(x^2 + y^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_a^b f(u, v)dudv$$

18. التكامل الثنائي:

$$\iint_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy == \frac{1}{2}\int_0^1\int_a^b v^u dudv = \frac{1}{2}\int_a^b\left(\int_0^1 v^u dv\right)du = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{du}{1+u} = 1/2 \ln\frac{b+1}{a+1}$$

19. مساحة منطقة مستوية

إذا كانت المنطقة D منتظمة، محصورة بين بياني الدالتين Φ_1 و Φ_2 بحيث $a \le x \le b$ فإنه يمكن التعبير عن هذه المساحة كما يلي:

$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} dy \right) dx$$

وبإجراء التكامل مابين قوسين نحصل على:

$$S = \int_a^b [\Phi_2(x) - \Phi_1(x)]\, dx$$

وحده مربعه.

20. الحجم

لتكن $f(x,y) \longmapsto (x,y)$ دالة موجبة في المنطقة D، في المستوي oxy إذا أردنا حساب حجم V لجسم محدود بالسطح $z = f(x,y)$ والمستوي $z = 0$، والسطح الأسطواني الذي يكون دليله حدود المنطقة D ومولداته موازية للمحور (oz)، فيكون مساويا للتكامل الثنائي للدالة f في المنطقة D أي:

$$V = \iint_D f(x,y)\, dxdy$$

وحده مكعبه.

21. مساحة السطح

لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ الشكل أسفله ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $z = f(x,y)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة.

ومنه **مساحة السطح:**

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

وحده مربعه. حيث D هو إسقاط السطح $z = f(x,y)$ على المستوي (oxy).

22. مساحة السطح σ للكرة التي معادلتها

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

في هذه الحالة:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sigma = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho}} \rho d\rho \right) d\theta = 2R \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}\right]_0^R d\theta = 2R \int_0^{2\pi} R d\theta = 4\pi R^2$$

وحده مربعه.

23. عزم العطالة الذاتي لمساحة الشكل المستوي

عزم العطالة الذاتي للشكل المستوي بالنسبة إلى المبدأ هو :

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

عزمي العطالة الذاتي للشكل D بالنسبة إلى المحورين $(oy), (ox)$ على الترتيب حيث:

$$I_{xx} = \iint_D \; y^2\, dxdy$$

و

$$I_{yy} = \iint_D \; x^2\, dxdy$$

24. إحداثيتي مركز ثقل الشكل المستوي D.

$$x_c = \frac{\iint_D \; xdxdy}{\iint_D \; dxdy} \quad , \quad y_c = \frac{\iint_D \; ydxdy}{\iint_D \; dxdy}$$

25. التكامل الثلاثي يوازي تعريف التكامل الثنائي، فإذا Σ اعتبرنا متوازي السطوح المحدد بالمستويات الستة

$$c_0 \le z \le c_1 \;\; , \;\; b_0 \le y \le b_1 \;\; , \;\; a_0 \le x \le a_1$$

يكون التكامل الثلاثي

$$\iiint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, dv = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f(x, y, z)\, dzdydx$$

26. نفرض أن المنطقة S معرفة بالمنحنيات التالية:

$$r_1(x, y) \le z \le r_2(x, y) \;\; , \;\; p(x) \le y \le q(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

حيث أن الدوال r_1, r_2, q, p تكون متصلة.وإذا كانت الدالة f متصلة في المنطقة S، فإن:

$$\iiint\limits_{S} f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx$$

27 . فإذا كانت المنطقة S كما يلي:

$$S = \{(x, y, z): a \le x \le b, h_1(x) \le z \le h_2(x), k_1(x, z) \le y \le k_2(x, z)\}$$

فإن تكامل الدالة على المنطقة S يمكن كتابته كما يأتي:

$$\iiint\limits_{S} f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

28. بطريقة مخالفه كما في الشكل 4 ، إذا كانت المنطقة S على الصورة التالية:

$$S = \{(x, y, z): c_1 \le z \le c_2, r_1(z) \le z \le r_2(z), L_1(y, z) \le x \le L_2(y, z)\}$$

فإن التكامل الثلاثي للدالة f يكتب كما يأتي:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \int_{c_1}^{c_2} \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} \int_{L_1(y,z)}^{L_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

29. الكتلة: $(Mass)$ بالوحدة يساوي

إذا كانت الدالة $\rho(x,y,z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم الجسم S فإن:

$$M(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

الحجم: $(Volume)$ بالوحدة مكعبه يساوي إذا كانت $\rho(x,y,z) = 1$، فإن:

$$V(S) = \iiint_S dxdydz$$

30. الانتقال من الاحداثيات الديكارتيه الى الإحداثيات الأسطوانية

تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta\ y = r\sin\theta\ , z = z$$

حيث أن $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ لكل نقطة ليست على محور z لها تمثيل وحيد أو مفرد (r,θ,z).

$$\iiint_{Sxyz} f(x,yz)\,dV = \iiint_{Sr\theta z} f(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dr\,d\theta\,dz$$

حيث أن الجاكوبي : $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$

حجم الأسطوانة :

$$A = \{(x,y,z): x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, a \leq z \leq b\}$$

تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta\ y = r\sin\theta\ , z = z$$

حجم الأسطوانة يحسب كما يلي :

حيث أن $0 \leq r \leq z$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ لكل نقطة ليست على محور z لها تمثيل وحيد أو مفرد (r,θ,z).

$$V = \iiint_A dxdydz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^z rdrd\theta dz = \pi \int_a^b (r^2)_0^z\,dz = \pi\frac{b^3 - a^3}{3}$$

وحده مكعبه.

31.الانتقال من الاحداثيات الديكارتيه الى الإحداثيات الكروية

العلاقة بين الإحداثيات الكروية والمستطيلة

تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$x = \rho \sin \emptyset \cos \theta \quad \text{و} \quad y = \rho \sin \emptyset \sin \theta \ , \ \ y = \rho \sin \emptyset \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

حيث أن:

$$S_{\rho\emptyset\theta} = \{0 \le \rho \le \mathrm{r} \ , \ \ 0 \le \emptyset \le \pi \ , \ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

وبصورة مماثلة للإحداثيات الأسطوانية كل نقطة لا تقع على محور z وحيدة.

حيث أن الجاكوبي

$$J = \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \emptyset, \theta)} \right\| = \rho^2 \sin \emptyset$$

أي أن :

$$dxdydz = \rho^2 \sin \emptyset d\rho d\phi d\theta$$

و

$$\iiint\limits_{S_{xyz}} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{S_{\rho\emptyset\theta}} f(\rho \sin \emptyset \cos \theta \, , \rho \sin \theta \sin \theta \, , \rho \cos \emptyset)\ |J|\ d\rho\ d\emptyset\ d\theta$$

أي أن :

$$\iiint\limits_{S_{xyz}} f(x, y, z)\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} f(\rho \sin \emptyset \cos \theta \, , \rho \sin \theta \sin \theta \, , \rho \cos \emptyset) \rho^2 \sin \emptyset \ \ d\rho\ d\emptyset\ d\theta$$

32. تغيير المتغيرات في التكامل الثلاثي أو تحويل المناطق في ثلاثة أبعاد .

الطريقة مشابهة لطريقة تغيير المتغيرات في التكامل الثنائي كما سيتضح فيما بعد .

نفرض أن G المنطقة و في الفضاء(x, y, z) F يمكن التفكير فيها كالدالة التالية :

$$F(G(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)$$

معرفة على المنطقة G في الفضاء $u\ v\ w$ حولت احاديا الى المنطقة في الفضاء $x\ y\ z$ لمعادلات قابلة للتفاضل عل الصورة التالية:

$$x = g(u, v, w), \qquad y = h(u, v, w), \qquad z = k(u, v, w)$$

اي دالة معرفة على في الفضاء$u\ v\ w$ اذا كانت مشتقات الدوال $g, h\ , k$من الرتبة الاولى متصلة فإن التكامل الدالة $f(x, y, z)$ على Ω يعرف كما يلي

$$\iiint_\Omega f(x, y\ , z) dx\ dy\ dz = \iiint_\Omega dV$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y\ , z) dx\ dy\ dz = \iiint_{G} H(u, v\ , w)|J| du\ dv\ dw$$

حيث أن : $J(u, v\ , w)$يعرف كما يلي:

$$J(u, v\ , w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

33. الانتقال من الاحداثيات الديكارتيه إ الى الاحداثيات الألبسويدية.

لنقترح D أليبسويـد.ذو المعادلة الكارتزيه

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \le 0 \right\}$$

التبديل هو:

$$x = au \sin v \cos w, \ y = bu \sin v \sin w, \ z = cu \cos v$$

$$dxdydz = abcu^2 \sin v du dv dw$$

$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi, 0 \le w \le 2\pi$$

قانون الاحداثيات الألبسويدية. هوما يلي:

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 f(au \sin v \cos w, bu \sin v \sin w, cu \cos v) abcu^2 \sin v du dv dw$$

34 حجم المجسم الناقص الالبسويدي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

التبديل هو:

$$x = au \sin v \cos w, \ y = bu \sin v \sin w, \ z = cu \cos v$$

$$dxdy = abcu^2 \sin v du dv dw$$

$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi, 0 \le w \le 2\pi$$

حجم هذا الالبسويد :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(au\sin v\cos w, bu\sin v\sin w, cu\cos v)abcu^2 \sin v du dv dw$$

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} abcu^2 \sin v du dv dw = 2\pi abc\left(\frac{1}{3}\right)(-\cos v)_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi abc$$

وحدة مكعبه.

35. مركز الكتلة

S بالنسبة للمستويات yz, xz, xy حيث أن $\rho(x,y,z)$ تمثل كثافة المجسم S. M مركز الكتله هو النقطة (x,y,z) حيث أن:

$$x = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad y = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad z = \frac{M_{xy}}{M}$$

تعرف كما يلي:

$$M_{xy} = \iiint_S z\, \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

$$M_{xz} = \iiint_S y\, \rho(x,y,z)\, dxdydz \quad ,$$

$$M_{yz} = \iiint_S x\, \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

36.عزم القصور الذاتي : بالنسبة للمحاور z, y, x

$$\mathrm{I}_y = \iiint_S (x^2+z^2)\, \rho(x,y,z) dxdydz$$

$$\mathrm{I}_x = \iiint_S (y^2+z^2)\, \rho(x,y,z) dxdydz$$

$$\mathrm{I}_z = \iiint_S (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z) dxdydz$$

حيث أن$\rho(x,y,z)$ تمثل كثافة المجسم S.

37.العزم المركزي :

$$I_o = \iiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)dxdydz$$

مثلا لما $\rho(x,y,z)=1$ تمثل كثافة المجسم S فان العزم المركزي للمجسم S يعطى كما يلي :

$$I_o = \iiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$

38. مركز الكتلة

لما $\rho(x,y,z)=1$ فان **مركز الكتلة** S بالنسبة للمستويات yz,xz,xy. M الكتله و النقطة (x,y,z) حيث أن:

$$x=\frac{M_{yz}}{M}\,,\qquad y=\frac{M_{xz}}{M}\,,\qquad z=\frac{M_{xy}}{M}$$

تعرف كما يلي:

$$M_{xy}=\iiint\limits_S z\ dxdydz$$

$$M_{xz}=\iiint_S\ y\ dxdydz \quad ,$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_S x\ dxdydz$$

3.9.مساحـات وحجـــــــوم شهيـــرة

1.مساحة المستطيل D مستطيل

$$D=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

المساحة تحسب كما يلي:

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy=\int_c^d\int_a^b dxdy=\int_a^b dx\int_c^d dy=(b-a)(d-c)$$

وحدة قياس مربعه.

2. مساحة المربع C

$$C=\{(x,y): a\le x\le b, a\le y\le b\}$$

المساحة تحسب كما يلي:

$$S(C) = \iint_C dxdy = \int_a^b \int_a^b dxdy = \int_a^b dx \int_a^b dy = (b-a)^2$$

وحدة قياس مربعه.

3.مساحة متوازي الأضلاع لتكن D المنطقة المشكلة كمتوازي أضلاع:

$$|x-y| \le c$$

و

$$|x+y| \le d$$

المستقيمات متوازيه مثنى مثنى. نقترح التبديل أي التحويل التآلفي :

$$u = y - x$$

$$v = y + x$$

$$dudv = 2dxdy$$

$|v| \le d$ و $|u| \le c$

عادة مستطيل أو مربع.

فان المساحة تحسب كما يلي :

$$S(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c} dudv = \frac{1}{2}\int_{-d}^{d} dv \int_{-c}^{c} du = 2cd$$

وحدة قياس مربعه.

.2 مساحة المثلث القائم :

$$T = \{(0,0),(a,0),(0,b)\}$$

المستقيم: $y = -\frac{b}{a}x + b$ هو أحد أضلاع المثلث القائم. مساحة المثلث تحسب كما يلي :

$$S(T) = \int_0^a \left(\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy \right) dx = \left(-\frac{b}{2a}x^2 + bx \right)_{x=0}^{x=a} = \frac{ab}{2}$$

وحدة قياس مربعه.

3. مساحة المثلث :

$$T = \{(0,1),(0,-1),(1,0)\}$$

المستقيمين:$y = -x + 1$ و $y = x + 1$ هما ضلعين المثلث. مساحة المثلث تحسب كما يلي :

$$S(T) = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} dy \right) dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{2}$$

وحدة قياس مربعه.

6. مساحة القرص المملوء

$$D = \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le a^2\}$$

مساحة القرص المملوء تحسب كما يلي : مساحة القرص المملوء تحسب كما يلي :

$$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta$$

$$dxdy = \rho d\rho d\theta$$

$$D' = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$S(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \rho d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} \rho d\rho = \pi a^2$$

وحدة قياس مربعه.

7. مساحة الحيز الدائري المحصور بين القرصين المملوئين

لتكن D المنطقة الدائرية :

$$D = \left\{(x,y) : \alpha^2 \le x^2 + y^2 \le \beta^2, \theta_1 \le arctg\left(\frac{y}{x}\right) \le \theta_2\right\}$$

نضع :

$$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta$$

وبالتالي تتحول المنطقة D الدائرية إلى منطقة مستطيله جديدة D'.

$$D' = \{(\rho,\theta) : \alpha \le \rho \le \beta, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

مساحة الحيز الدائري المحصور بين القرصين المملوئين تحسب كما يلي :

$$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta$$

$$dxdy = \rho d\rho d\theta$$

$$D' = \{(\rho,\theta) : \alpha \le \rho \le \beta, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

مساحة الحيز الدائري

$$S(D)=\iint_D dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho d\rho\, d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\alpha}^{\beta}\rho d\rho=\frac{(\theta_2-\theta_1)(\beta^2-\alpha^2)}{2}$$

وحدة قياس مربعه.

8. مساحة الحيز D القطبي

لتكن D المنطقة القطبيه :

$$D=\{(r,\theta):0\le r\le\varphi(\theta),\theta_1\le\theta\le\theta_2\}$$

$\varphi(\theta)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.نضع :

$$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$$

مساحة الحيز القطبي :

$$S(D)=\iint_D dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{\varphi(\theta)}\rho d\rho\, d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\rho^2)_0^{\varphi(\theta)}d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varphi^2(\theta)d\theta$$

9. مساحة الاليبسويـــد

لنقترح D أليبسويـــد.ذو المعادلة الديكارتيه

$$D=\left\{(x,y)\in R^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\le 0\right\}$$

التبديل هو:

$$x=au\cos v, y=bu\sin v$$

$$dxdy=abududv$$

$$0\le u\le 1, 0\le v\le 2\pi$$

مساحة الاليبسويـــد تحسب كما يلي : :

$$S(D)=\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 abududv=\pi ab$$

وحدة قياس مربعه.

10. مساحة السطح

لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $z = f(x, y)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة. ومنه **مساحة السطح:**

$$\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

وحده مربعه. حيث D_{xy} هو إسقاط السطح $z = f(x, y)$ على المستوي (oxy).

أيضا لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $y = f(x, z)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة.ومنه **مساحة السطح:**

$$\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$$

وحده مربعه. حيث D_{xz} هو إسقاط السطح $y = f(x, z)$ على المستوي (oxz).

أيضا لنفرض أننا نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى Γ ، حيث السطح معطى بالدالة ذات المعادلة $x = f(y, z)$، وهي مستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة.ومنه **مساحة السطح:**

$$\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz$$

وحده مربعه. حيث D_{yz} هو إسقاط السطح $x = f(y, z)$ على المستوي (oyz).

11. الحجم

لتكن $f(x, y) \longmapsto (x, y)$ دالة موجبة في المنطقة D، في المستوي oxy إذا أردنا حساب حجم V لجسم محدود بالسطح $z = f(x, y)$ والمستوي $z = 0$، والسطح الأسطواني الذي يكون دليله حدود المنطقة D ومولداته موازية للمحور (oz)، فيكون مساويا للتكامل الثنائي للدالة f في المنطقة D أي:

$$V = \iint_{D} f(x, y)\, dxdy$$

وحده مكعبه.

أيضا $f(x, z) \longmapsto (x, z)$ دالة موجبة في المنطقة D، في المستويصoxy إذا أردنا حساب حجم V لجسم محدود بالسطح $y = f(x, z)$ والمستوي $y = 0$، والسطح الأسطواني الذي يكون دليله حدود المنطقة D ومولداته موازية للمحور (oy)، فيكون مساويا للتكامل الثنائي للدالة f في المنطقة D أي:

$$V = \iint_{D} f(x, z)\, dxdz$$

وحده مكعبه.

لتكن $f(y,z) \longmapsto (y,z)$ دالة موجبة في المنطقة D، في المستوي oyz إذا أردنا حساب حجم V لجسم محدود بالسطح $x = f(y,z)$ والمستوي $x = 0$، والسطح الأسطواني الذي يكون دليله حدود المنطقة D ومولداته موازية للمحور (ox)، فيكون مساويا للتكامل الثنائي للدالة f في المنطقة D أي:

$$V = \iint_D f(y,z)\,dydz$$

وحده مكعبه.

12. مساحة السطح σ للكرة التي معادلتها

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ومنه مساحة السطح:

$$\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

وحده مربعه. حيث D_{xy} هو إسقاط السطح $z = f(x,y)$ على المستوي (oxy).

في هذه الحالة:

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sigma = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho}}\rho d\rho\right)d\theta = 2R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}\right]_0^R d\theta = 2R\int_0^{2\pi} Rd\theta = 4\pi R^2$$

وحده مربعه.

13. حجم متوازي السطوح Σ المحدد بالمستويات الستة

$$c_0 \le z \le c_1 \quad , \quad b_0 \le y \le b_1 \quad , \quad a_0 \le x \le a_1$$

يحسب كما يلي :

$$\iiint_\Sigma dxdydz = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} dzdydx = (a_1 - a_{01})(b_1 - b_0)(c_1 - c_0)$$

وحده مكعبه.

14. حجم الكرة S_{xyz} التي معادلتها :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$x = \rho\sin\emptyset\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\emptyset\sin\theta \quad , \quad z = \rho\cos\emptyset$$

أي أن :

$$dxdydz = \rho^2 \sin \emptyset d\rho d\phi d\theta$$

حيث أن:

$$S_{\rho\emptyset\theta} = \{0 \le \rho \le r \ , \ \ 0 \le \emptyset \le \pi \ , \ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

وبصورة مماثلة للإحداثيات الأسطوانية كل نقطة لا تقع على محور z وحيدة. فحجم الكرة يحسب كما يلي :

$$V = \iiint\limits_{S_{xyz}} dxdydz = \iiint\limits_{S_{\rho\emptyset\theta}} \rho^2 \sin \emptyset \ d\rho \ d\emptyset \ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \rho^2 \sin \emptyset \ d\rho \ d\emptyset \ d\theta$$

$$V = 2\pi(-cos\emptyset)_0^{\pi} \left(\frac{\rho^3}{3}\right)_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}$$

وحده مكعبه.

15.حجم الأسطوانة :

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \le 0, a \le z \le b\}$$

تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta \ y = r\sin\theta \ \ ,z = z$$

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

حجم الأسطوانة يحسب كما يلي :

حيث أن $0 \le r \le z$, $0 \le \theta \le 2\pi$ لكل نقطة ليست على محور z لها تمثيل وحيد أو مفرد (r, θ, z).

$$V = \iiint\limits_{A} dxdydz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{z} \ rdrd\theta dz = \pi \int_a^b (r^2)_0^z \, dz = \pi \frac{b^3 - a^3}{3}$$

وحده مكعبه.

16.حجم الأسطوانة الافقيه :

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \rho^2, a \le z \le b\}$$

تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta \ y = r\sin\theta \ \ ,z = z$$

حجم الأسطوانة يحسب كما يلي :

حيث أن $0 \le r \le z$, $0 \le \theta \le 2\pi$ لكل نقطة ليست على محور z لها تمثيل وحيد أو مفرد (r, θ, z).

$$V = \iiint\limits_{A} dxdydz = \int_{a}^{b}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\rho} rdrd\theta dz = \pi(r^2)_0^{\rho}\,(b-a) = (b-a)\pi r^2$$

وحده مكعبه. (حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة x الارتفاع).

17.حجم الالبسويد

لنقترح D أليبسويـد ذو المعادلة الديكارتيه

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \le 0\right\}$$

التبديل هو :

$$x = au\sin v\cos w,\ y = bu\sin v\sin w,\ z = cu\cos v$$

$$dxdydz = abcu^2\sin vdudvdw$$

$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi, 0 \le w \le 2\pi$$

حجم الالبسويد يحسب كما يلي :

$$V = \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} abcu^2\sin vdudvdw = 2\pi abc\left(\frac{1}{3}\right)(-\cos v)_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi abc$$

وحدة مكعبه.

18. حجم المجسم الناقص **الالبسويدي (طريقة ثانيه)**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

نستخدم التحويل:

$$z = cw \text{ و } y = bv \text{ و} x = au$$

معادلة المجسم الناقص في الفضاء x y z تكافؤ كرة في الفضاء u v w اي أن:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

حجم هذه الكرة يكون $\pi\frac{4}{3}$ ومن العلاقة أعلاه نجد أن:

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

بمعنى

$$dxdydz = abcdudvdw$$

وبم أن محدد جاكوبي مقدار ثابت اذن حجم المجسم الناقص يكون:

$$V = \frac{4}{3}\, \pi \mathrm{\,a\,b\,c}$$

وحدة مكعبه .

19. مساحة سطح الالبسويد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

مساحة السطح:

$$\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

وحده مربعه. حيث D_{xy} هو إسقاط السطح $z = f(x, y)$ على المستوي (oxy).

نستخدم التحويل:

$z = cw$ و $y = bv$ و $x = au$

والكر ة D التي معادلتها :

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = c \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c}{a} \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = c \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{c}{b} \frac{\partial w}{\partial v}$$

ومنه مساحة السطح **الالبسويد:**

$$\iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = ab \iint_{u^2+v^1 \le 1} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}\, dudv$$

وحده مربعه.

في هذه الحالة:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-\ v^2}} \quad و \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-\ v^2}}$$

ومنه

$$1+\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = \frac{1+\left(\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right)u^2+\left(\left(\frac{c}{b}\right)^2-1\right)v^2}{1-u^2-\ v^2}$$

وبالتالي :

$$\sigma = \iint\limits_{u^2+v^1\leq 1}\sqrt{\frac{1+\left(\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right)u^2+\left(\left(\frac{c}{b}\right)^2-1\right)v^2}{1-u^2-\ v^2}}\,dudv$$

وحده مربعه.

20. الالبسويد والكرة

C البسويد معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

والكر ة D التي معادلتها :

$$u^2+\ y^2+w^2=1$$

نستخدم التحويل:

$$z=cw \text{ و } y=bv \text{ و} x=au$$

معادلة المجسم الناقص في الفضاء x y z تكافؤ كرة في الفضاء u v w اي أن:

$$u^2+\ y^2+w^2=1$$

$$\iiint\limits_C f(x,y,z)dxdydz = abc\iiint\limits_D f(au,bv,cw)dudvdw$$

مثلا :

$$\iiint\limits_C e^{x+y+z}dxdydz = abc\iiint\limits_D e^{au+bv+cw}dudvdw$$

$$\iiint\limits_C (x+y+z)dxdydz = abc\iiint\limits_D (au+bv+cw)dudvdw$$

$$\iiint_C xyzdxdydz = a^2b^2c^2 \iiint_D uvwdudvdw$$

$$\iiint_C f(x)g(y)h(z)dxdydz = abc \iiint_D f(au)g(bv)h(cw)dudvdw$$

تمارين وتطبيقات عمليه للمراجعة

تمرين 1. أحسب التكامل المضاعف $\iint_A f(x,y)dxdy$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لما (يطلب رسومات توضيحية) :

1- $f(x,y)=x^2y-3y^2,\quad A=\{(x,y):0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$
2- $f(x,y)=2xy+x,\quad A=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$
3- $f(x,y)=x+y\ ,\quad A=\{(x,y):y=x, y=x^3\}$
4- $f(x,y)=2xy-3y^2,\quad A=\{(x,y):0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$
5- $f(x,y)=2xy-y^2,\quad A=\left\{(x,y):1\le x\le 2, \frac{1}{x}\le y\le x^2\right\}$

تمرين.2 . 1.–أحسب باستخدام الإحداثيات القطبية: مساحة جزء من القرص المملوء مع الرسم:

$$D=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$$

ثم أحسب التكاملين :

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-2}dxdy \quad \text{و} \quad \iint_D (x+y)^2 dxdy\ .$$

2.أحسب باستخدام الإحداثيات القطبية : مساحة القرص المملوء $A=\{(x,y):x^2+y^2\le 121\}$.

3.أحسب باستخدام الإحداثيات القطبيـةالتكامل:

$$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$$

بحيث $D=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le 9\}$.

4. نطبق في هذا التمرين نظرية تبديل المتغير.

أولا : التبديل التآلفي هو:

$$x = au + bv + c, y = a'u + b'v + c$$

بحيث $(x, y) \in D$ و $\Delta = \{(u,v) \in R^2 : (x,y) \in D\}$

بين أولا متى تتحقق المساواة :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = |ab' - a'b| \iint_\Delta f(au + bv + c, a'u + b'v + v)dudv$$

تمرين 3 .1.أحسب :

$$\iint_D (x-1)^2 dxdy$$

على الميدان :

$$D = \{(x,y) \in R^2 : |x+y| \le 1, |x-y| \le 2\}$$

4. أحسب مساحة متوازيي الأضلاع : $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| \le 1\}$ و $D_c = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| \le c\}$

5.أحسب مساحة المثلث القائم مع الرسم : $T = \{(0,0),(a,0),(0,b)\}$ و احسب مساحة المثلث

$$T = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

ثم فسر نتيجة مع البرهان وحساب قيمة التكامل :

$$\cdots \int_0^1 (\int_0^{1-x} xy^2 dy)dx = \int_0^1 (\int_0^{1-y} xy^2 dx)dy$$

4. نقترح الآن المثلث $T = \{(0,1),(0,-1),(1,0)\}$ أرسم ثم أحسب :

$$\iint_T (x^2 + y^2)dxdy$$

أحسب ببساطة :

$$\iint_T (x^2 y + y^2 x)dxdy$$

و $\iint_T (1 + yx)dxdy$

بين أن :

$$\int_0^\pi (\int_0^\pi y\cos(xy)dx)dy = \frac{1 - \cos(\pi^2)}{\pi}$$

أحسب التكامل المضاعف:

$$\int_0^{\pi}(\int_0^{\pi}\sin(x+y)dx)dy$$

ثم أحسب التكامل المضاعف:

$$\int_0^{\pi}(\int_0^{\pi}\cos(x+y)dx)dy$$

تمرين 4. أحسب التكامل الثلاثي $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لما (يطلب رسومات) :

1- $f(x,y,z)=x+3yz,\quad A=\{(x,y,z):0\le x\le 1,1\le y\le 2,1\le z\le 3\}$
2- $f(x,y,z)=yz+x^2,\quad A=\{(x,y,z):x+y+2z\le 1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$
3- $f(x,y,z)=1+y^2+x^2,\quad A=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,0\le z\le 2\}.$
4- $f(x,y,z)=z,\qquad A=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le \rho^2,z\ge 0\}$
5- $f(x,y,z)=xyz\,,\qquad A=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le \rho^2\}$
6- $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^3},\qquad A=\{(x,y,z):x^2+y^2-z^2\le 0,0\le z\le 1\}.$

أحسب حجـم الحيز المحصور : $x^2+y^2=4$ و المستويات $y+z=4$ و $z=0$.أحسب حجم نصف الكرة الوحده ...

تمرين 5. أحسب التكامل الثلاثي $\gamma=\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$.(يطلب حساب حجم A في كل حالة).وهـــذا لمـــا:

1- $f(x,y,z)=z^2,\ \ A=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2-a^2\le 0\}.(\gamma=4\pi\dfrac{a^5}{15})$
2- $f(x,y,z)=(1+x^2+y^2)^{-2},\ \ A=\{(x,y,z):x^2+y^2-z^2\le 0,0\le z\le 1\}.(\gamma=\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)).$
3- $f(x,y,z)=xyz\ \ ,A=\{(x,y):x^2+y^2-z^2\le 0,0\le z\le 1\}.$ (coordonnées cylindriques)
4- $f(x,y,z)=1+x^2+y^2+z^2,\ \ A=\{(x,y):x^2+y^2+z^2\le 1\}.$(coordonnées sphériques)

تمرين 6.نطبق في هذا التمرين نظرية تبديل المتغير التي أليبسويـد أي الاحداثيات الألبسويدية. لنقترح D أليبسويـد.

أولا : التبديل هو: $x=au\cos v,y=bu\sin v$ بحيث $(x,y)\in D$ و$\Delta=\{(u,v)\in R_+^*\times]\alpha,\alpha+2\pi[:(x,y)\in D\}$

بين أولا أن قانون الاحداثيات الألبسويدية. هوما يلي:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(au\cos v,bu\sin v)abududv$$

أحسب :

$$\iint_D (x^2-y^2)dxdy=\frac{\pi}{4}ab(a^2-b^2)$$

على الأليبسويـد الآتي:

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leq 0\right\}$$

–أحسب مساحتي الأليبسويـدين :

$$D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leq 0, x\geq 0\right\}. \ D=\left\{(x,y)\in R^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leq 0\right\}$$

تمرين 7.أحسب احداثي مركز الثقل للأجسام الآتية :

$1-D=\{(x,y):1\leq x^2+y^2\leq 4\}. \ D=\{(x,y):1\leq x^2+y^2\leq 4, y\leq x\}. \ D=\{(x,y):0\leq x^2+y^2\leq 4\}.$

$2-D=\{(x,y):1\leq x^2+y^2\leq 4, x\leq y\}. \ D=\{(x,y):0\leq x^2+y^2+z^{2.}\leq 4\}.$

تمرين .8. أحسب احداثي مركز الثقل وعزم العطالة الذاتي للأجسام الآتية :

$1-D=\{(x,y):4\leq x^2+y^2\leq 9\}, D=\{(x,y):1\leq x^2+y^2\leq 4, y\leq x\}, D=\{(x,y):0\leq x^2+y^2\leq 4\}.$

$2-D=\{(x,y):1\leq x^2+y^2\leq 4, x\leq y\}. \ D=\{(x,y,z):0\leq x^2+y^2+z^{2.}\leq 4\}.$

$3-D=\{(x,y)\in R^2 : |x+y|\leq 1, |x-y|\leq 2\}, \ D=\{(x,y)\in R^2 : |x|+|y|\leq 1\}.$

$4-A=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2-a^2\leq 0\}, A=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\leq 0, 0\leq z\leq 1\}.$

تمرين .9..أحسب احداثي مركز الثقل وعزم العطالة الذاتي للمثلث القائم مع الرسم : $T=\{(0,0),(a,0),(0,b)\}$ و احسب احداثيات مركز الثقل للمثلث : $T=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. نقترح المثلث $T=\{(0,1),(0,-1),(1,0)\}$. أحسب احداثي مركز الثقل وعزم عطالته.

تمرين 10.أوجد حجم الجسم المحصور تحت $z=2y+x,$ وفوق المستطيل $R=\{(x,y):1\leq x\leq 2, 3\leq y\leq 5\}$ ثم بين بطريقتين مختلفتين أن الحجم يساوي تسعة عشرة وحدة مكعبة.

أوجد مساحة الجسم المحصور بين $y=x^3$ و المستقيم $y=x$.

أوجد حجم المجسم المحدد بالسطوح $x^2=y+z,$ و $y=0, z=0, x=2$.

تمرين 11..صفيحة معدنية لها شكل المحدد بـ : $4=x, \ y^2=x,$.أوجد مركز الكتلة وعزم الصفيحة بالنسبة للمحور oy .يطلب استخدام الشرط الآتي : الكثافة عند $p(x,y)$ تتناسب طردا مع المسافة من المحور oy الى النقطة p .صفيحة معدنية مستوية لها شكل المثلث المحدد بـ : $y=2-x, \ y=x,$ و محور ox كثافتها تعطى بالمعادلة $p(x,y)=1+2x+y$ أوجد مركز الكتلة وعزم الصفيحة المحوري بالنسبة للمحور oy .أوجد الكتلة الصافية.

تمرين .12 أحسب مساحـــة الحيز المحصور بين المنحنيين البيانيين للدالـــتين $y=\frac{1}{x}$ و $y=x^2$ وهذا لمـــا $1\leq x\leq 2$.يطلب رسومات توضيحية.لنرمز لهذ الحيز بالرمز D .أحسب بالتـــالي :

$$\iint_D (x+y-1)dxdy$$

تمرين.13 نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لما:

$$f(x,y,z)=x+y+z+1 \quad \text{و} \quad A=\{(x,y,z): x^2+(y+1)^2+z^2 \le 25\}$$

.يطلب رسومات توضيحية لـَ A .أي أرسم A . أحسب باستخدام الاحداثيــات الكروية التكامل الثلاثي

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$$

تمرين .14

أرسم ثم أحسب مساحـــة الحيز المحصور بين المنحنيين البيانيين للدالـــتين $y=x^2$ و $y=3x^2$ والمستقيمين $x=0$ و $x=2$.(أرسم الحيــز المشار اليه أعلاه).

لنرمز لهذ الحيز بالرمز D .أحسب بالتــالي :

$$\iint_D x\sin y dydx$$

تمرين.15

ليكن G الجزء من القرص الذي معادلته $\{(x,y): x^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

1.أحسب باستخدام الاحداثيات القطبية مساحة G .(أرسم الحيــز G المشار اليه).أحسب بالتــالي التكامــل :

$$\iint_G (x^2-xy+3y^2)dxdy$$

2. أحسب باستخدام الاحداثيــات الأسطوانية التكامل الثلاثي $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لما:

$$f(x,y,z)=xy+yz+zx \quad \text{و} \quad A=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2 \le 0\}$$

تمرين.16 أرسم ثم أحسب مساحـــة الحيز المحصور بين المنحنيين البيانيين للدالـــتين $y=x^3$ و $y=x^2$ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.(أرسم الحيــز المشار اليه أعلاه). لنرمز لهذ الحيز بالرمز D .أحسب بالتــالي :

$$\iint_D x(1+y+y^2)dydx$$

تمرين.17 ليكن G الجزء من القرص الذي معادلته $\{(x,y): x^2+y^2 \le 4, x \ge 0\}$.

1.أحسب باستخدام الاحداثيات القطبية مساحة G .(أرسم الحيــز G المشار اليه).أحسب بالتــالي التكامــل :

$$\iint_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$$

2. أحسب باستخدام الاحداثيــات الكــروية التكامل الثلاثي $\iiint_S f(x,y,z)dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لما:

$$f(x,y,z)=x^2-y^2-z^2 \quad و \quad S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2-25\leq 0\}$$

5. أحسب حجــم الكــرة S .فالعــزم المركـزي للكرة بالنسبة للمركز .

أحسب مساحـــة الحيز المحصور بين المنحنى البياني للدالـــة $y=2-x^2$ و المستقيم $y=x$. يطلب رسومات توضيحية. لنرمز لهذ الحيز بالرمز D .أحسب بالتـــالي :

$$\iint_D x(y-1)dxdy$$

تمرين. 18 أحسب باستخدام الاحداثيــات الكروية التكامل الثلاثي $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لما: $A=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 8\}$ و $f(x,y,z)=y^2+z^2$

أرسم ثم أحسب مساحـــة الحيز المحصور بين المنحنى البياني للدالـــتين $y=x$ و $y=x^2$ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.(أرسم الحيــز المشار اليه أعلاه).

لنرمز لهذ الحيز بالرمز C .أحسب بالتـــالي :

$$\iint_C (2xy+x)dxdy$$

تمرين.19

1..أرسم الحيز الدائري $D=\{(x,y): 9\leq x^2+y^2\leq 64, x\geq 0, y\leq 0\}$. ثم أحسب مساحـــة D .

أحسب باستخدام الاحداثيات القطبيـة على الحيــز الدائري D التكامــل

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$$

2.أحسب حجم الأسطـوانة : $H=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\leq 0, 0\leq z\leq 2\}$

3. نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لمـا :

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+1$$

أحسب باستخدام الاحداثيــات الأسطـوانيـة التكامل الثلاثي : $\iiint_H f(x,y,z)dxdydz$

تمرين .20

1..أرسم الحيز الدائري $D=\{(x,y):16\le x^2+y^2\le 25, x\le 0, y\le 0\}$. ثم أحسب مساحــة D .

2. أحسب باستخدام الاحداثيات القطبيـة على هذا الحيــز الدائري D التكامــل : $\iint_D (x+y)dxdy$.

تمرين.21

1. أحسب حجم الأسطوانة :

$$H=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\le 0, 0\le z\le 3\}$$

2. أحسب باستخدام الاحداثيــات الأسطـوانيـة التكامل الثلاثي

$$\iiint_H \frac{dxdydz}{x(y^2+z^2)}$$

3.أحسب مساحة السطـح للكرة : $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 9\}$.

4.أحسب مساحـــة الحيز المحصور بين المنحنيين البيانيين للدالــتين $y=1-x^2$ و $y=4x^2-4$.

يطلب رسومات توضيحية. لنرمز لهذ الحيز بالرمز D .

5.أحسب بالتــالي :

$$\iint_D (x+y-1)dxdy$$

تمرين.22

ليكن G الجزء من القرص الذي معادلته $\{(x,y): x^2+y^2\le 1, y\le 0\}$.

1.أحسب باستخدام الاحداثيات القطبية مساحة G .(أرسم الحيــز G المشار اليه).أحسب بالتــالي التكامــل :

$$\iint_G (x^2-xy+3y^2)dxdy$$

2. أحسب باستخدام الاحداثيــات الأسطوانية التكامل الثلاثي $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا

لما:

$$f(x,y,z)=yz+xy+1 \quad \text{و} \quad A=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\le 0, 1\le z\le 2\}$$

3.أحسب مساحة السطـح للكرة : $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 25\}$.

4. أحسب مساحة السطـح للاسطوانه : $S=\{(x,y,z): x^2-y^2+z^2\le 0, 0\le y\le 1\}$.

5..ليكن G الجزء من القرص الذي معادلته $\{(x,y): x^2+y^2\le 4, x\ge 0\wedge y\le 0\}$.

.أرسم الحيـــــز G

.أحسب باستخدام الاحداثيات القطبية مساحة G .

.أحسب بالتـــــالي التكامــــل :

$$\iint_G \left(2x^2+3y^2\right)dxdy$$

6. أرسم الأسطوانة القائمة :

$$A=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\le 0\wedge 2\le z\le 3\}$$

.أحسب باستخدام الاحداثيـــــات الأسطوانية حجم نفس الأسطوانة القائمة

. أحسب التكامل الثلاثي $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ نفرض أن f دالة مستمرة وهذا لمـا:

$A=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\le 0\wedge 2\le z\le 3\}$ و $f(x,y,z)=x+y+z+1$

7.أحسب مساحة السطــح للكرة : $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 144\}$.

8. أحسب مساحة السطــح الأسطوانة القائمة :

$$A=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\le 0\wedge 2\le z\le 3\}$$

9. أحسب مساحة السطــح الأسطوانة القائمة :

$$A=\{(x,y,z): x^2-y^2+z^2\le 0\wedge 1\le y\le 3\}$$

10. أحسب مساحة السطــح الأسطوانة الافقيه :

$$A=\{(x,y,z): x^2+z^2=9\wedge 1\le y\le 3\}$$

11. أحسب مساحة السطــح الأسطوانة:

$$A=\{(x,y,z): x^2+z^2=4\wedge 1\le y\le 3\}$$

12. أحسب مساحة السطــح الأسطوانة القائمة :

$$A=\{(x,y,z): x^2+y^2=1\wedge 2\le z\le 3\}$$

12. أحسب مساحة السطــح الأسطوانة القائمة :

$$A=\{(x,y,z): y^2+z^2=1\wedge 2\le x\le 3\}$$

12. أحسب حجم نفس الأسطوانة .

الخـــاتمــة

التكامل الثنائي يمكّن من تسهيل بعض العمليات الحسابية التي لا يستطيع التكامل المحدود (البسيط) حسابها بشكل يسير.
بالفعل فالتكامل $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ ليس من السهل حسابه ليصبح من السهل حسابه عند التحول الى التكامل الثنائي :

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

من جهة ثانيه باستخدام احداثيات الكرويه والتحويل كم يلي : تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$K_n = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq n^2\}$$

نستخدم الاحداثيات القطبيه بتحويل مساعد:

$$x = \rho\cos\theta \quad \text{و} \quad y = \rho\sin\theta$$

$$\rho^2 = x^2+y^2$$

حيث أن:

$$\rho \leq n\,, \qquad , \quad 0 \leq \theta \leq\leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{K_n} e^{-(x^2+y^2)}d\,\mathrm{xdy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^n \rho e^{-\rho^2}\,d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{4}$$

و

$$\iint_{K_n} e^{-(x^2+y^2)}d\,\mathrm{xdy} \longrightarrow \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2$$

لما $n \longrightarrow \infty$.

ومنه

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

لا نفكر هنا في الانتقال الى الاحداثيات القطبيه لان حيز التكامل ليس دائري على اساس أن التكامل الثنائي على مستطيل فشكل الدالة تحت التكامل توحي باستخدام الاحداثيات القطبيه وهذا ما لم يحدث .
أيضا يمكن حساب التكامل المعمم $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ ببساطه أكثر كلما ذهبنا بعيدا في التكامل المكرر لنضرب مثالا حيا

$$\iiint_{\mathbb{R}_+^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^3$$

من جهة ثانيه باستخدام احداثيات الكرويه والتحويل كم يلي : تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$K_n = \{(x,y,z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\}$$

$x = \rho \sin \emptyset \cos \theta$ و $y = \rho \sin \emptyset \sin \theta$ $, z = \rho \cos \emptyset$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

حيث أن:

$$\rho \geq 0 \ , \ \ 0 \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{2} \ , \ \ 0 \leq \theta \leq\leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint\limits_{K_n} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{n} \rho^2 e^{-\rho^2} \sin \emptyset d\rho d\theta d\emptyset \longrightarrow \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\iiint\limits_{K_n} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz = \frac{\pi}{4} (-cos\emptyset)_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-ne^{-n^2+} \int_0^{n} e^{-\rho^2} d\rho \right) \longrightarrow \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

لما $n \longrightarrow \infty$. وحيث أن

$$\iiint\limits_{K_n} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz \longrightarrow \iiint\limits_{\mathbb{R}_+^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz$$

لما $n \longrightarrow \infty$.

ومنه

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^3 = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

ومنه نستنتج ان

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

حاولنا إعطاء بعض تطبيقات التكامل الثنائي في الفيزياء والكهرباء، و ذكر تطبيقاتها العديدة ليس في الفيزياء فحسب بل في تخصصات أخرى كالكيمياء والإحصاء الوزن واللاوزن...وغيرهما.

العبارة الرياضية $\left(\iint_{D_{xy}} f(x,y)\, dxdy \right)$ تأخذ مدلولها التطبيقي من خلال المعطيات المتوفرة عندما يكون الميدان D_{xy} في مستوي وليكن (oxy) هنا يمكننا استعمال التكامل الثنائي، أما إذا كان الميدان D_{xyz} في الفضاء وليكن $(oxyz)$ فإنه يدخل مفهوم جديد وهو التكامل الثلاثي $\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z) dxdydz$ الذي يشكل التكامل الثنائي قاعدته، حيث حساب التكامل الثلاثي يرجع إلى حساب تكامل بسيط وآخر ثنائي.

الفهرس

المراجـــــــــــــــع

1.Calcul différentiel et intégral , tome 2, N.Piskonov ,Editions Mir,8 ème édition, Moscou.

2. L. Schwartz. Analyse III : Calcul intégral, volume 44. Hermann, 1993.

3.Géométrie différentielle, intégrales multiples, A.Doneddu,Tome 6,Librairie vuibert,1984.

4. http://www.mathematik-online.org

5. Mathematik–Online–Kurs

6. BIBM@TH