FACTS IN COMPLEX ANALYSIS AND COMPEXITY


**Dr. Rehouma Abdelhamid**

**Mathematics Faculty of exact sciences**
**University of Hama Lakhdar of Eloued**
**Algeria**
**e-mail : rehoumaths@gmail.com**

كليــة العلـــــوم التكنولوجية — السنة الثانية ل.م.د رياضيات

الامتحان السداسي في مادة التحليــل العقـــدي. — 25 ماي 2014

Par : Rehouma Abdelhamid

**1.** (7 نقاط ) **.** كيف تحسب $\zeta$

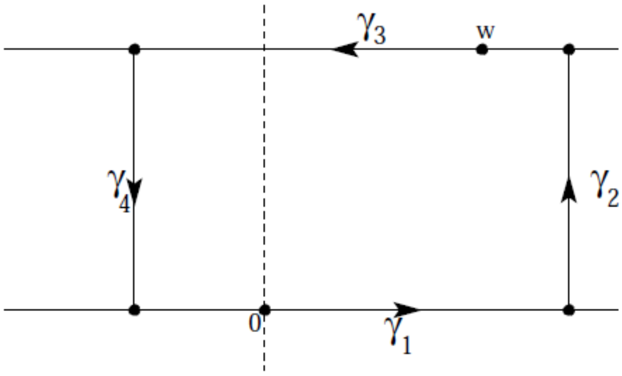
$$\zeta = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^3(\pi - z)^2} \quad -$$

- أثبت أن الراسب عند الصفر هو مجـمـوع سلسلة متقاربة .مـــــاهي .
- أثبت أن كل جذور المعادلـــــــــة ذات المتغير المركب

$$1 + z + z^2 + ... z^{n-1} - nz^n = 0$$

تقع داخل القرص الوحدة أي $D(0,1) = \{z, |z| \le 1\}$ .

**2.**(7 نقاط ) . الكــــــانتور $\Omega$ الذي رؤوســــــــــه $(-a,0)$ و $(a,0)$ و $(a,b)$ و $(-a,b)$ و مساراته الأربعة هي على الترتيب $\gamma_1$ من $(-a,0)$ نحو $(a,0)$ و $\gamma_2$ من $(a,0)$ نحو $(a,b)$ و $\gamma_3$ من $(a,b)$ نحو $(-a,b)$ و $\gamma_4$ من $(-a,b)$ نحو $(-a,0)$ .




- أثبت أن

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\Omega} \exp\left(-z^2\right) dz = 0.$$

- أحسب التكاملات الأربعة

$$\int_{\gamma_4} \exp\left(-z^2\right)dz \text{ و } \int_{\gamma_3} \exp\left(-z^2\right)dz \text{ و } \int_{\gamma_2} \exp\left(-z^2\right)dz \text{ و } \int_{\gamma_1} \exp\left(-z^2\right)dz$$

- استنتج أن

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\gamma_2} \exp\left(-z^2\right)dz = \lim_{a\to\infty} \int_{\gamma_4} \exp\left(-z^2\right)dz = 0.$$

- استنتج حسابا للتكاملات من نوع **Poisson** أو **Fresnel** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\cos(bx)dx \text{ و } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\sin(bx)dx$$

**3.**(6 نقاط ).نعتبــــــــــر $\Omega$ الدائرة التي مركزها المبدأ $0$ و نصف قطرها $r$ بحيث $r > 1$ .

- طبق نظرية الرواسب لحساب $\Xi(z)$ بدلالة $z$ بحيث :

$$\Xi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{t^3 - z^3}{(t-z)(t^3-1)} \exp\left(-\sqrt[3]{t}\right)dt$$

- هل هـــي هولومورفية على $\Omega$ ؟ لمــــــــــاذا ؟

جامعة الوادي كليـــة العلـــــوم التكنولوجية السنة الثانية ل.م.د رياضيات

الامتحان الاستدراكي في مادة التحليــل العقـــــــدي. 27 جوان 2013

**Par : Rehouma.Abdelhamid**

**1** .نعتبــر الدالة $u(x,y)$ المعرفـــة بالعبارة الآتية

$$u(x,y)=\frac{x^2+y^2+1}{(x+1)^2+y^2}$$

- أوجد مجال تعريفها مع الرسم.
- أثيث أنها توافقية ثم أوجد المرافقة التوافقية لهـــــا $v(x,y)$ بحيث $f=u+iv$ هولومورفية .بحيث $f(1)=\frac{1}{2}$ .
- الدوال الهوموغرافية الهولومورفية تتمتع بميزة هامة و التي نريد اثباتها.
- لتكن $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ احدى هذه الدوال أوجد مجال هولومورفيتها.

نسمي المشتقة لـ **شوارز** derivative **Schwarzian** لــ $f$ هي دالة لـ $z$ التالية :

$$L_f(z)=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

- أثيت الآن مــــا يلي: $g(z)$ دالة هولومورفية فان

$$h=f\circ g\Rightarrow L_h(z)=L_g(z)$$

- مـــــــــــا تعليقك.

**2** . هـام جدا الجـــزئين A و B منفصلين..

A.نعتبـــــــــر $\Omega$ الدائرة التي مركزها المبدأ $0$ و نصف قطرها $r$ بحيث $r\succ 0$ .طبق دستور كوشي لحساب $\Xi(z)$ بدلالة $z$ بحيث

$$\Xi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{z^n\exp(tz)}{n!t^n}\frac{dt}{t}$$

- مستنتجــــا المتطابقـــة الهـــــــــامة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(2z\cos\theta)d\theta$$

B.طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب.في حالة $\Gamma=\{z:|z-i|=2\}$.أحسب التكامل المركب

$$\int_{\Gamma}\frac{z^2}{\left(z^3+i\right)^2\left(iz^3-8\right)^3}dz$$

بحيث الجذر التكعيبي يحسب حسب الفرع الذي من أجـــــــله $\sqrt[3]{-1}=-1$ . يطلب التأكد من الانتماء و التكرارية لكل قطب.
كيف تحسب الرواسب الآتـــــــــية

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{8z+i}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{z^2(8z+i)}\right)$$

جامعة الوادي معـــــــــــــــــهد العلـــــوم التكنولوجية السنة الثانية ل.م.د رياضيات

امتحان في التحليـــل المركب. **3 ماي 2012**

Formules de **Cauchy**.Area et holomorphie sur le disque unité.Théorème de résidus .Formule **Green**.

Par **: Rehouma Abdelhamid**

**1**.أثبت الاستلزام المنطقي **من أجل كل عدد مركب** $z$ **يحقق** $|z|<1$

$$|t|=1 \Rightarrow \left|1-\bar{z}t\right| = |z-t|$$

طبق دستور **كوشـــــي Cauchy** لإثبات المتباينة التالية

في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z|<1)$ فانه يوجد $K>0$ يتعلق بـــ $f(.)$ فقط بحيث

$$\left(1-|z|^2\right)|f(z)| \le K$$

و هذا لكل $z$ يحقق $|z|<1$.

استنتج حـــــادا من الأعـــــــــلى للكمية الآتية . ما يسمى ( $f(.)$ Area of).

$$\iint_{|x+iy|<1} |f(x+iy)|^2\, dxdy$$

كمثال تطبيقـــي نموذجي أثبت المتباينة

$$\iint_{|z|<1} \left|\frac{z}{1-z^2}\right| dxdy < 4.$$

**2** .. الجـــزئين أ و ب منفصلين.

**الجزء أ**..نعتبر القطع الناقص $\Omega$ الذي معادلته في المستوي المركب ( أي **المعادلة القطبية**)

$$|z-1|+|z+1| = 6$$

أثبت أن المعادلة التحليلية لـ $\Omega$ من الشكل لما $z=x+iy$ فان

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

أرســــــــم $\Omega$ بعناية واهتمام مع نحديد العناصر المميزة .( أرجو الاعتناء بالرسم هذه المرة وحذار من تصور $\Omega$ أنها دائرة أي قطع ناقص منساوي الساقين.هذا خطأ فادح).

طبق دستور **Green** لحساب التكامل المساحي :

$$\iint_{\Omega}\left(4x^3-3y^2\right)dxdy$$

نعتبر القطع الناقص $\Omega'$ الموسع الذي معادلته في المستوي المركب ( أي **المعادلة القطبية**) $|z-1|+|z+1|=16$

طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب

$$\int_{\Omega'} \frac{z^{66}}{\exp(2iz)-3\exp(iz)+2}\,dz$$

**الجزء ب**..في حالة $\Gamma=\{z:|z-i|=2\}$ .أحسب التكامل المركب :

$$\int_{\Gamma} \frac{z^{66}}{\left(z^2+i\right)^2\left(z^3-1\right)^3}\,dz$$

يجب ضبط الأقطاب الخمســة مع رتبها و انتمائها أولا فالحساب ثانيا.

● المركز الجامعي بالوادي معـــــــــــــــهد العلــــوم التكنولوجية السنة الثانية ل.م.د رياضيات

الامتحان السداسي في التحليــــــــل المركب أ.رحومـة عبد الحميد

15 جوان2011

**I.(6 نقط)…. حساب تكامل لدالة ذات متغير مركب Complex Integral Calculus of one**

**نعتبر الدالة المركبة :** $f(z)=\dfrac{1}{z^4+(1-i)z^3-iz^2}$ , $f:D\to C$

**أوجد النطاق $D$ من $C$ والذي عليه $f$ هولومورفية.**

أحسب

$$\int_C f(z)dz$$

بحيث $C=\{z,|z|=2\}$. أي الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 2 .

**II.(7 نقط) حساب تكامل معمم على كانتور لدالة ذات متغير مركب Improper Complex Integral on Contour**

ليكن الكانتور الذي رؤوسه الأربعة –R , R , R+iM , -R+iM.والتي تؤلف الرباعي المستطيل .بحيث $R$ و $M$ موجبان وكبيران بكفاية.

أرسم الشكل مع تحديد الاتجاه.

أحسب التكامل الذاتي

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\lambda x)}{x^2+\delta^2}dx$$

بحيث $\lambda$ و $\delta$ هما عددان حقيقيان مثبتان.

.يطلب شرح كافي لجميع أدوات حل هذه المسألة.

**III ( 7 نقط)…النشور اللورانية و دستور كوشي Laurent power series and Cauchy formula**

نعتبر الدالة التحليلية $z\to f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ ونرفق بها الدالة التحليلية:

$$z\to F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a_n z^n$$

بحيث $|z|<R$ و $R>0$ .

أثبت من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $\rho$ بحيث $0<\rho<R$ يوجد عدد موجب $A(\rho)$ متعلق بـ $\rho$ بحيث

$$|F(z)|\le A(\rho)\exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right) \qquad \forall z$$

لنفرض الآن أن $z\to F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ مع أن $F$ تحقق فرضا المحدودية الآتية :

$$|F(z)|\le B\exp(k|z|)$$

بحيث $B$ و $k$ ثابتان معلومان.أثبت بالتالي أن

$$|b_n|\le Br^{-n}\exp(kr)$$

بحيث $r$ هو نصف قطر دائرة مركزها0 ما لكوشي.استنتج ما يلي $n=0,1,2\ldots$

$$|b_n|\le Bn^{-n}k^n\exp(n)$$

جامعة الوادي كلـيــة العلــــوم التكنولوجية قسم الرياضيات السنة الثانية ل.م.د

الامتحان الآستدراكي في مادة التحليــل المركب. 21 ماي 2013

Enseignant chargé de cours de module : **Rehouma.Abdelhamid**

1 ... هل أن تطبيق دستور كوشــــي يحقق اثبات المتباينة التالية و المتداولة في الحساب الهولومورفي على القرص الوحدة.

(Univalent functions theory via **Lebedev**'s inequality). في حالة $f$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z| \prec 1)$ و تحقق $\operatorname{Re} f \geq 0$ و $f(0)=1$ .(أي $f(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ بحيث $c_k \in \mathbb{C}, k=1,2....$ ).عندئـــــذ

لكل $z$ بحيث $|z| \prec 1$.

$$\left| f(z) - \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

2 ....في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على نطاق مترابط ببساطة حافته $C$ ( كانتور مغلق ) أثبت دستور كوشــــي أي

$$\int_C f(z)dz = 0$$

الهدف الآن هو حساب التكامل المعمم الآتي

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

كما شرح في الدرس تكرارا ومرارا صمم لغرض ذلك كانتورا مغلقا وليكن $C$ ( طبعا $C$ اتحاد 4 طرق واصلة مختلفة مثنى مثنى ).

بين أولا أن

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

استنتج حـــــسابا مفصلا للتكامل المعمـــم أعلاه.

3.طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب في حالة كانتور مغلق متحرك ( mobile contour) $\Gamma_\varepsilon = \{z : |z-i| = \varepsilon\}$ .

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{(z+1)^3 (z^6+1)^2} dz$$

لحساب الجذر التكعيبي نعتبر الفرع الذي من أجله $\sqrt[3]{-1} = -1$. ماهي قيمة $\varepsilon$ الواجب تحقيقهــــــا.

*(mobile contour with preferable radius and fixed center)*

كيف تضبط حسابا للراسب عند الصفر الآتي

$$\operatorname*{Res}_{z_0=0} \left( \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-i} \right)$$

**السنة الثانية ل.م.د رياضيات** جامعة الوادي معـــــــــــهد العلـــــوم التكنولوجية

جوان 2012 الامتحان الاستدراكي في التحليل العقـــــــدي .

# *Formules de Cauchy. Area et holomorphie sur le disque unité. Théorème de résidus .*

***Par : Rehouma Abdelhamid***

1 . نسمي $\text{Area of } f(.)$ على القرص الوحدة $D(0,1)$ ما يلي

$$D(f) = \iint_{|x+iy|<1} \left| f(x+iy) \right|^2 dxdy$$

كما نسمي تكامل **درخليه** ***Dirichlet*** $\text{Area of } f\left(D(0,1)\right)$ أي

$$D(f') = \iint_{|x+iy|<1} \left| f'(x+iy) \right|^2 dxdy .$$

طبق دستور **كوشـــــي** ***Cauchy*** لإثبات المتباينة التالية

.في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z|<1)$ فانه يوجد $K>0$ يتعلق بـــ $f(.)$ فقط بحيث

$$\left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \le K$$

و هذا لكل $z$ يحقق $|z|<1$.يطلب حسابه.أي يطلب حساب $K$ بدقـــــــــة.

.استنتج حــــادا من الأعـــــــلى لــــــــتكامل **درخليه** ***Dirichlet*** $D(f')$ .

.كمثال تطبيقـــــي نموذجي أوجد المقارنــــــات الممكنة بين الكميات الآتية

$$D(z^m f) \text{ و } D(f) \text{ و } D(f') \text{ و } D(\frac{d}{dz}(z^m f)) .$$

.اعتبـــــر $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$.لتطبيــــــق نـواتج أو ثمار السؤال أعلاه.

**2** .أحسب التكامل في الحالتيـــن $k>0$ و $k<0$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ikx)}{i-x} dx$$

ومن ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي $m$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^m \exp(ikx)}{(i-x)^{m+1}} dx$$

**3** .في حالة $\Gamma = \{z : |z-i| = 1\}$.أحسب التكامل المركب الآتـــــــي :

$$\int_\Gamma \frac{z^3+1}{z(z-1)(z^2+1)^2} dz$$

.استغلالا للوقت اتبـــــع النصيحة الآتية :

.أوجد أولا الثوابت $a,b,c,d,e,f$ بحيث

$$\frac{z^3+1}{z(z-1)(z^2+1)^2} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{cz+d}{z^2+1} + \frac{ez+f}{\left(z^2+1\right)^2}$$

.يجب ضبط الأقطاب الأربعة مع رتبها و انتمائها أولا فالحساب ثانيا.

**فقـــــط للتسليـــــة العلميـــــة الحديثة صيف 2012** ☹ أحسب

$$Lim_{\varepsilon\to 0}\left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^2} \frac{x^3+1}{x(x-1)(x^2+1)^2} dx + \log \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right)$$

بالتوفيق و السداد أستـــاذ المسؤول للمقياس