



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشهيد حمّـة لخضر الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar d'El Oued



Faculté de Technologie

Département de Hydraulique & Génie Civil

كلية التكنولوجيا
قسم الري والهندسة المدنية



Cours de résistance des matériaux 2

Elaboré par:
KAAB Mohamed Zohair

Année universitaire 2020/2021

Avant-propos

La résistance des matériaux (RDM) est l'une des disciplines indispensables de l'ingénieur dans le cheminement de son cours universitaire. Elle est particulière de la mécanique des milieux continus consiste à étudier les effets des forces sur les corps rigides déformables pour différents matériaux, qui permet de calculer la résistance, la rigidité et la stabilité des pièces mécaniques et des ouvrages de génie civil.

Le polycopié est un cours de résistance des matériaux adressé essentiellement aux étudiants de troisième année LMD en génie civil et en travaux publics. Chaque chapitre est suivi d'une série d'exercices qui aideront l'étudiant à assimiler le cours. Ce cours est subdivisé en quatre chapitres:

Le premier chapitre est consacré à l'étude des contraintes normales maximales et minimales et la position de l'axe neutre dans les sections dangereuses des barres et des poutres dans des systèmes soumises à des sollicitations composées.

Le deuxième chapitre présente le calcul des déformations dans des poutres isostatique en flexion. Trois méthodes de calcul sont proposées : théorème de Castigliano, théorème de Mohr et théorème de Verechaguine.

Le troisième chapitre aborde l'étude des poutres hyperstatiques à une seule travée par la méthode des paramètres initiaux, la méthode de la poutre fictive et le théorème de Ménabrea.

Le quatrième chapitre dénote le calcul des poutres hyperstatiques à plusieurs travées. Pour effectuer ce calcul, il existe plusieurs méthodes. On étudie dans ce chapitre deux méthodes : la méthode des équations des trois moments (la méthode de Clapeyron) et la méthode des foyers.

Sommaire

Avant-propos	I
Sommaire	II
Chapitre I : Sollicitations composées	
I-1-Flexion déviée	01
I-1-1-Définition	01
I-1-2- Contraintes normales en flexion simple	01
I-1-3- Remarques	02
I-1-4- Contraintes normales en flexion déviée	03
I-1-5- Equation de la fibre neutre	04
I-1-6- Remarques	04
I-2- Flexion composée	05
I-2-1- Définition	05
I-2-3- Equation de la fibre neutre	05
I-2-4- Remarques	05
I-2-5- Les contraintes normales maximales de la traction ou de la compression	06
I-3- Exercices	08
Chapitre II : Calcul des déformations et méthodes énergétiques	
II-1- Introduction	11
II-2- Hypothèses de calcul des déformations	11
II-3- Méthode énergétique pour le calcul des déformations	12
II-4- Travail mécanique des forces extérieures	12
II-4-1- Remarques	13
II-5-Travail mécanique des forces intérieures	13
II-5-1- Effort longitudinal	13
II-5-2- Moments fléchissants	14
II-5-3- Remarque	15
II-6- Domaine d'application de la théorie de l'énergie	15
II-7-Théorème de Betti	16
II-8-Théorème de Maxwell	16

II-9 -Théorème générale du calcul de déplacement	17
II-10-Théorème de Castigliano	17
II-11- Théorème de Mohr	19
II-12- Méthode de Verechaguine pour résoudre l'intégrale de Mohr	20
II-13- Exercices	23
Chapitre III : Calcul des poutres hyperstatiques à une seule travée	
III-1- Définition	25
III-2- L'ordre d'hyperstaticité	25
III-2-1- Nombre des inconnues	25
III-2-2- Nombre des équations	25
III-3- Méthode de résolution des poutres hyperstatique	27
III-3-1- Méthode des paramètres initiaux	27
III-3-2- Méthode de la poutre fictive	31
III-3-3- Théorème de Ménabrea	33
III-4- Exercices	36
Chapitre IV : Calcul des poutres hyperstatiques à plusieurs travées	
IV-1-Poutres continues	37
IV-2-Méthode des équations des trois moments	37
IV-2-1- Remarques	39
IV-3- Poutres droites hyperstatiques à une seule travée	45
IV-4- Poutres droites hyperstatiques à plusieurs travées	47
IV-5- Méthode des foyers	48
IV-5-1- Foyers de la gauche	48
IV-5-1-1-Remarque	49
IV-5-2- Foyers de la droite	49
IV-5-2-1- Remarque	51
IV-6- Exercices	56
Bibliographie	57

Sollicitations composées

I-1-Flexion déviée :

I-1-1-Définition :

On dit d'une flexion qu'elle est déviée lorsque le moment de flexion ne passe pas d'un des axes principaux de la section ou des efforts extérieurs qui ne sont pas appliqués dans le plan de flexion principale (x, z) ou (y,z).

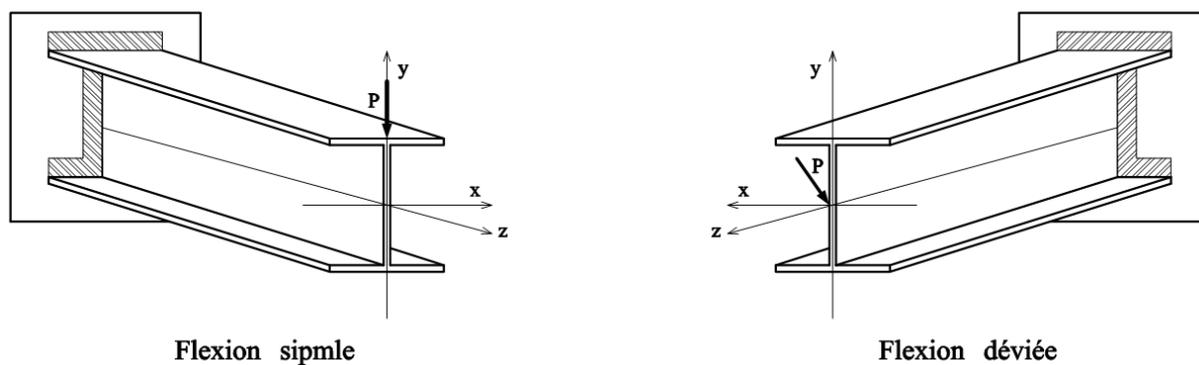


Fig. 01

I-1-2- Contraintes normales en flexion simple :

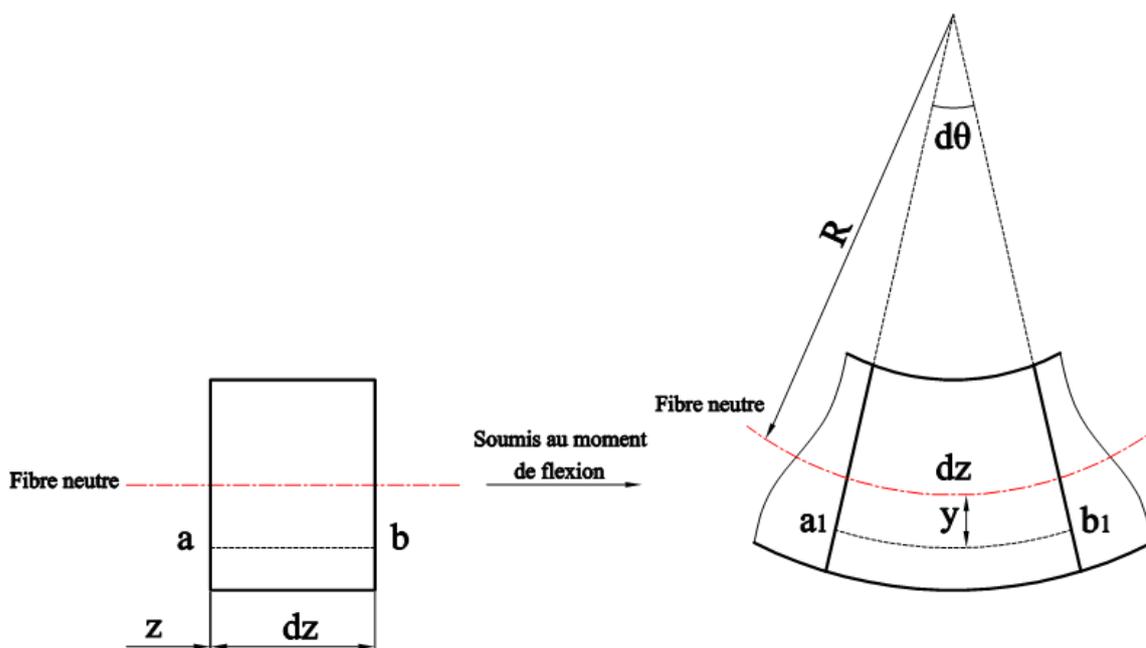


Fig. 02

$$N = \int_A \sigma \, dA \qquad M_x = N \cdot y = \int_A \sigma \cdot y \, dA$$

$$M_x = \int_A \sigma \, dA \dots\dots\dots(01)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{(R + y)d\theta - dz}{dz} = \frac{(R + y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{y}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \dots\dots\dots(02)$$

La loi de Hooke $\rightarrow \sigma = E \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{R}$

$$\sigma = \frac{E y}{R} \dots\dots\dots(03)$$

$$M_x = \int_A \frac{E}{R} \cdot y^2 \, dA = \frac{E}{R} \int_A y^2 \, dA \rightarrow M_x = \frac{E}{R} \cdot I_x \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$$

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{R} = \frac{M_x}{I_x} y \rightarrow \sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \dots\dots\dots(04)$$

La formule de Navier

I-1-3- Remarques :

- 1- La contrainte σ est proportionnelle au moment fléchissant.
- 2- La contrainte σ varie linéairement en fonction de y .
- 3- La fibre la plus sollicitée est située aux points les plus éloignés de la fibre neutre (Soit c'est traction ou compression).

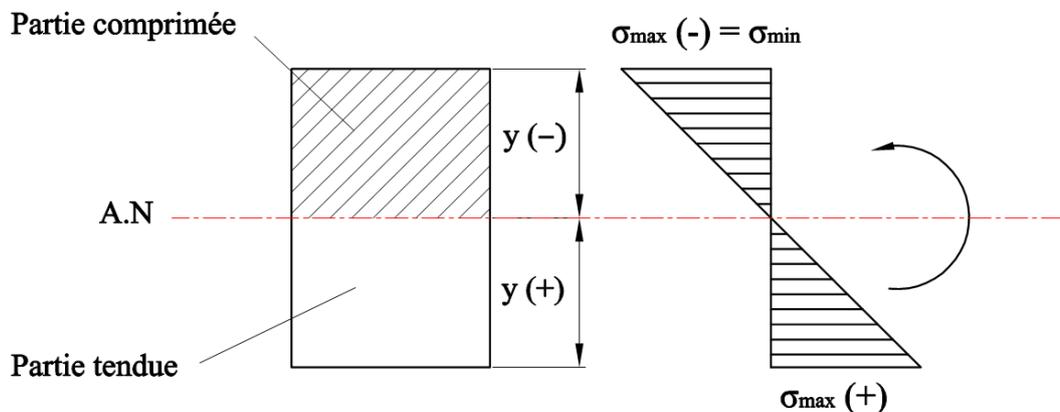


Fig. 03

I-1-4- Contraintes normales en flexion déviée :

La flexion déviée est étudiée comme une somme de deux flexions simples et par conséquent la contrainte normale σ en un point arbitraire dans la section droite de coordonnées x et y (Fig. 04) est définie par la formule suivante :

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = M \left(\frac{y}{I_x} \sin \alpha + \frac{x}{I_y} \cos \alpha \right) \dots \dots \dots (05)$$

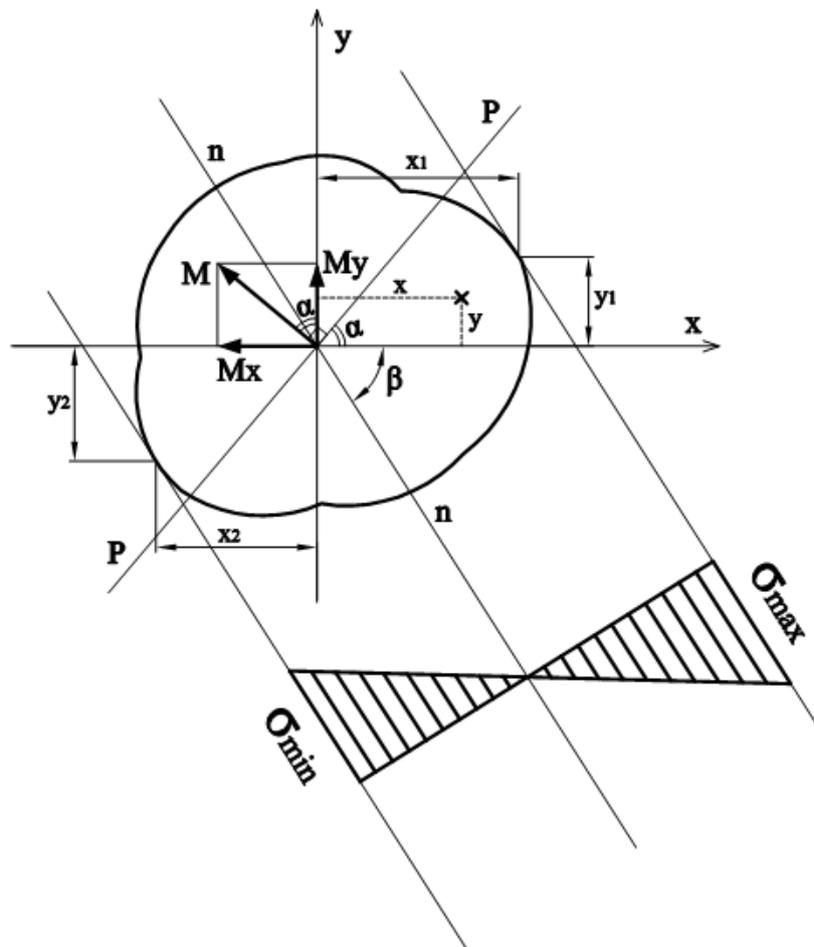


Fig. 04

Où :

I_x et I_y : Les moments d’inertie des axes principaux centraux de la section droite.

M_x et M_y : Les moments fléchissants par rapport aux axes principaux x et y qui sont les composantes du moment fléchissant résultant $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

(P,z) : Le plan de la flexion déviée, formé avec le plan de la flexion principale (x,z) un angle α .

I-1-5- Equation de la fibre neutre nn :

Détermine par substitution de $\sigma = 0$.

$$y = -x \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = -x \frac{I_x}{I_y} \cdot \cot \alpha = x \tan \beta \quad \dots\dots\dots(06)$$

$$\frac{y}{x} = \tan \beta$$

$$\tan \beta = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \cot \alpha \quad \dots\dots\dots(07)$$

Où :

β : Angle de la pente de la fibre neutre avec l'axe principale x .

I-1-6- Remarques :

1- Puisque dans le cas général $I_y \neq I_x$ donc la fibre neutre d'habitude n'est pas perpendiculaire à un plan de la flexion déviée (P,z), plutôt il est incliné vers l'axe au petit moment d'inertie.

2- Dans toute la relation on suppose les moments M_x et M_y positifs s'ils engendrent des contraintes de traction en toutes les pointes du premier quadrant de la section.

On détermine les contraintes normales maximales de la traction (σ_{max}) et de la compression (σ_{min}) à l'aide de la formule (05) après avoir substitué les coordonnées (x_1, y_1, x_2, y_2) des points de tangence du contour de la section avec des droites parallèle à la fibre neutre.

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} y_1 + \frac{M_y}{I_y} x_1 \\ \sigma_{min} = \frac{M_x}{I_x} y_2 + \frac{M_y}{I_y} x_2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(08)$$

Et si la contrainte normale maximale de traction ou de compression est développée au point le plus éloigné des deux axes principaux pour des sections rectangulaires ou à la forme I ou des sections similaires, la relation précédente devient comme suit:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \\ \sigma_{min} = -\frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(09)$$

Donc : $\sigma_{min} = -\sigma_{max}$

Où : W_x et W_y sont les modules de résistance équatoriaux de la section par rapport aux axes x et y .

I-2- Flexion composée :

I-2-1- Définition :

Le cas de la flexion composée est le cas de traction ou compression excentrée qui est égal au cas de traction ou compression axiale avec une flexion déviée.

I-2-2- Contraintes normales en flexion composée :

la contrainte normale σ en un point arbitraire dans la section droite de coordonnées x et y (Fig. 05) est définie par la formule suivante :

$$\sigma = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad \dots\dots\dots(10)$$

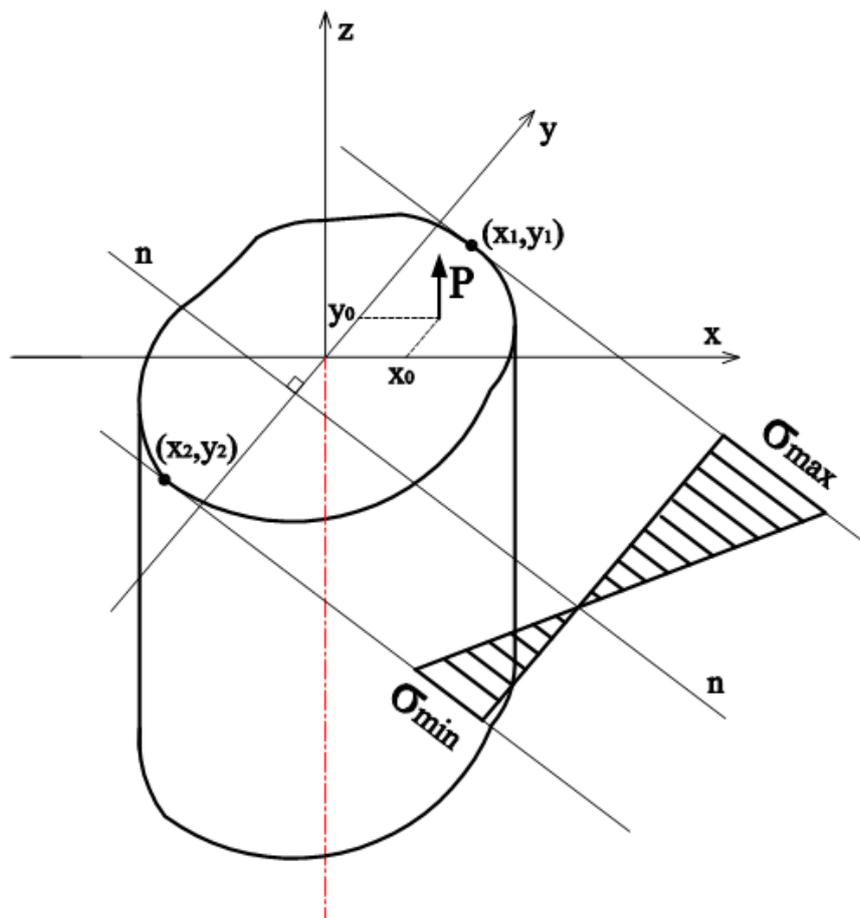


Fig. 05

Donc :

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot y_0}{I_x} y + \frac{P \cdot x_0}{I_y} x \quad \dots\dots\dots(11)$$

Où :

A : La surface de la section transversale.

N_z : La force normale

M_x et M_y : Les moments fléchissants par rapport aux axes principaux x et y .

x_0 et y_0 : Les coordonnées d'impact de la force excentrée P .

I-2-3- Equation de la fibre neutre nn :

Détermine par substitution de $\sigma = 0$.

$$\frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot y_0}{I_x} y + \frac{P \cdot x_0}{I_y} x = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

I-2-4 : Remarques :

- 1- À partir de l'équation de la fibre neutre, nous observons que la fibre neutre ne dépasse pas le centre de gravité de la section.
- 2- Dans toute la relation précédente (12), les moments M_x et M_y positifs s'ils engendrent des contraintes de traction en toutes les pointes du premier quadrant de la section, mais N_z est considéré positif s'elle est force de traction.

I-2-5- Les contraintes normales maximales de la traction ou de la compression :

On détermine les contraintes normales maximales de la traction (σ_{max}) et de la compression (σ_{min}) à l'aide de la formule (12) après avoir substitué les coordonnées (x_1, y_1, x_2, y_2) des points de tangence du contour de la section avec des droites parallèle à la fibre neutre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{max} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_1 + \frac{M_y}{I_y} x_1 \\ \sigma_{min} = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_2 + \frac{M_y}{I_y} x_2 \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots(13)$$

Pour les sections rectangulaires ou à la forme I ou les sections similaires, les contraintes normales maximales de traction ou de compression est développée au point le plus éloigné des deux axes principaux centraux et la relation précédente devient comme suit:

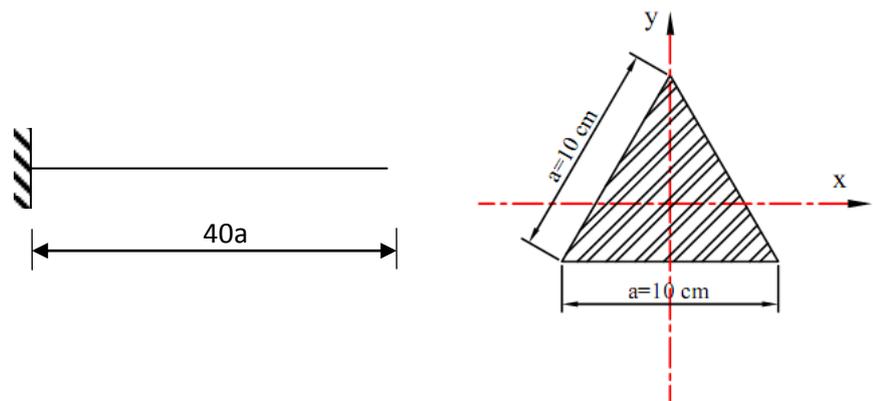
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\max} = \frac{N_z}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \\ \sigma_{\min} = \frac{N_z}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \end{array} \right. \dots\dots\dots(14)$$

I-3- Exercices:

Exercice 01 :

Déterminer la valeur de la contrainte normale maximale de traction et compression dans la section dangereuse de la poutre .

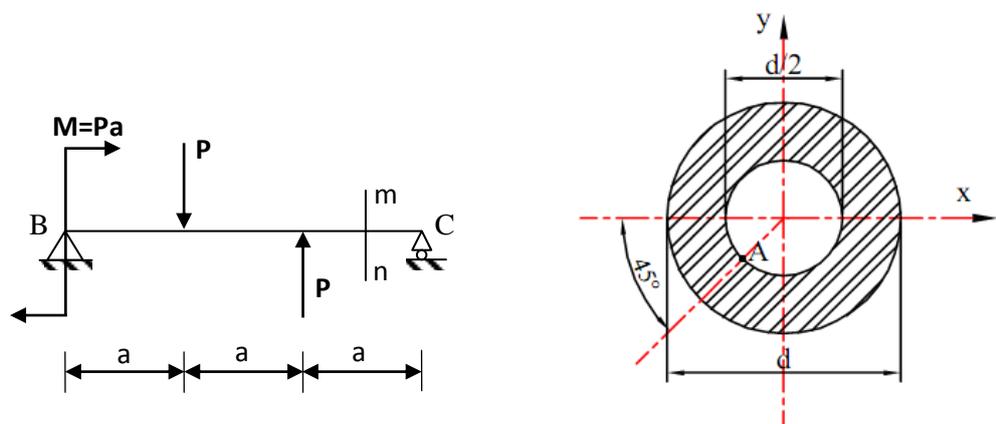
Où : $\gamma=7.8 \text{ g/cm}^3$



Exercice 02 :

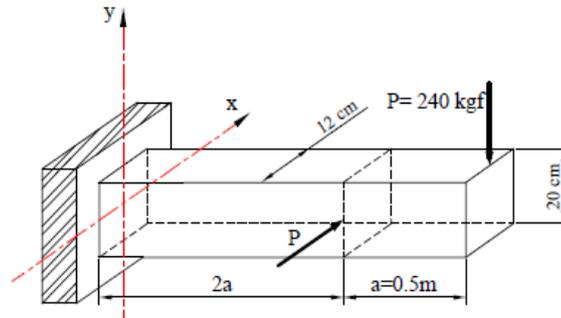
1. Déterminer la valeur de la contrainte normale au point A dans la section dangereuse de la poutre ($\sigma_{A \text{ max}}$) .

2. Déterminer la valeur de la contrainte normale au point A dans la section transversale mn ($\sigma_{A \text{ mn}}$) .



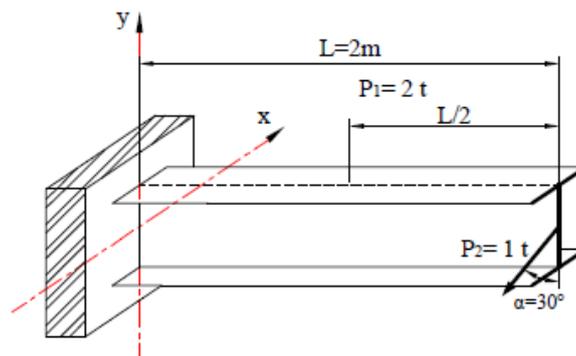
Exercice 03 :

Déterminer la valeur de la contrainte normale maximale (σ_{\max}) et la position de la fibre neutre dans la section dangereuse de la poutre.



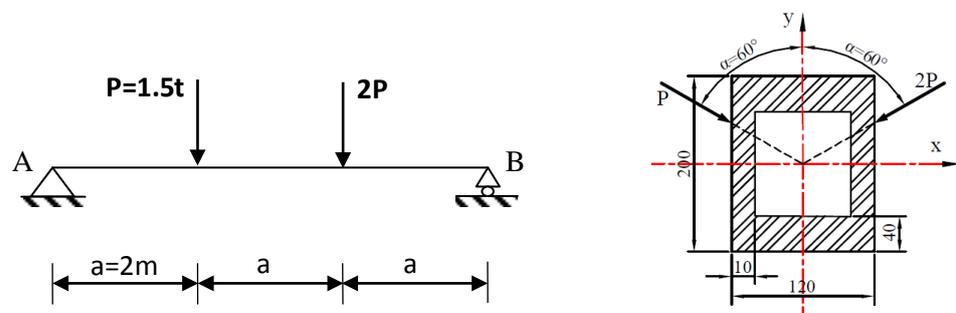
Exercice 04 :

Déterminer la valeur de la contrainte normale maximale (σ_{\max}) et la position de la fibre neutre dans la section dangereuse de la poutre.



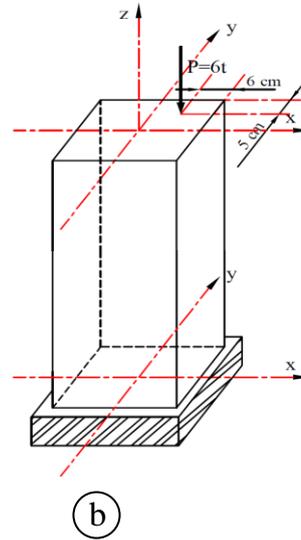
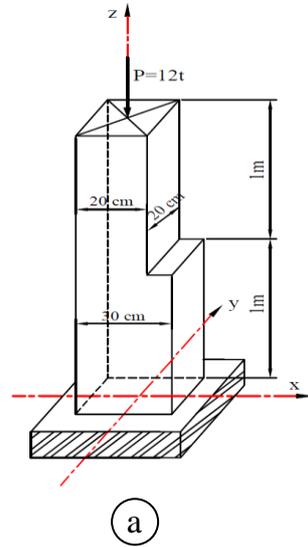
Exercice 05 :

Déterminer la valeur de la contrainte normale maximale (σ_{\max}) et la position de la fibre neutre dans la section dangereuse de la poutre.



Exercice 06 :

Déterminer la valeur des contraintes normales maximales de traction (σ_{\max}) et de compression (σ_{\min}) et la position de la fibre neutre dans la section dangereuse pour les deux cas (a) et (b).



Calcul des déformations et méthodes énergétiques

II-1- Introduction :

Sous l'effet de forces extérieures, toutes les structures sont exposées à des déformations résultant de la capacité du matériau de construction à se déformer.

Donc, la structure passe de la position initiale (Position d'équilibre non déformée) à une autre position (Position d'équilibre déformé), et par conséquent le calcul des déformations à chaque point de la structure est important pour l'ingénieur en termes de théorie et de pratique.

- Du côté théorique, il se résume au fait que ces déformations aident et donnent la possibilité de calculer les constructions hyperstatiques (ce sont les constructions qui ne peuvent être résolues par les équations d'équilibre qu'après avoir profité des équations de déformations)
- Du côté pratique, il est résumé que l'utilisation parfaite de la construction nécessite ou suppose que la déformation ou les déformations dans la construction ne dépassent pas les valeurs limites connues (que nous exprimons sur la condition de rigidité) et pas seulement la condition de résistance (tandis que la contrainte maximale dans la section dangereuse ne dépasse pas la limite admissible).

II-2- Hypothèses de calcul des déformations :

L'objet de la RDM consiste à déterminer les contraintes et les déformations puis vérifier que ces contraintes ainsi que les déplacements engendrés par ces déformations ne dépassent les limites permises.

Donc, le calcul des déformations est basé sur les hypothèses de la résistance des matériaux suivantes:

- Considérez les matériaux sont homogènes et isotropes.
- Considérez le matériaux sont élastiques.
- la petitesse des déformations par rapport aux dimensions géométriques de la structure.
- Hypothèse de sections plates (Navier-Bernoulli).
- La relation linéaire entre la contrainte et la déformation (Loi de Hooke) $\sigma = E \cdot \varepsilon$

II-3- Méthode énergétique pour le calcul des déformations :

La théorie de la conservation de l'énergie dans toutes les phases de déformation stipule que le travail mécanique des forces extérieures égal au travail mécanique des forces intérieures ou d'une autre expression tant que la charge ne sort pas de la phase élastique, le travail mécanique des forces extérieures se transforme complètement à une énergie potentielle (le travail mécanique des forces intérieures dans la construction déformée).

Ce fait est pratiquement observé dans ce qui suit:

Si nous appliquons à une poutre d'un ensemble de forces extérieures, celui-ci subit une déformation, et par conséquent les points d'application des forces changent, ce qui signifie que les forces extérieures effectuent un travail mécanique, car ce travail mécanique est stocké dans la poutre, et ce qui explique le retour de la poutre à son état normal initial non déformé si les forces extérieures cessent de s'exécuter sur lui.

II-4- Travail mécanique des forces extérieures :

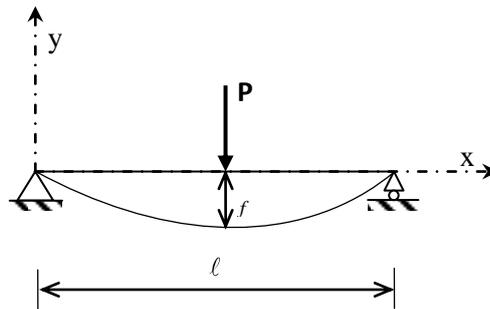


Fig. 06

Lorsque la force P augmente progressivement, elle est suivie d'une augmentation de la flèche (f) progressivement proportionnelle à valeur de P.

Donc pour passer de l'état (λ) à l'état ($\lambda + d\lambda$)

Après avoir négligé les petites quantités, on trouve :

$$dT^e = f \cdot P \cdot \lambda d\lambda$$

Pour passer de la position initiale 0 à la position finale 1 :

$$T = \int_0^1 f \cdot P \cdot \lambda d\lambda = f \cdot P \cdot \left. \frac{\lambda^2}{2} \right|_0^1$$

$$T = \frac{1}{2} f \cdot P \dots\dots\dots(15)$$

Si la force est soudaine, le travail effectué est :

$$T = P f \dots\dots\dots(16)$$

Dans le cas des forces diverses, le travail effectué est du passage de la position initiale à la position finale est :

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i f_i + \sum_{j=1}^n P_j f_j \dots\dots\dots(17)$$

II-4-1- Remarques :

1. La flèche est toujours dans la direction de la force.
2. Nous n'avons pas tenu compte du travail fourni par les réactions d'appui puisque la déformation au niveau des appuis est nulle.

II-5- Travail mécanique des forces intérieures :

II-5-1- Effort longitudinal (effort normal) :

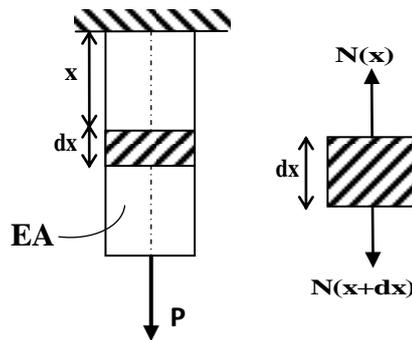


Fig. 07

La partie coupée subira un déplacement de $d\delta$

$$d\delta = \frac{N dx}{E A}$$

$$dT^N = \frac{1}{2} N d\delta = \frac{1}{2} N \frac{N dx}{E A}$$

$$T^N = \int \frac{N^2}{E.A} dx \dots\dots\dots(18)$$

II-5-2- Moments fléchissants :

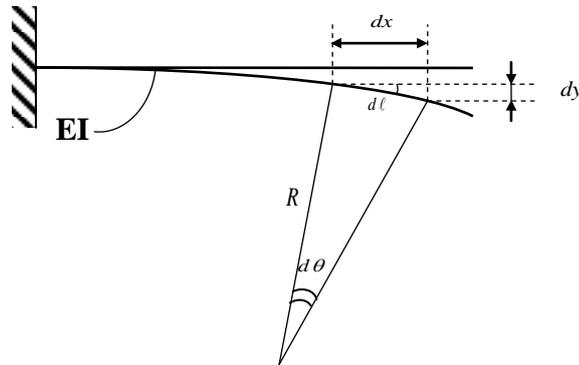


Fig. 08

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E.I} \quad ; \quad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{d\ell}$$

Où : $\frac{1}{R}$ représente la courbure

$$\text{tg } \theta = \frac{dy}{d\ell} \approx \theta \quad ; \quad d\ell = dx$$

$$\theta = \frac{dy}{d\ell} = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

$$y'' = \frac{M}{E.I} \dots\dots\dots(19)$$

Equation différentielle de la ligne élastique

$$dT^M = \frac{1}{2} M d\theta$$

$$\frac{d\theta}{dx} = y'' = \frac{M}{E.I}$$

$$dT^M = \frac{1}{2} M \frac{M}{E.I} dx = \frac{M^2}{2E.I} dx$$

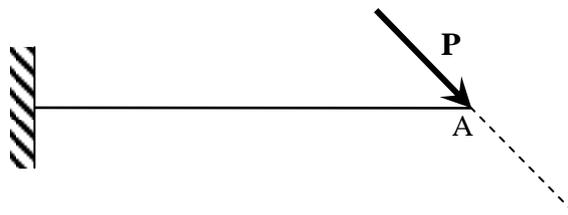
$$T^M = \int \frac{M^2}{2E.I} dx \dots\dots\dots(20)$$

II-5-3- Remarque :

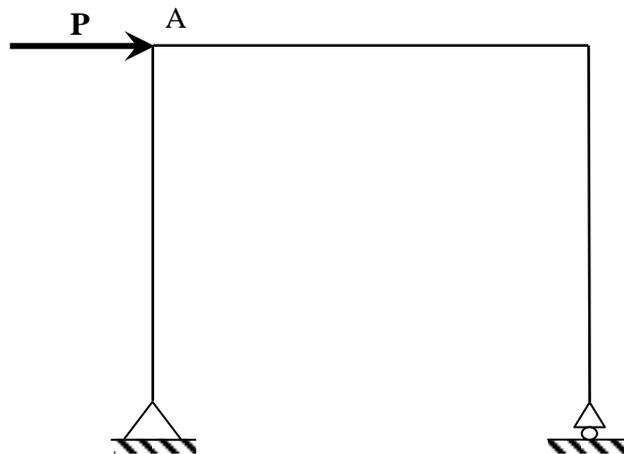
On a négligé le travail due à l'effort tranchant à cause de sa faiblesse.

II-6- Domaine d'application de la théorie de l'énergie :

Le domaine d'application de la théorie de l'énergie est très limité, car il ne nous donne pas la possibilité de calculer le déplacement à partir de n'importe quelle direction que nous voudrions, mais plutôt le calcul du déplacement se fait uniquement au point d'application de la force et dans la direction de la force, par exemple la figure 09 ne voit aucune possibilité de calculer le déplacement sauf au point A et dans la direction de la force.

**Fig. 09**

La même chose pour la figure 10

**Fig. 10**

Donc, il est nécessaire de rechercher d'autres alternatives, dans lesquelles la méthode de l'énergie sera généralisée.

II-7- Théorème de Betti :

Le travail mécanique produit par une force P_i pour un déplacement due à l'application d'une force P_j est égal au travail mécanique produit par une force P_j pour un déplacement due à l'application d'une force P_i .

$$P_j \Delta_{ji} = P_i \Delta_{ij} \dots\dots\dots(21)$$

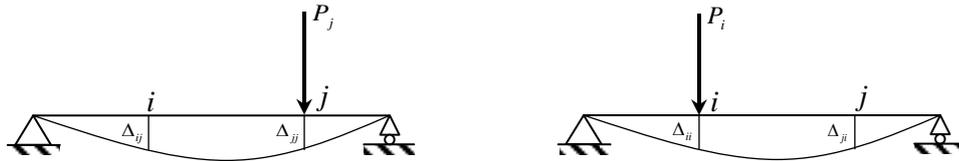


Fig. 11

Où :

Δ_{ii} : La valeur algébrique du déplacement au point (i) due à une force P_i .

Δ_{ij} : La valeur algébrique du déplacement au point (i) due à une force P_j .

Δ_i : La valeur algébrique du déplacement au point (i) sous l'action de toutes les forces.

II-8- Théorème de Maxwell :

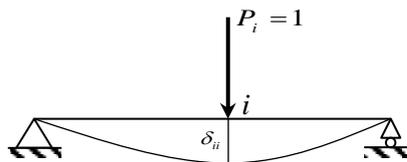


Fig. 12

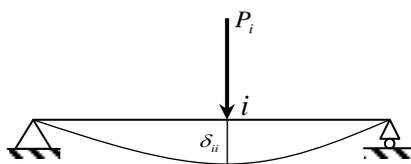
Où :

δ_{ii} : Déplacement due à une force unitaire.

$$\begin{aligned} \text{Betti} \quad &\rightarrow P_i = P_j \Rightarrow \Delta_{ji} = \Delta_{ij} \\ &P_i = P_j = 1 \Rightarrow \delta_{ji} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Le déplacement produit au point (i) due à une force unitaire appliquée au point (j) est égal au déplacement au point (j) due à une force unitaire appliquée au point (i).

II-9- Théorème générale du calcul de déplacement :



$$\Delta_{ii} = P_i \cdot \delta_{ii}$$

$$\Delta_{ij} = P_j \cdot \delta_{ij}$$

Fig. 13

Donc la valeur algébrique du déplacement est égale à la force multipliée par le déplacement associée à la force unitaire.

II-10- Théorème de Castigliano :

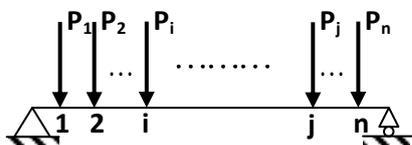


Fig. 14

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \dots\dots\dots(22)$$

Donc, le théorème de Castigliano déclare que la dérivée partielle de l'énergie par rapport à la l'une des forces appliquées est égal au déplacement du point d'application de la force suivant la direction de cette force.

Application :

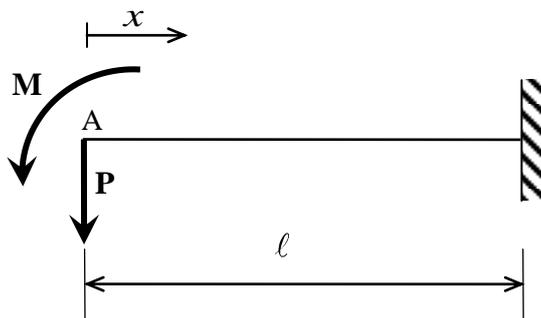


Fig. 15

Calculer à l'aide de théorème de Castigliano le déplacement vertical et la rotation au point A (\$\Delta_A ; \theta_A\$).

$$\Delta_A = \frac{\partial W}{\partial P} ; \theta_A = \frac{\partial W}{\partial M} ; W = \int_0^\ell \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$\Delta_A = ?$$

$$\Delta_A = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial M(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P}$$

$$\Delta_A = \int_0^\ell \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell -(M + Px) \cdot (-x) dx$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{M \cdot x^2}{2} + \frac{P \cdot x^3}{3} \right]_0^\ell = \frac{M \cdot \ell^2}{2EI} + \frac{P \cdot \ell^3}{3EI}$$

$$\theta_A = ?$$

$$\theta_A = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{\partial W}{\partial M(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M}$$

$$\theta_A = \int_0^\ell \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell -(M + Px) \cdot (-1) dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[M \cdot x + \frac{P \cdot x^2}{2} \right]_0^\ell$$

$$\theta_A = \frac{M \cdot \ell}{EI} + \frac{P \cdot \ell^2}{2EI}$$

Afin de généraliser le théorème de Castigliano, c'est à dire le calcul du déplacement en tout point où il y a une force concentrée à ce point ou non, si la force centrée est trouvée, il est

facile d'appliquer la relation suivante : $\Delta_A = \frac{\partial W}{\partial P_A}$.

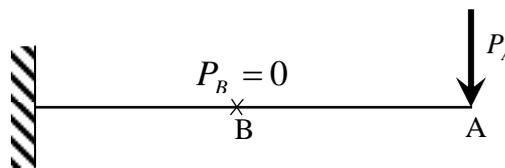


Fig. 16

Dans le cas d'absence de la force centrée, par exemple au point B nous créons une force fictive (P_f), nous calculons la quantité d'énergie en termes de la force fictive et les forces appliquées en d'autres points, puis nous nous dérivons par rapport à la force fictive et après la dérivation, nous assimilons cette force fictive à zéro, donc le résultat est la valeur réelle du déplacement au point B.

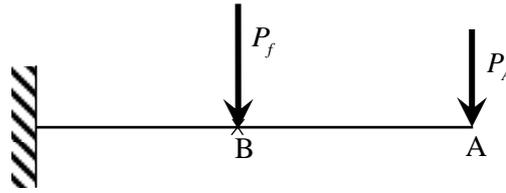


Fig. 17

$$\Delta_B = \left(\frac{\partial W}{\partial P_f} \right)_{P_f=0} \dots\dots\dots(23)$$

II-11- Théorème de Mohr " Force unitaire ":

Partant du théorème de Castigliano, on trouve :

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}$$

$$W = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$M = P \cdot \text{déplacement}$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \text{déplacement}$$

$$\overline{M} = \text{déplacement}$$

$$\overline{M} = \frac{\partial M}{\partial P}$$

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{2EI} \int \frac{\partial M^2}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$\Delta = \int \frac{M \overline{M}}{EI} dx \dots\dots\dots(24)$$

Celui qui regarde dans cette relation doit avoir une certaine particularité qu'elle est une intégrale de deux fonctions M et \overline{M} , où M est son degré (n), tandis que \overline{M} est une fonction linéaire, et le scientifique (Verechaguine) a exploité cette situation pour formuler une méthode graphique pour résoudre l'intégrale de (Mohr).

II-12- Méthode de Verechaguine pour résoudre l'intégrale de Mohr :

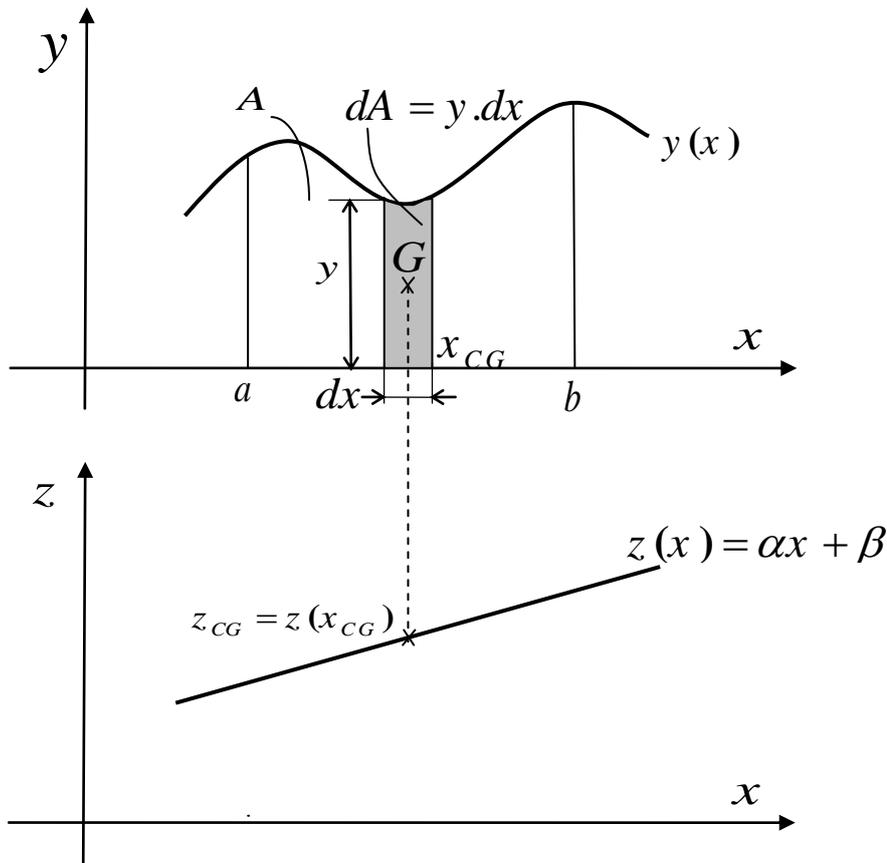
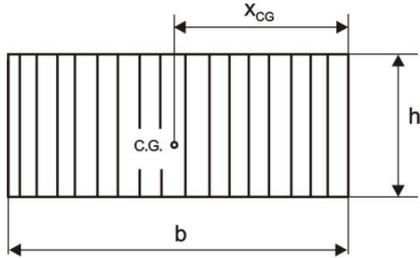
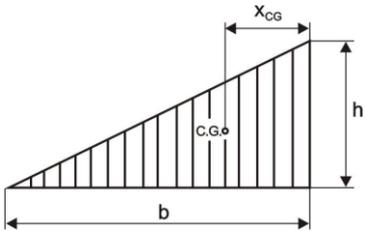
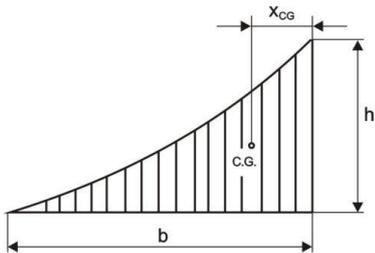


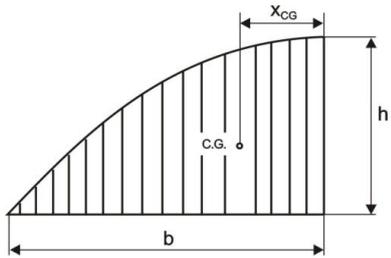
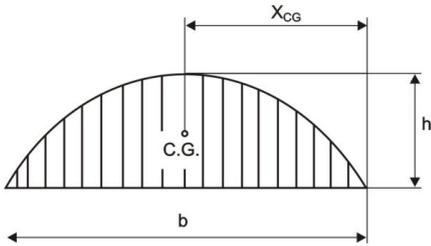
Fig. 18

$$\begin{aligned}
 \int_a^b y \cdot z \, dx & \quad ; \quad x_{CG} = \frac{S_y}{A} \\
 dA &= y \, dx \quad \text{et} \quad z(x) = \alpha x + \beta \\
 \int_a^b y \cdot z \, dx &= \int_a^b (\alpha x + \beta) \, dA \\
 &= \alpha \int_a^b x \, dA + \int_a^b \beta \, dA \\
 &= \alpha S_y + \beta A \\
 &= \alpha x_{CG} A + \beta A \\
 &= A (\alpha x_{CG} + \beta) \\
 &= A \cdot z_{CG}
 \end{aligned}$$

Donc, selon (Verechaguine), la valeur d'intégrale $\int M \overline{M} \cdot dx$ est égale à la multiplication de l'aire de tout le diagramme de M par la coordonnée correspondante de centre de gravité de M sur le diagramme de \overline{M} .

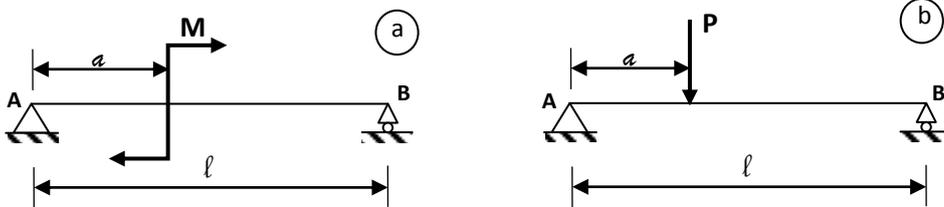
Afin d'accélérer le calcul de l'intégrale de Mohr par la méthode de Verechaguine, nous utilisons le tableau suivant qui montre quelques diagrammes les plus fréquents des moments fléchissant avec leurs aires et leurs distances du centre de gravité par rapport à l'axe x (x_{CG}).

N°	Forme du diagramme	Aire du diagramme	x_{CG}
01		$A = b.h$	$x_{CG} = \frac{b}{2}$
02		$A = \frac{b.h}{2}$	$x_{CG} = \frac{b}{3}$
03		$A = \frac{b.h}{3}$	$x_{CG} = \frac{b}{4}$

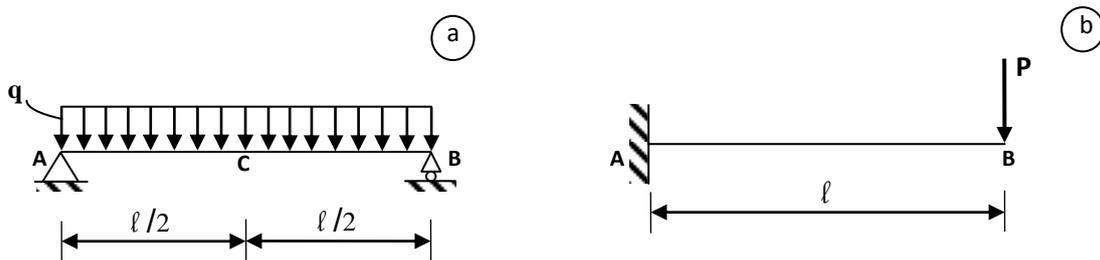
<p>04</p>		$A = \frac{2b \cdot h}{3}$	$x_{CG} = \frac{3b}{8}$
<p>05</p>		$A = \frac{2b \cdot h}{3}$	$x_{CG} = \frac{b}{2}$

II-13- Exercices:

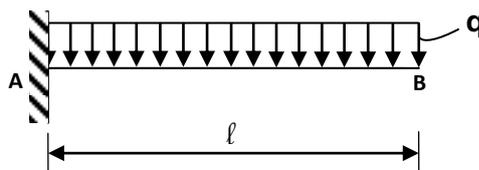
1) Déterminer l'expression de l'énergie et le déplacement en fonction des forces extérieures, sachant que la poutre a un moment d'inertie constant I .



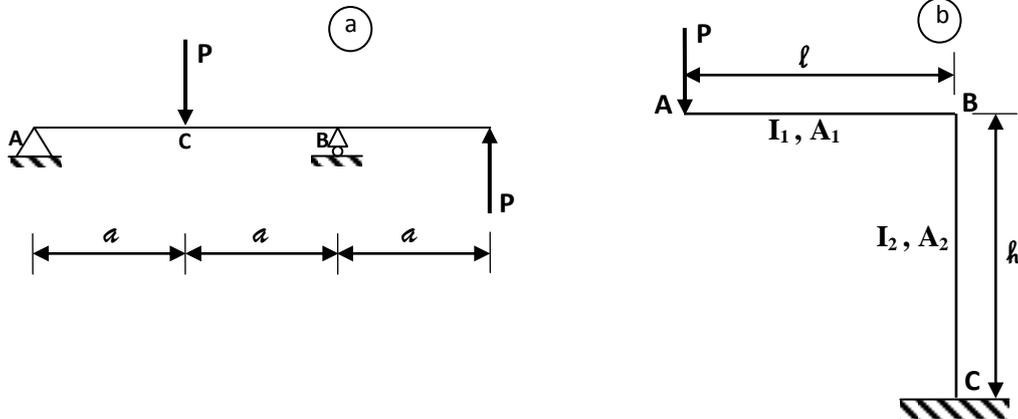
2) A l'aide de la théorie de Castigliano, calculer la rotation au point C dans le cas (a) et le déplacement vertical au point B dans le cas (b).



3) Calculer le déplacement vertical au point B en utilisant la méthode de Castigliano. Vérifier le résultat à l'aide de la méthode de Mohr.



4) A l'aide de la méthode de Verechaguine, calculer le déplacement vertical et la rotation au point C dans le cas (a), et calculer le déplacement vertical au point A dans le cas (b).



Calcul des poutres hyperstatiques à une seule travée

III-1- Définition :

On dit qu'une poutre qu'elle est hyperstatique ou une structure hyperstatique si le nombre des inconnues est supérieur au nombre des équations d'équilibre.

III-2- L'ordre d'hyperstaticité :

III-2-1- Nombre des inconnues :

Le nombre des inconnues est donné par la relation suivante : $(r+3b)$

Où :

r : nombre des réactions d'appui

b : nombre des barres

III-2-2- Nombre des équations :

Le nombre des équations est donné par la relation suivante : $(3n+k)$

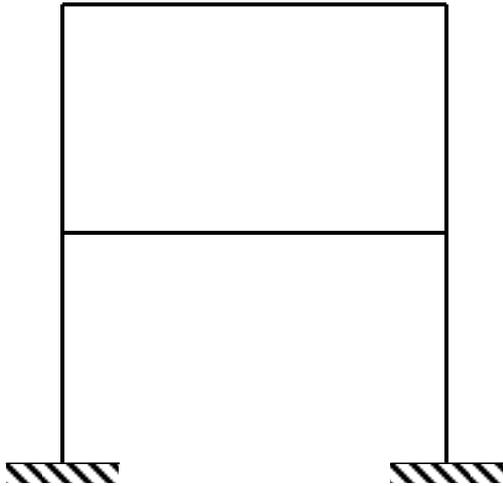
Où :

n : nombre des nœuds

k : nombre des conditions supplémentaires

Donc, en fonction du nombre des inconnues et du nombre des équations, nous avons trois états du système

- a- 1^{er} cas : Lorsque le nombre des inconnues est égal au nombre des équations c'est à dire $(r + 3b) = (3n + k)$ nous disons que l'ossature est isostatique.
- b- 2^{ème} cas : Lorsque le nombre des inconnues est inférieur au nombre des équations c'est à dire $(r + 3b) < (3n + k)$ nous disons que l'ossature est instable.
- c- 3^{ème} cas : Lorsque le nombre des inconnues est supérieur au nombre des équations c'est à dire $(r + 3b) > (3n + k)$ nous disons que l'ossature est hyperstatique et l'ordre d'hyperstaticité (h) est donné par l'équation: $h = (r + 3b) - (3n + k)$

Exemple 01 :**Fig. 19**

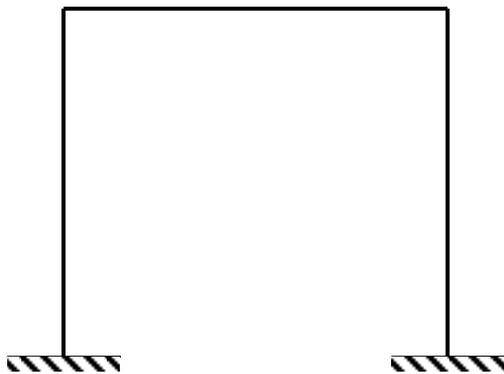
$$r = 6 ; b = 6 ; n = 6 ; k = 0$$

$$h = (r + 3b) - (3n + k)$$

$$h = (6 + 3 \cdot 6) - (3 \cdot 6 + 0)$$

$$h = 6$$

La structure est six fois hyperstatique

Exemple 02 :**Fig. 20**

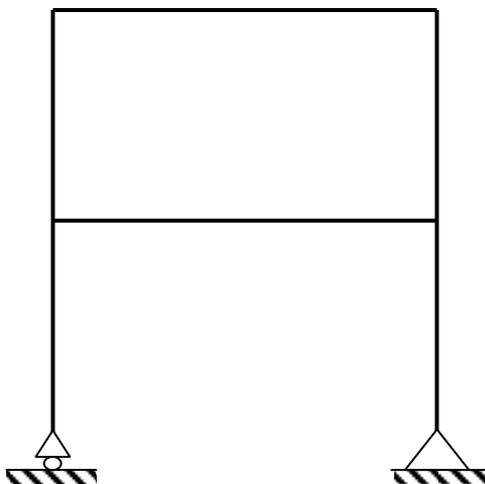
$$r = 6 ; b = 3 ; n = 4 ; k = 0$$

$$h = (r + 3b) - (3n + k)$$

$$h = (6 + 3 \cdot 3) - (3 \cdot 4 + 0)$$

$$h = 3$$

La structure est trois fois hyperstatique

Exemple 03 :**Fig. 21**

$$r = 3 ; b = 6 ; n = 6 ; k = 0$$

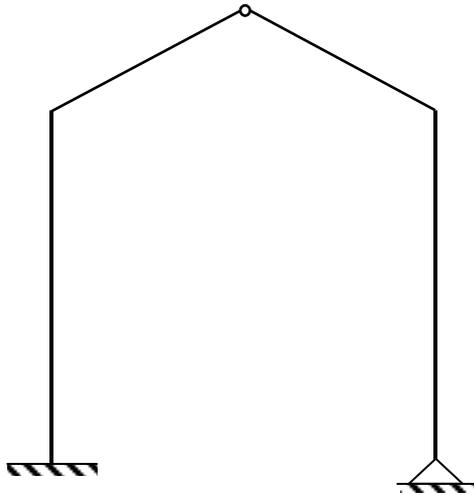
$$h = (r + 3b) - (3n + k)$$

$$h = (3 + 3 \cdot 6) - (3 \cdot 6 + 0)$$

$$h = 3$$

La structure est trois fois hyperstatique

Exemple 04 :



$$r = 5 ; b = 4 ; n = 5 ; k = 1$$

$$h = (r + 3b) - (3n + k)$$

$$h = (5 + 3 \cdot 4) - (3 \cdot 5 + 1)$$

$$h = 1$$

La structure est une fois hyperstatique

Fig. 22

III-3- Méthode de résolution des poutres hyperstatique :

Pour résoudre les poutres hyperstatiques, nous suivons les méthodes suivantes :

III-3-1- Méthode des paramètres initiaux :

La méthode des paramètres initiaux dépend du principe de non continuité de la fonction pour déterminer la relation des moments fléchissants dans la poutre composé de plusieurs sections, en prenant les paramètres initiaux du déplacement vertical y_0 et la rotation θ_0 , en prenant l'origine des coordonnées au niveau du côté gauche de la poutre, les relations $\theta(x)$ et $y(x)$ sont données par la méthode des paramètres initiaux comme suit :

$$EI \theta(x) = EI \theta_0 + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!}$$

$$+ \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \dots; \dots\dots\dots(25)$$

$$EI y(x) = EI y_0 + EI \theta_0 \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!}$$

$$+ \sum q_c \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum q_d \frac{(x-d)^5}{5!} + \dots; \dots\dots\dots(26)$$

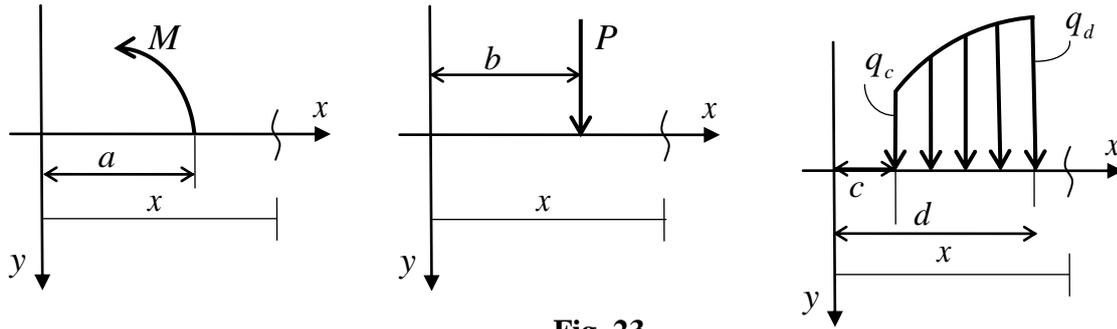


Fig. 23

Où :

I : Le moment d'inertie de la section droite par rapport à l'axe z .

M : Les moment des couples extérieurs.

a : Les distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des couples extérieurs.

P : Les forces concentrées y compris les réactions d'appui.

b : Les distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des force concentrées.

q_c, q_d : Respectivement les valeurs de la charge répartie en début et en fin.

q'_c, q'_d : La dérivée de la charge répartie aux points $(x = c)$ et $(x = d)$.

Exemple :

A l'aide de la méthode des paramètres initiaux, calculer le déplacement vertical au point B et les rotations aux appuis (C, D).

Où nous avons : $P = 4qa$, $M = qa^2$

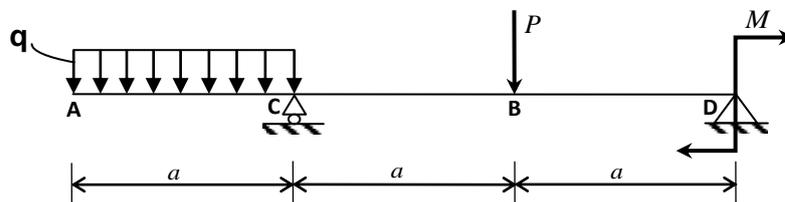


Fig. 24

1. Calcul les réactions d'appui :

$$\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ H_D = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \sum F_y = 0 \\ V_C + V_D = qa + P \\ V_C + V_D = 5qa \end{array} \right| \begin{array}{l} \sum M_{/B} = 0 \\ V_C \cdot 2a - qa \cdot \frac{5}{2}a - qa \cdot a + qa^2 = 0 \end{array}$$

Donc :

$$V_C = \frac{11}{4}qa \quad ; \quad V_D = \frac{9}{4}qa$$

2. Calcul des déplacements :

$$\begin{aligned} EI \theta(x) &= EI \theta_0 + q \frac{(x-0)^3}{3!} - q \frac{(x-a)^3}{3!} - V_C \frac{(x-a)^2}{2!} + P \frac{(x-2a)^2}{2!} \\ &= EI \theta_0 + q \frac{x^3}{6} - q \frac{(x-a)^3}{6} - \frac{11}{4}qa \frac{(x-a)^2}{2} + 4qa \frac{(x-2a)^2}{2} \\ EI y(x) &= EI y_0 + EI \theta_0 x + \underbrace{q \frac{x^4}{24} - q \frac{(x-a)^4}{24}}_I - \underbrace{\frac{11}{4}qa \frac{(x-a)^3}{6} + 4qa \frac{(x-2a)^3}{6}}_{II} \end{aligned}$$

Où nous avons les sections :

$$\begin{aligned} I : & \quad 0 \leq x \leq a \\ II : & \quad a \leq x \leq 2a \\ III : & \quad 2a \leq x \leq 3a \end{aligned}$$

$$EI y(x=a) = 0 \longrightarrow EI y(x=a) = EI y_0 + EI \theta_0 a + \frac{qa^4}{24} = 0$$

$$EI y(x=3a) = 0 \longrightarrow EI y(x=3a) = EI y_0 + EI \theta_0 3a + \frac{81}{24}qa^4 - \frac{16}{24}qa^4 - \frac{88}{24}qa^4 + \frac{2}{3}qa^4 = 0$$

$$\begin{cases} EI y_0 + EI \theta_0 a + \frac{qa^4}{24} = 0 \\ EI y_0 + 3EI \theta_0 a + \frac{81}{24}qa^4 - \frac{16}{24}qa^4 - \frac{88}{24}qa^4 + \frac{2}{3}qa^4 = 0 \end{cases}$$

$$2EI \theta_0 a - \frac{8}{24}qa^4 = 0 \longrightarrow \theta_0 = \frac{qa^3}{6EI}$$

Après substitution, on obtient :

$$EIy_0 + \frac{qa^4}{6} + \frac{qa^4}{24} = 0 \longrightarrow y_0 = -\frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI}$$

Donc, nous pouvons écrire les équations de déplacement vertical et la rotation pour toutes les sections de la poutre comme suit :

$$EI \theta(x) = \frac{qa^3}{6} + q \frac{x^3}{6} \Big|_{0 \leq x \leq a} - q \frac{(x-a)^3}{6} - \frac{11}{8} qa(x-a)^2 \Big|_{a \leq x \leq 2a} + 2qa(x-2a)^2 \Big|_{2a \leq x \leq 3a}$$

$$EIy(x) = -\frac{5}{24} qa^4 + \frac{qa^3}{6} x + q \frac{x^4}{24} \Big|_{0 \leq x \leq a} - q \frac{(x-a)^4}{24} - \frac{11}{24} qa(x-a)^3 \Big|_{a \leq x \leq 2a} + \frac{2}{3} qa(x-2a)^3 \Big|_{2a \leq x \leq 3a}$$

Par conséquent, le déplacement vertical et les rotations peuvent être calculés au point B et aux appuis comme suit:

$$EI \theta(x=a) = EI \theta_a = \frac{qa^3}{6} + q \frac{a^3}{6} \longrightarrow \theta_a = \frac{qa^3}{3EI}$$

$$EI \theta(x=3a) = EI \theta_{3a} = \frac{qa^3}{6} + q \frac{27a^3}{6} - q \frac{8a^3}{6} - \frac{11}{8} qa \cdot 4a^2 + 2qa \cdot a^2$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{27}{6} - \frac{8}{6} - \frac{44}{8} + 2 \right) qa^3$$

$$EI \theta_{3a} = -\frac{qa^3}{6} \longrightarrow \theta_{3a} = -\frac{qa^3}{6EI}$$

$$EIy(x=2a) = EIy_{2a} = -\frac{5}{24} qa^4 + \frac{qa^3}{6} \cdot 2a + q \frac{16a^4}{24} - q \frac{a^4}{24} - \frac{11}{24} qa \cdot a^3$$

$$= \left(-\frac{5}{24} + \frac{2}{6} + \frac{16}{24} - \frac{1}{24} - \frac{11}{24} \right) qa^4$$

$$EIy_{2a} = \frac{7}{24} qa^4 \longrightarrow y_{2a} = \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EI}$$

III-3-2- Méthode de la poutre fictive :

Pour une poutre donnée, nous traçons le diagramme du moment fléchissant, puis considérons ce diagramme comme une charge répartie de la poutre fictive. Pour calculer la rotation pour n'importe quelle section de la poutre réelle donnée, nous divisons la force de cisaillement pour la même section dans la poutre fictive $T_f(x)$ par la rigidité EI de la poutre réelle selon la relation suivante :

$$\theta(x) = \frac{T_f(x)}{EI} \quad \dots\dots\dots(27)$$

Pour calculer le déplacement vertical dans n'importe quelle section de la poutre réelle donnée, nous divisons le moment fléchissant pour la même section de la poutre fictive $M_f(x)$ la rigidité EI de la poutre réelle selon la relation suivante :

$$y(x) = \frac{M_f(x)}{EI} \quad \dots\dots\dots(28)$$

Aussi, pour créer une poutre fictive correspondante à une poutre réelle donnée, les règles suivantes doivent être suivies :

1. Un appui situé à l'extrémité de la poutre réelle donnée reste un appui à l'extrémité de la poutre fictive.
2. Un appui qui n'est pas situé à l'extrémité de la poutre réelle donnée devient une articulation de la poutre fictive.
3. L'extrémité encastree de la poutre réelle donnée devient une extrémité libre de la poutre fictive.
4. L'extrémité libre de la poutre réelle donnée devient une extrémité encastree de la poutre fictive.
5. Une articulation située dans la poutre réelle donnée devient un appui de la poutre fictive.

Les règles de construction des poutres fictives sont indiquées dans la figure 25, où :

- ❖ a et b sont les poutres réelles données.
- ❖ a' et b' sont les poutres fictives correspondantes aux poutres réelles données.

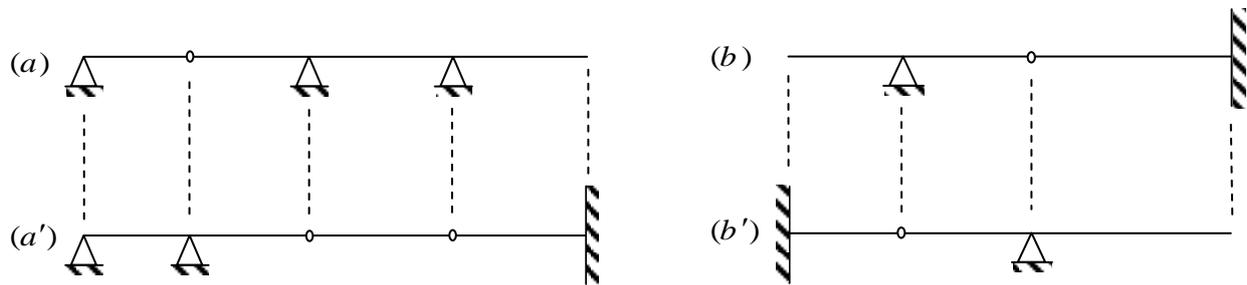


Fig. 25

Exemple 01 :

Calculer le déplacement vertical et la rotation au point A.

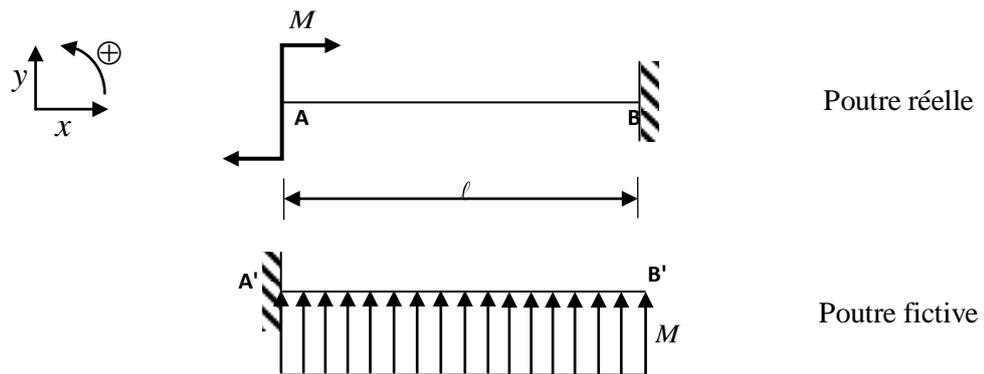


Fig. 26

$$T_{A'} = -M \cdot l$$

$$M_{A'} = \frac{M \cdot l^2}{2}$$

$$\theta_A = \frac{T_{A'}}{EI} = -\frac{M \cdot l}{EI}$$

$$y_A = \frac{M_{A'}}{EI} = \frac{M \cdot l^2}{2EI}$$

Exemple 02 :

Calculer le déplacement vertical et la rotation au point A.

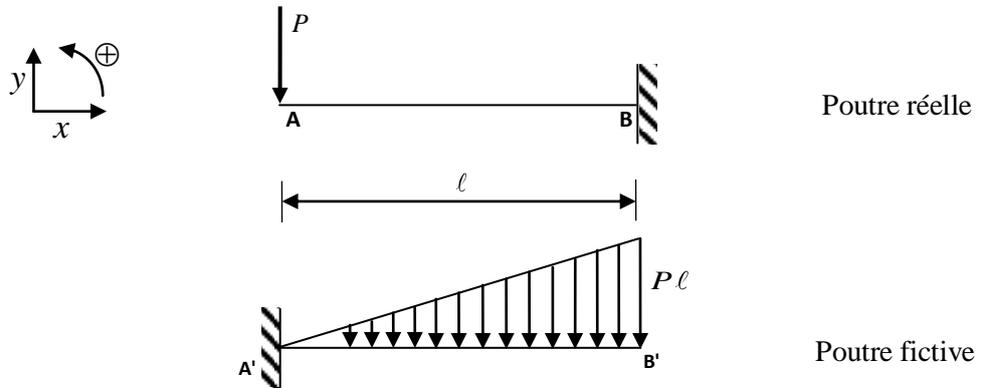


Fig. 27

$$T_{A'} = P \ell \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{P \ell^2}{2}$$

$$M_{A'} = -P \ell \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2\ell}{3} = -\frac{P \ell^3}{3}$$

$$\theta_A = \frac{T_{A'}}{EI} = \frac{P \ell^2}{2EI}$$

$$y_A = \frac{M_{A'}}{EI} = -\frac{P \ell^3}{3EI}$$

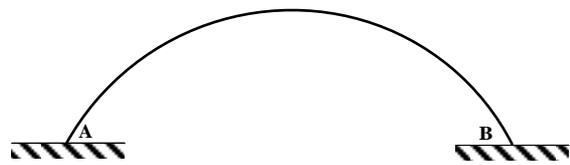
III-3-3- Théorème de Ménabrea :

On l'appelle aussi le principe de moindre travail, il exprime les valeurs de réactions qui rendent la poutre hyperstatique et qui résulte d'une énergie intérieure.

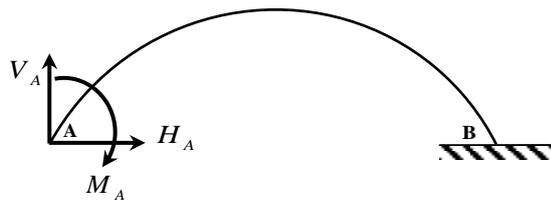
Nous supposons que nous avons une poutre sous forme d'un arc hyperstatique de troisième degré représentée à la figure ci-dessous, pour rendre cette poutre isostatique nous libérons l'appui A et substituons les trois forces inconnues dans l'appui par trois réactions (H_A, V_A, M_A) et cette poutre isostatique nous l'appelons une poutre associée sachant que les déplacements au point A de cette poutre sont nuls.

Et à partir du théorème de Castigliano, nous pouvons écrire le suivant :

$$\frac{\partial W}{\partial H_A} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial V_A} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial M_A} = 0 \quad \dots\dots\dots(29)$$



La poutre hyperstatique

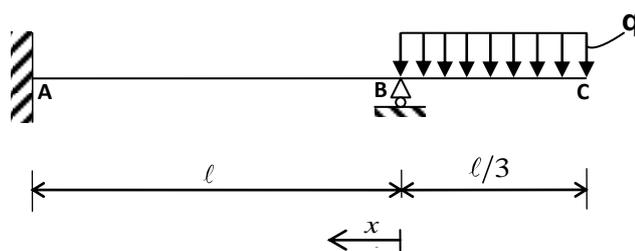


La poutre isostatique associée

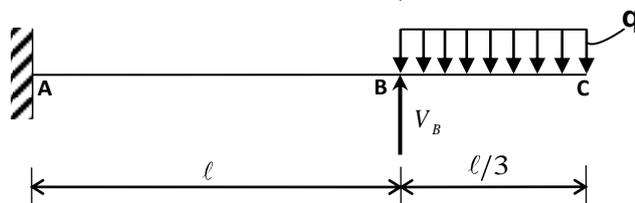
Fig. 28

Et puis, nous avons trois équations qui nous permettent de calculer les trois réactions dans l'appui A (H_A , V_A , M_A).

Exemple :



La poutre hyperstatique



La poutre isostatique associée

Fig. 29

$$M(x) = V_B \cdot x - \frac{q\ell}{3} \cdot \left(x + \frac{\ell}{6}\right)$$

$$M(x) = V_B \cdot x - \frac{q\ell}{3} \cdot x - \frac{q\ell^2}{18}$$

$$W = \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell M^2(x) dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{\partial W}{\partial M(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial V_B} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell M(x) \cdot x dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell \left(V_B \cdot x - \frac{q\ell}{3} \cdot x - \frac{q\ell^2}{18} \right) \cdot x dx = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \frac{1}{EI} \left[V_B \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q\ell}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q\ell^2}{18} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^\ell = 0$$

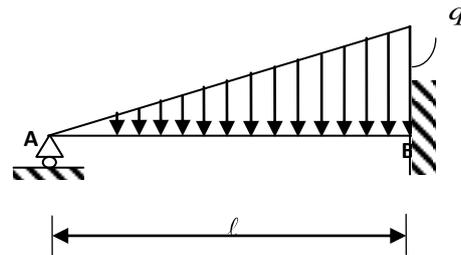
$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \left[V_B \cdot \frac{\ell^3}{3} - \frac{q\ell^4}{9} - \frac{q\ell^4}{36} \right] = 0 \longrightarrow V_B \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{5q\ell^4}{36}$$

$$V_B = \frac{15q\ell}{36}$$

III-4- Exercices:

Exercice 01 :

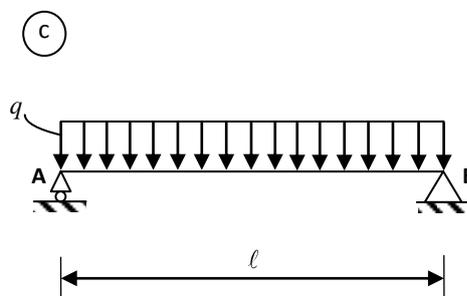
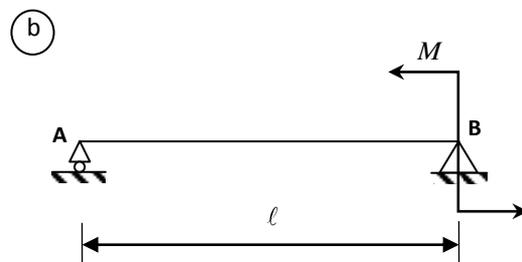
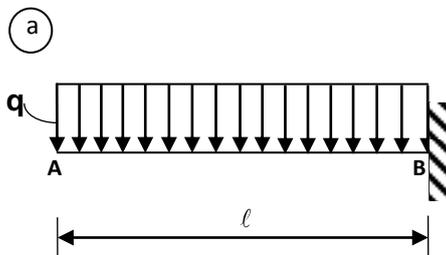
Soit la poutre ci-dessous, calculer les efforts tranchants, les moments fléchissant et tracer leurs diagrammes par la méthode des paramètres initiaux et aussi par le principe de moindre travail de Ménabrea.



Exercice 02 :

Soit les poutres ci-dessous, en utilisant la méthode de la poutre fictive.

1. Calculer le déplacement vertical et la rotation en A dans le cas (a).
2. Calculer la rotation en A et B, et le déplacement vertical maximal dans le cas (b).
3. Calculer le déplacement vertical au milieu de la poutre dans le cas (c).



Calcul des poutres hyperstatiques à plusieurs travées

IV-1- Poutres continues :

Les poutres continues sont des poutres hyperstatique qui reposent sur plusieurs appuis, c'est-à-dire reposent sur plus de deux appuis, et ce type de poutre n'est soumis qu'à des charges verticales, de plus, comme l'ordre d'hyperstaticité de ces poutres est égal au nombre des appuis intermédiaires, où ces appuis sont simples.

Alors que, dans le cas d'un ou deux encastremets d'extrémités, l'ordre d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires plus le nombre des appuis encastrés.

Si nous prenons, par exemple, des poutres continues avec une extrémité encadrée, l'ordre d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires + 01. Pour calculer ces poutres continues, il existe plusieurs méthodes.

IV-2- Méthode des équations des trois moments :

La méthode des équations des trois moments ou la méthode de CLAPEYRON permet de calculer les moments aux appuis intermédiaires de la poutre continue.

Nous considérons la poutre continue représentée à la figure ci-dessous, où nous divisons cette poutre continue en un certain nombre des poutres simples isostatiques, ce qui signifie que toutes les poutres sont placées sur des appuis simples.

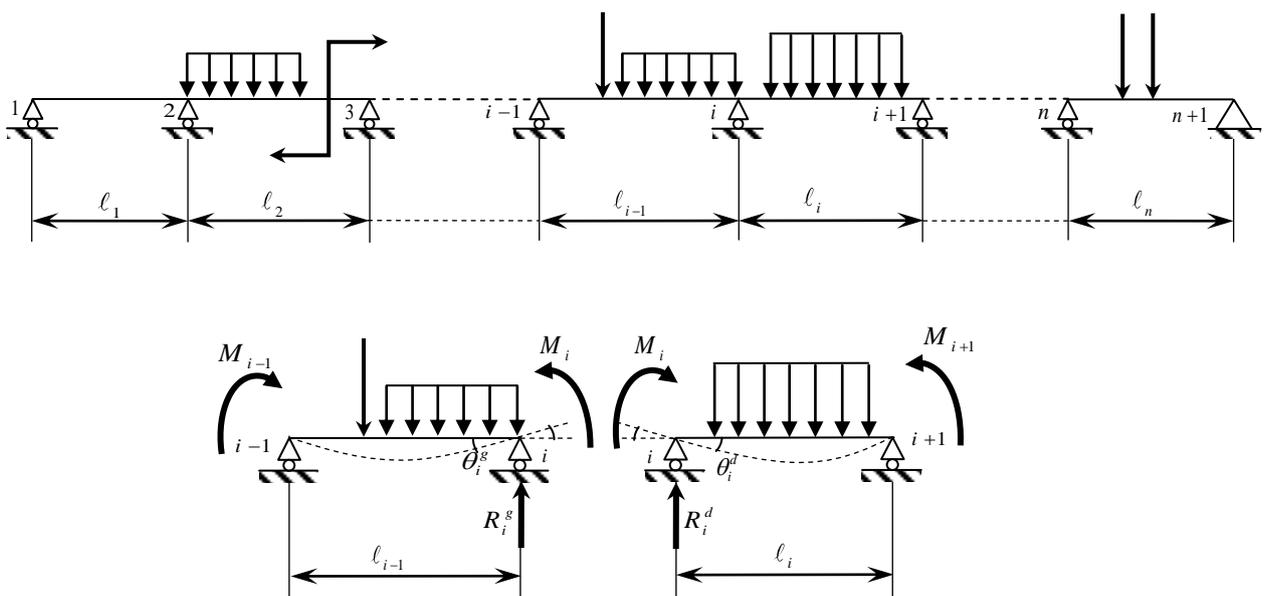


Fig. 30

Donc, nous obtenons (n-1) nombre d'équations comme suit :

$$M_{i-1} \cdot \ell_{i-1} + 2M_i (\ell_{i-1} + \ell_i) + M_{i+1} \cdot \ell_i = -6EI \cdot (\theta_i^g + \theta_i^d) \dots\dots\dots(30)$$

Où :

M_{i-1}, M_i, M_{i+1} : Les trois moments inconnues pour les appuis (i-1, i, i+1)

ℓ_{i-1}, ℓ_i : La longueur des travées dans les poutres adjacentes.

θ_i^g, θ_i^d : Les rotations de l'appui i des poutres gauche et droite. Ces rotations prennent des signes positifs si les poutres tournent dans la même direction indiquée sur la figure précédente (figure 30).

Les valeurs des déplacements θ_i^g et θ_i^d peuvent être calculées par l'une des méthodes précédentes. Certains déplacements dans les poutres isostatiques peuvent également être résumés dans les figures suivantes :

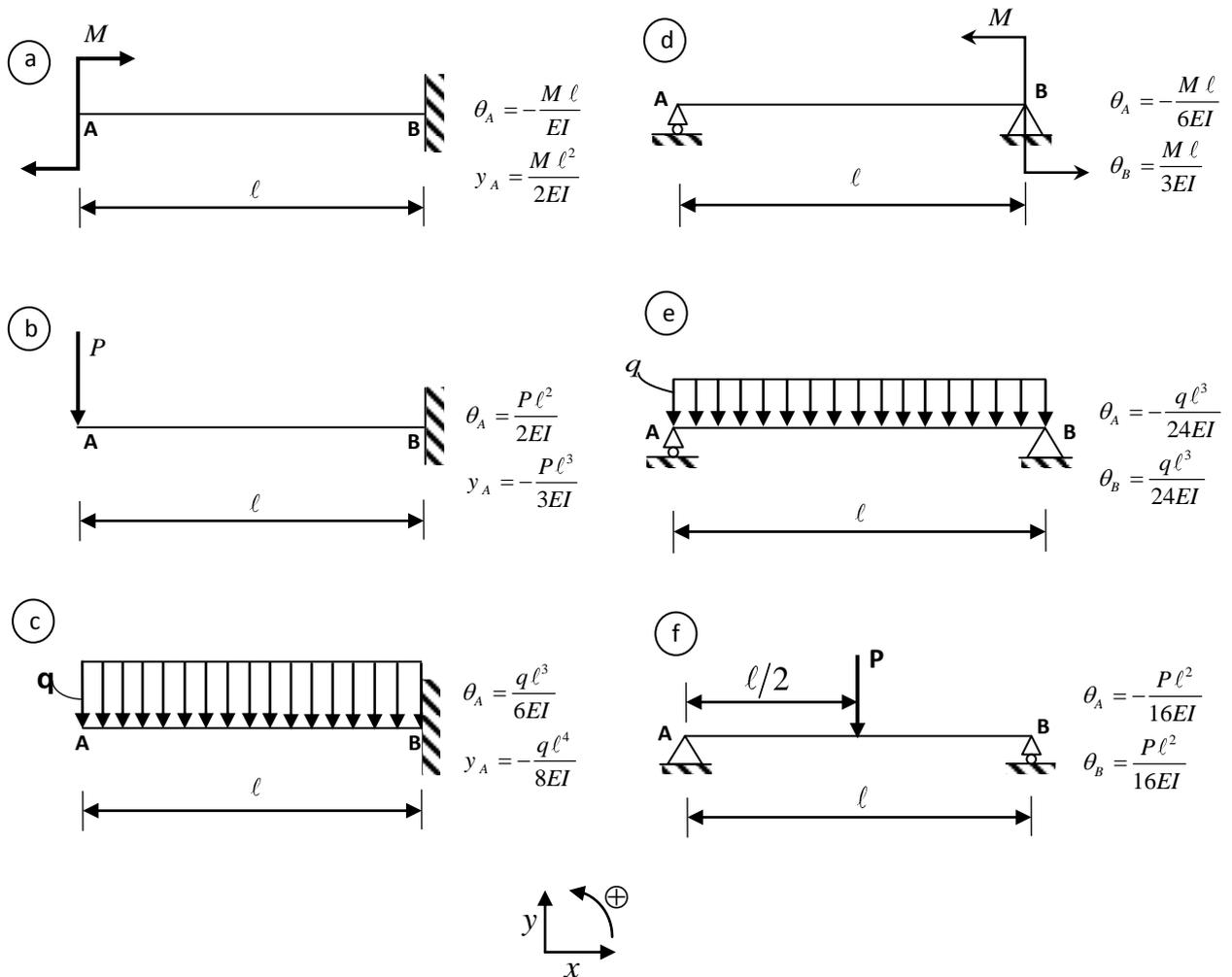


Fig. 31

La formule générale pour la réaction à l'appui (i) est de la forme :

$$R_i = R_i^0 + \frac{M_{i-1} - M_i}{\ell_{i-1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{\ell_i} \dots\dots\dots(31)$$

Où :

R_i : La réaction à l'appui (i).

R_i^0 : La somme des réactions sur l'appui (i) de deux poutres adjacentes.

IV-2-1- Remarques :

1. Pour une poutre continue contenant une extrémité encastree, on remplace l'encastrement par une poutre simple fictive de longueur $\ell = 0$. Donc, l'équation des moments sera comme suit :

$$2M_i \ell_i + M_{i+1} \cdot \ell_i = -6EI \cdot \theta_i^d$$

Exemple :

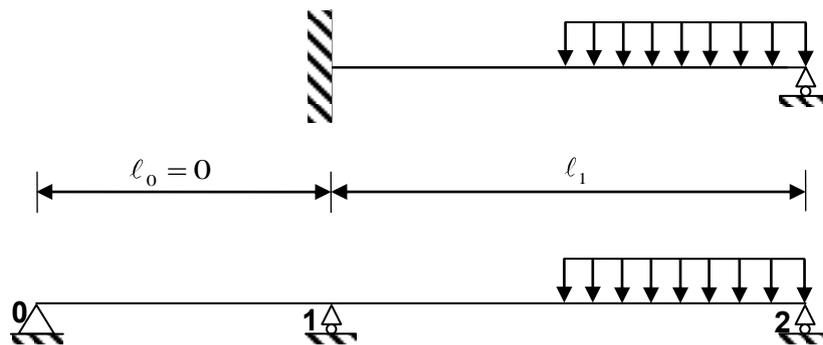


Fig. 32

Et à partir de là, l'équation des moments pour l'exemple s'écrit comme suit :

$$2M_1 \ell_1 + M_2 \cdot \ell_1 = -6EI \cdot \theta_1^d$$

$$2M_1 \ell_1 = -6EI \cdot \theta_1^d$$

2. Si l'on trouve dans la poutre continue une extrémité libre chargée, on remplace la partie chargée avec un moment concentré au niveau d'appui du côté libre et avec un signe correspondant à la charge appliquée.

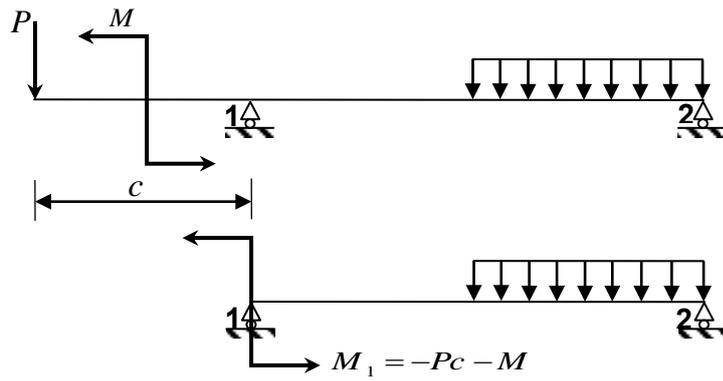


Fig. 33

3. Si l'on trouve un moment concentré au niveau d'appui intermédiaire de la poutre continue, peut être rapporté ce moment à la poutre simple à droite ou à gauche, et il est souhaitable de rapporter le moment à la poutre simple la moins chargée.

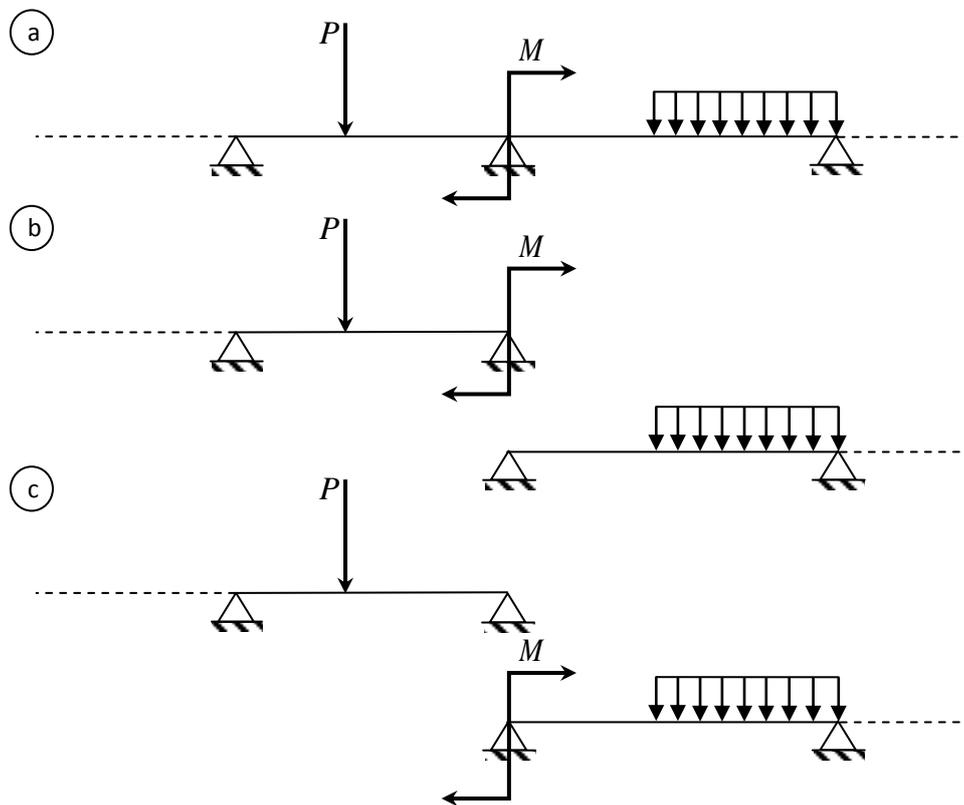


Fig. 34

4. Pour tracer le diagramme de l'efforts tranchant T et du moment fléchissant M des poutres hyperstatiques, en suivant la méthode de superposition.

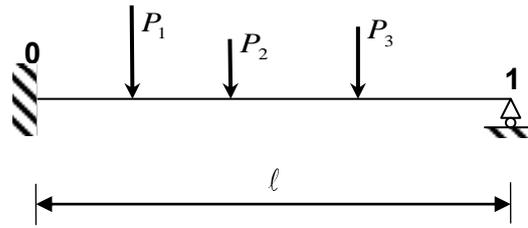


Fig. 35

Par exemple, si nous avons une poutre encastree à une extremité et simplement appuyée à l'autre (figure 35), nous pouvons écrire les équations du moment fléchissant M et de l'efforts tranchant T pour une section à distance x de l'appui gauche, comme suit :

$$M(x) = \mu(x) + M_0\left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_1 \frac{x}{l} \dots\dots\dots(32)$$

$$T(x) = \frac{d\mu(x)}{dx} + \frac{(M_1 - M_0)}{l}$$

Où :

$\mu(x)$: L'équation du moment fléchissant due à la charge de la poutre précédente (figure 35) dans son état simple (Lorsque la poutre est isostatique).

Application :

A l'aide de l'équation des trois moments, Tracer les diagrammes de M et T de la poutre continue ci-dessous.

On donne : $P = 2t$, $M = t.m$, $q = 6t/m$, $c = 1m$, $l_1 = 3m$, $l_2 = 2m$.

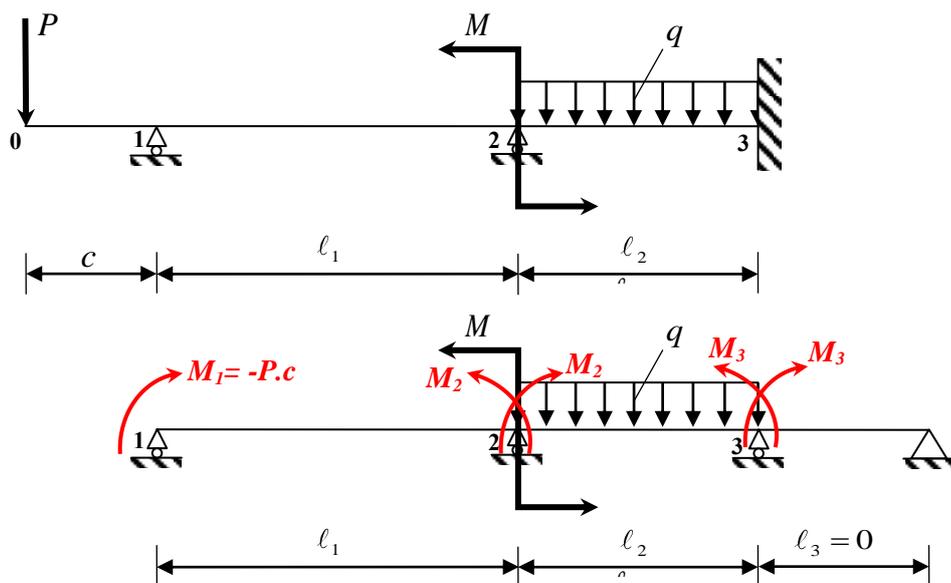


Fig. 36

1. Equations des moments:

Le deuxième appui ($i = 2$) :

$$M_1 \cdot \ell_1 + 2M_2(\ell_1 + \ell_2) + M_3 \cdot \ell_2 = -6EI \cdot (\theta_2^g + \theta_2^d)$$

$$-2 \cdot 3 + 2M_2(3 + 2) + M_3 \cdot 2 = -6EI \cdot (\theta_2^g + \theta_2^d)$$

$$EI \cdot \theta_2^g = \frac{M \ell_1}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4 \text{ t.m}^2$$

$$EI \cdot \theta_2^d = \frac{q \ell_2^3}{24} = \frac{6 \cdot 2^3}{24} = 2 \text{ t.m}^2$$

$$-6 + 10M_2 + 2M_3 = -6(4 + 2)$$

$$10M_2 + 2M_3 = -30$$

Le troisième appui ($i = 3$) :

$$M_2 \cdot \ell_2 + 2M_3(\ell_2 + \ell_3) = -6EI \cdot \theta_3^g$$

$$2M_2 + 4M_3 = -6EI \cdot \theta_3^g$$

$$EI \cdot \theta_2^d = EI \cdot \theta_3^g = 2 \text{ t.m}^2$$

$$2M_2 + 4M_3 = -12$$

$$M_2 + 2M_3 = -6$$

Les équations des moments deviennent:

$$\begin{cases} 10M_2 + 2M_3 = -30 \\ M_2 + 2M_3 = -6 \end{cases}$$

$$\text{D'où } M_2 = -\frac{8}{3} = -2.667 \text{ t.m} ; M_3 = -\frac{5}{3} = -1.667 \text{ t.m}$$

2. Diagrammes de M et T :

La première travée (0→1) :

$$(0 \rightarrow 1): 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$M(x) = -P \cdot x = -2 \cdot x \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow M(0) = 0 \\ x = 1 \rightarrow M(1) = -2 \text{ t.m} \end{array} \right.$$

$$T(x) = -2 \text{ t}$$

La deuxième travée (1→2) :

$$(1 \rightarrow 2): 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$M(x) = \mu(x) + M_1 \left(1 - \frac{x}{\ell_1}\right) + M_2 \frac{x}{\ell_1}$$

$$= \frac{M}{3}x - 2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) - 2.667 \frac{x}{3}$$

$$= \frac{4}{3}x - 2 + \frac{2}{3}x - 2.667 \frac{x}{3}$$

$$M(x) = 1.111x - 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} M(x=0) = -2 \text{ t.m} \\ M(x=3) = 1.333 \text{ t.m} \end{array} \right.$$

$$T(x) = 1.111 \text{ t}$$

La troisième travée (2→3) :

$$(2 \rightarrow 3): 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$M(x) = \mu(x) + M_2 \left(1 - \frac{x}{\ell_2}\right) + M_3 \frac{x}{\ell_2}$$

$$= \frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2} - 2.667 \left(1 - \frac{x}{2}\right) - 1.667 \frac{x}{2}$$

$$= 6x - 3x^2 - 2.667 + 1.3335x - 0.8335x$$

$$M(x) = -3x^2 + 6.5x - 2.667 \quad \left\{ \begin{array}{l} M(x=0) = -2.667 \text{ t.m} \\ M(x=2) = -1.667 \text{ t.m} \end{array} \right.$$

$$T(x) = -6x + 6.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} T(x=0) = 6.5 \text{ t} \\ T(x=2) = -5.5 \text{ t} \end{array} \right.$$

$$T(x) = 0 \rightarrow M_{\max}$$

$$T(x) = -6x + 6.5 = 0 \longrightarrow x = 1.083 \text{ m}$$

$$M_{\max} = M(x = 1.083) = 0.854 \text{ t.m}$$

Les réactions d'appui:

$$R_1 = -T_{10} + T_{12} = -(-2) + 1.111 = 3.111 \text{ t}$$

$$R_2 = -T_{21} + T_{23} = -1.111 + 6.5 = 5.389 \text{ t}$$

$$R_3 = -T_3 = 5.5 \text{ t}$$

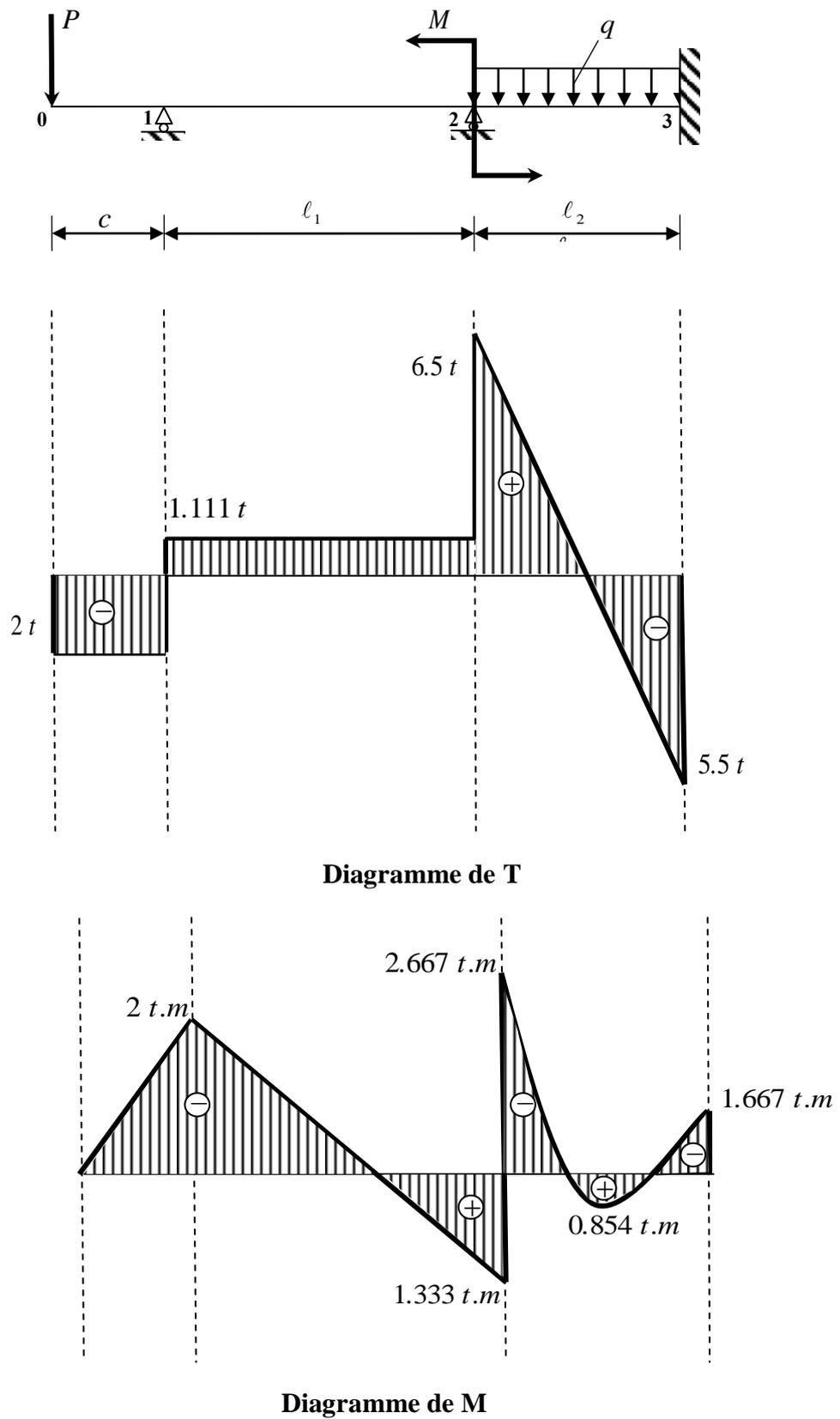


Fig. 37

IV-3- Poutres droites hyperstatiques à une seule travée :

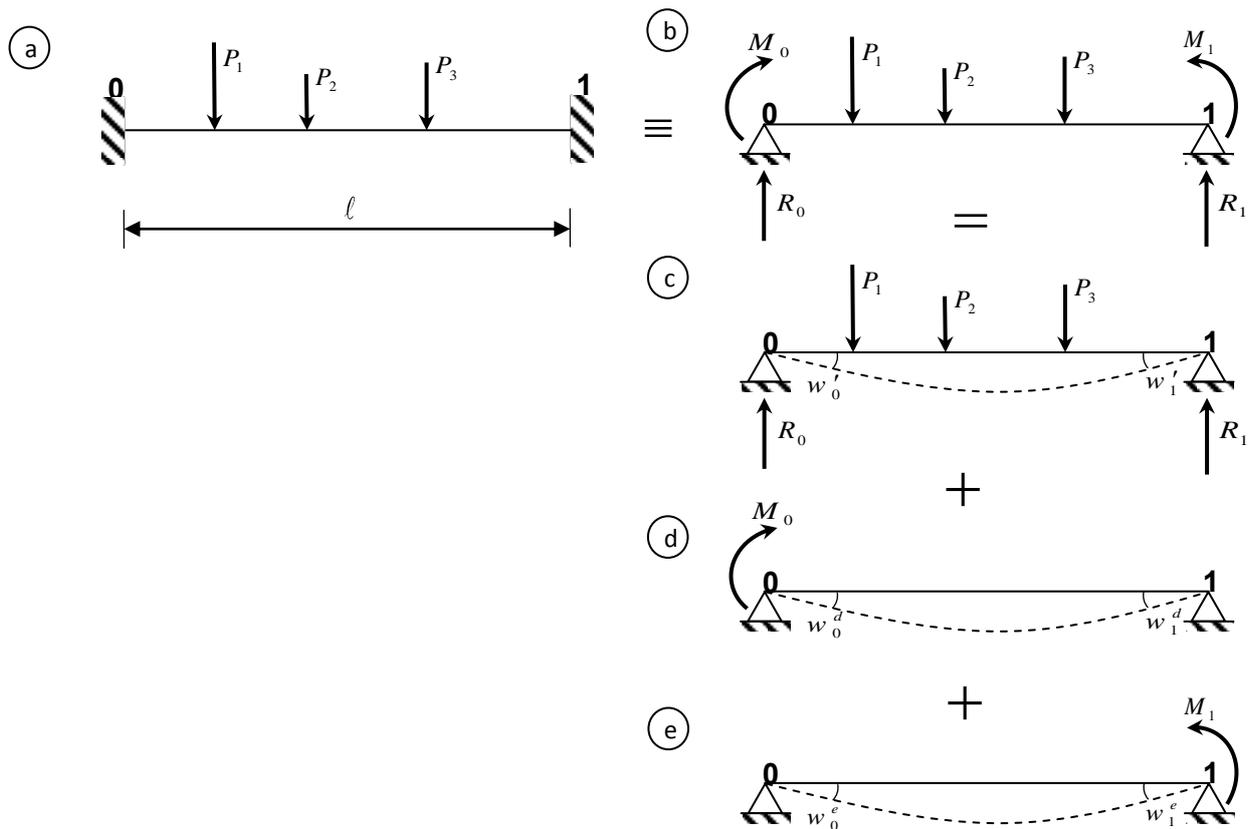


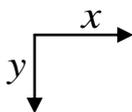
Fig. 38

Donc, à partir du principe de superposition, on trouve :

$$w_0 = w'_0 + w_0^d + w_0^e \dots\dots\dots(33)$$

$$w_1 = w'_1 + w_1^d + w_1^e \dots\dots\dots(34)$$

Puisque les inconnues de la poutre hyperstatique sont M_0 et M_1 , nous étudions la poutre (d) et la poutre (e) en supposant la direction des axes x et y comme suit :



La poutre (d) :

$$R_0 = -\frac{M_0}{l} \text{ et } R_1 = \frac{M_0}{l}$$

$$M(x) = -\frac{M_0}{l}x + M_0 = M_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

On considère pour cette poutre que la quantité EI est constante, l'équation de la déformée s'écrit comme suit :

$$EIy'' = -M(x)$$

$$EIy'' = -M_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

$$EIy' = -M_0 \int \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx = -M_0 \left(x - \frac{x^2}{2\ell} + c_1\right)$$

$$EIy = -M_0 \int \left(x - \frac{x^2}{2\ell} + c_1\right) dx = -M_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\ell} + c_1x + c_2\right)$$

$$x = 0, y = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$x = \ell, y = 0 \rightarrow 0 = -M_0 \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^3}{6\ell} + c_1\ell\right)$$

$$c_1 = -\frac{\ell}{3}$$

À partir de l'équation de y' on trouve :

$$w_0^d = y'_{(x=0)} = \frac{M_0 \cdot \ell}{3EI} \quad \text{et} \quad w_1^d = y'_{(x=\ell)} = -\frac{M_0 \cdot \ell}{6EI}$$

La poutre (e) :

De la même manière on peut trouver que :

$$w_0^e = y'_{(x=0)} = \frac{M_1 \cdot \ell}{6EI} \quad \text{et} \quad w_1^e = y'_{(x=\ell)} = -\frac{M_1 \cdot \ell}{3EI}$$

En substituant dans les équations (33) et (34) on trouve :

$$w_0 = w_0' + a M_0 + b M_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

$$w_1 = w_1' - b M_0 - c M_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(36)$$

Où :

$$a = 2b = c = \frac{\ell}{3EI}$$

a, b et c sont des constantes indépendantes des charges et sont appelées constantes mécaniques. Dans le cas d'une poutre de section variable, ces trois constantes sont écrites comme suit :

$$a = \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \cdot \frac{dx}{E \cdot I(x)} \quad , \quad b = \int_0^\ell \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{dx}{E \cdot I(x)}$$

$$c = \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \cdot \frac{dx}{E \cdot I(x)}$$

IV-4- Poutres droites hyperstatiques à plusieurs travées :

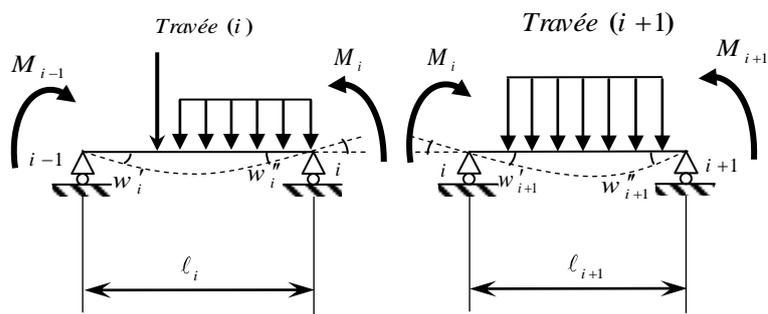


Fig. 39

En substituant dans les équations (35) et (36) on trouve :

$$w_i = w'_{i+1} + a_{i+1} M_i + b_{i+1} M_{i+1} \quad \text{(travée i+1)}$$

$$w_i = w''_i - b_i M_{i-1} - c_i M_i \quad \text{(travée i)}$$

$$w''_i - b_i M_{i-1} - c_i M_i = w'_{i+1} + a_{i+1} M_i + b_{i+1} M_{i+1}$$

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1} M_{i+1} = w''_i - w'_{i+1} \dots\dots\dots(37)$$

Nous observons que l'équation (37) est la même que l'équation des trois moments ou la méthode de CLAPEYRON où :

a_i, b_i et c_i : Les constantes mécaniques de la travée (i).

w''_i et w'_{i+1} : Les rotations de l'appui (i) étant appui de gauche et de ce même appui (i) étant appui de droite respectivement.

IV-5- Méthode des foyers :

IV-5-1- Foyers de la gauche :

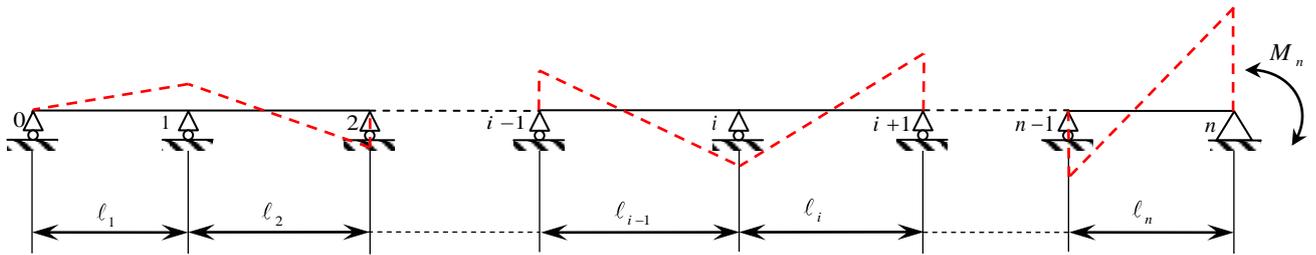


Fig. 40

Nous avons une poutre continue représentée sur la figure ci-dessus (figure 40), cette poutre est formé de n travées, et elle chargée uniquement avec un moment M_n dans la section de l'appui (n) (positive ou négative).

Ainsi, l'équation des trois moments aux appuis est nulle, donc :

$$\begin{aligned}
 \text{appui 1: } (M_0 = 0) & \quad (c_1 + a_2)M_1 + b_2M_2 = 0 \\
 \text{appui 2:} & \quad b_2M_1 + (c_2 + a_3)M_2 + b_3M_3 = 0 \\
 & \quad \vdots \\
 \text{appui } i : & \quad b_iM_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1}M_{i+1} = 0 \\
 & \quad \vdots \\
 \text{appui } n-1: & \quad b_{n-1}M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n)M_{n-1} + b_nM_n = 0
 \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= -\frac{M_{i-1}}{M_i} \quad , \quad \phi_1 = -\frac{M_0}{M_1} \quad , \quad \phi_2 = -\frac{M_1}{M_2} \\
 b_i \frac{M_{i-1}}{M_i} + (c_i + a_{i+1}) \frac{M_i}{M_i} + b_{i+1} \frac{M_{i+1}}{M_i} &= 0 \\
 -b_i \cdot \phi_i + (c_i + a_{i+1}) - \frac{b_{i+1}}{\phi_{i+1}} &= 0 \\
 \phi_{i+1} &= \frac{b_{i+1}}{c_i + a_{i+1} - b_i \cdot \phi_i} \quad \dots\dots\dots(38)
 \end{aligned}$$

Donc, on peut déterminer tous les valeurs de ϕ à partir de celle de ϕ_2 .

Le foyer de gauche F_i de la travée (i) est défini par la relation suivante :

$$\phi_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i} = \frac{i-1}{i} \frac{F_i}{F_i} \dots\dots\dots(39)$$

IV-5-1-1-Remarque :

Les valeurs de ϕ sont limités entre 0 et 1 : $0 < \phi < 1$

IV-5-2- Foyers de la droite :

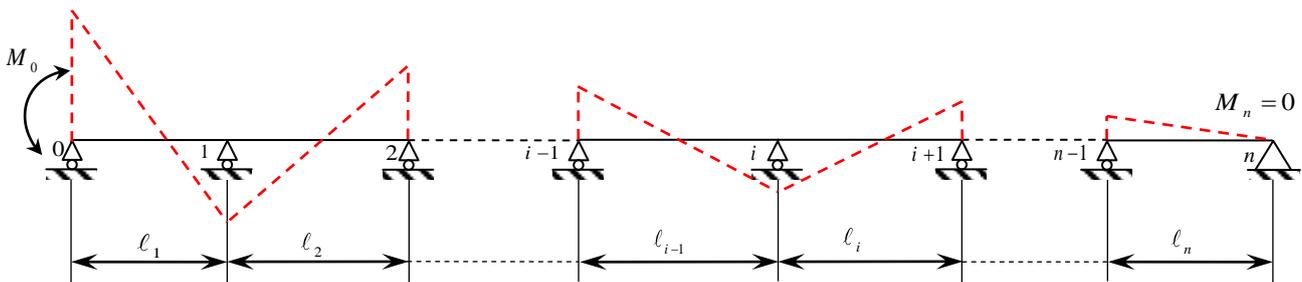


Fig. 41

Prenons la poutre continue représentée sur la figure ci-dessus (figure 41), cette poutre est formé de n travées, et elle est chargée uniquement avec un moment M_0 dans la section de l'appui (0) (positive ou négative).

L'équation des trois moments à l'appui (i) est comme suit :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = 0$$

Posons:

$$\begin{aligned} b_i \frac{M_{i-1}}{M_i} + (c_i + a_{i+1}) \frac{M_i}{M_i} + b_{i+1} \frac{M_{i+1}}{M_i} &= 0 \\ -\frac{b_i}{\phi'_i} + (c_i + a_{i+1}) - b_{i+1} \cdot \phi'_{i+1} &= 0 \\ \phi'_i &= \frac{b_i}{c_i + a_{i+1} - b_{i+1} \cdot \phi'_{i+1}} \dots\dots\dots(40) \\ \phi'_i &= -\frac{M_i}{M_{i-1}} \quad , \quad \phi'_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}} \end{aligned}$$

Le foyer de la droite F'_i de la travée (i) est défini par la relation suivante :

$$\phi'_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}} = \frac{i \overline{F'_i}}{i-1 \overline{F'_i}} \dots\dots\dots(41)$$

Pour déterminer les moments aux différents appuis, on considère la poutre continue uniquement chargée à la travée (i), comme indiqué sur la figure ci-dessous :

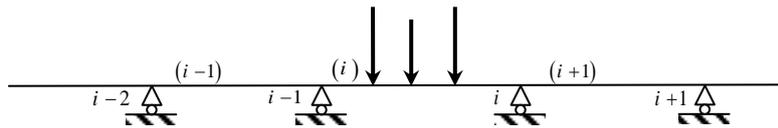


Fig. 42

On écrit l'équation des trois moments aux appuis ($i-1$) et (i):

$$b_{i-1}M_{i-2} + (c_{i-1} + a_i)M_{i-1} + b_iM_i = 0 - w'_i$$

$$b_iM_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1}M_{i+1} = w''_i - 0$$

Il n'y a pas de charge dans la poutre continue de l'appui (0) à l'appui ($i-1$) et de l'appui (i) à l'appui (n), donc on déduit ce qui suit :

$$\frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} = -\phi_{i-1} \quad M_{i-2} = -\phi_{i-1} M_{i-1}$$

$$\frac{M_{i+1}}{M_i} = -\phi'_{i+1} \quad M_{i+1} = -\phi'_{i+1} M_i$$

À partir de là, nous pouvons écrire les équations des trois moments aux appuis ($i-1$) et (i) comme suit :

$$\begin{cases} (-b_{i-1}\phi_{i-1} + c_{i-1} + a_i)M_{i-1} + b_iM_i = -w'_i \\ b_iM_{i-1} + (c_i + a_{i+1} - b_{i+1}\phi'_{i+1})M_i = w''_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_iM_{i-1}/\phi_i + b_iM_i = -w'_i \\ b_iM_{i-1} + b_iM_i/\phi'_i = w''_i \end{cases}$$

On obtient un système de deux équations à deux inconnues M_{i-1} et M_i . Après résolution du système, on trouve :

$$M_{i-1} = -\frac{1}{b_i} \cdot \frac{\frac{w_i'}{\phi_i'} + w_i''}{\frac{1}{\phi_i \cdot \phi_i'} - 1} \dots\dots\dots(42)$$

$$M_i = +\frac{1}{b_i} \cdot \frac{w_i' + \frac{w_i''}{\phi_i}}{\frac{1}{\phi_i \cdot \phi_i'} - 1} \dots\dots\dots(43)$$

Ensuite, on peut calculer le reste des moments aux appuis à droite et à gauche de l'appui chargé comme suit :

$$\begin{array}{ll} M_{i-2} = -\phi_{i-1} \cdot M_{i-1} & M_{i+1} = -\phi'_{i+1} \cdot M_i \\ M_{i-3} = -\phi_{i-2} \cdot M_{i-2} & M_{i+2} = -\phi_{i+2} \cdot M_{i+1} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

IV-5-2-1- Remarque :

Dans le cas où d'autres travées sont chargées. le moment final à chaque appui se déduit par la superposition de tous les moment résultant de chaque chargement appliqué.

Application :

Tracer le diagramme de moment fléchissant M de la poutre continue ci-dessous.

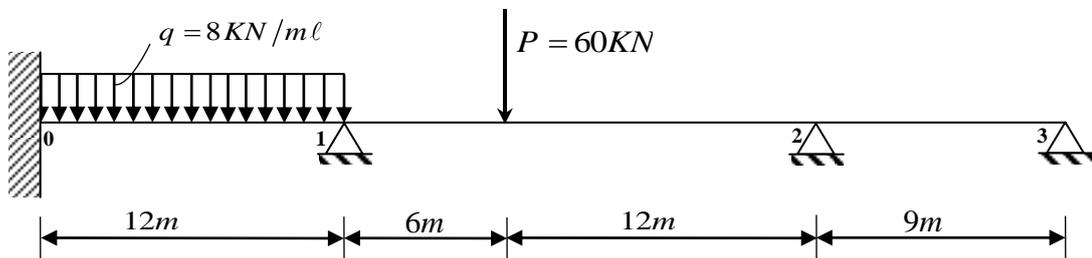


Fig. 43

Détermination des constantes mécaniques :

$$a_i = c_i = 2b_i = \frac{\ell_i}{3EI}$$

$$\text{travée 1: } a_1 = c_1 = \frac{12}{3EI} = \frac{4}{EI} \quad \text{et } b_1 = \frac{2}{EI}$$

$$\text{travée 2: } a_2 = c_2 = \frac{18}{3EI} = \frac{6}{EI} \quad \text{et } b_2 = \frac{3}{EI}$$

$$\text{travée 3: } a_3 = c_3 = \frac{9}{3EI} = \frac{3}{EI} \quad \text{et } b_3 = \frac{3}{2EI}$$

Poutres de références isostatiques :

travée 1:

$$w_1' = \frac{q\ell^3}{24EI} = \frac{8.12^3}{24EI} = \frac{576}{EI}$$

$$w_1'' = -\frac{q\ell^3}{24EI} = -\frac{576}{EI}$$

$$\mu(x) = \frac{q\ell}{2}x - q\frac{x^2}{2} = -4x^2 + 48x$$

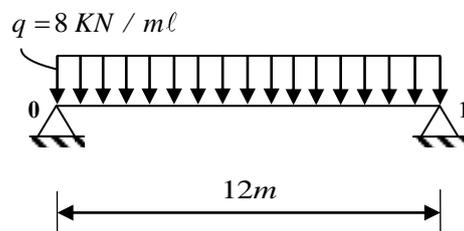


Fig.44

travée 2:

$$w_2' = \frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI} = \frac{60.6.12.(18+12)}{108EI} = \frac{1200}{EI}$$

$$w_2'' = -\frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI} = -\frac{60.6.12(18+6)}{108EI} = -\frac{960}{EI}$$

$$0 \leq x \leq 6: \mu(x) = \frac{Pb}{\ell}x = 40x$$

$$6 \leq x \leq 18: \mu(x) = \frac{Pb}{\ell}x - P(x-a) = 40x - 60(x-6)$$

$$\mu(x) = 360 - 20x$$

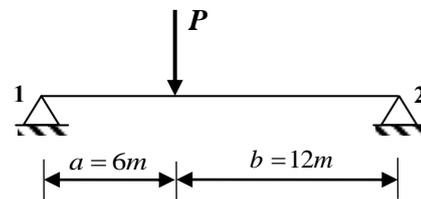


Fig.45

Recherche de la position des foyers de gauche et de droite:

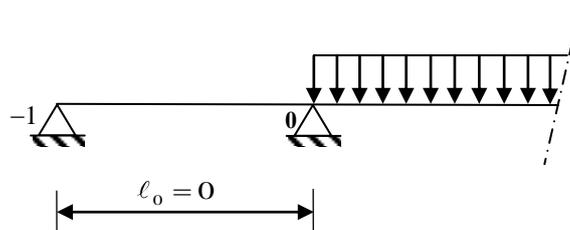


Fig.46

Calcul de ϕ_i :

$$\phi_1 = \frac{b_1}{c_0 + a_1 - b_0 \phi_0} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\phi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2 - b_1 \phi_1} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$\phi_3 = \frac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2 \phi_2} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

Calcul de ϕ'_i :

$$\phi'_3 = 0$$

$$\phi'_2 = \frac{b_2}{c_2 + a_3 - b_3 \phi'_3} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$\phi'_1 = \frac{b_1}{c_1 + a_2 - b_2 \phi'_2} = \frac{2}{9} = 0.222$$

Calcul des moments sur appuis pour la charge uniformément répartie dans la première travée :

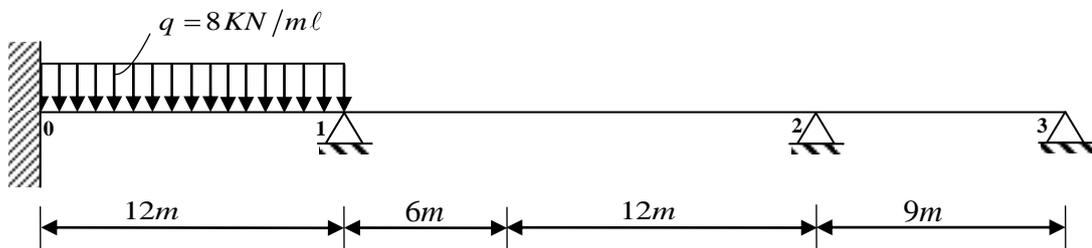


Fig.47

$$M_0 = -\frac{1}{b_1} \cdot \frac{\frac{w_1'}{\phi_1} + w_1''}{\frac{1}{\phi_1 \phi_1} - 1} = -\frac{1}{2/EI} \cdot \frac{\frac{576/EI}{0.222} - 576/EI}{\frac{1}{(0.5)(0.222)} - 1} = -126.02 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_1 = \frac{1}{b_1} \cdot \frac{w_1' + \frac{w_1''}{\phi_1}}{\frac{1}{\phi_1 \phi_1} - 1} = \frac{1}{2/EI} \cdot \frac{576/EI - \frac{576/EI}{0.5}}{\frac{1}{(0.5)(0.222)} - 1} = -35.96 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = -\phi'_2 M_1 = -(0.333)(-35.96) = 11.97 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Calcul des moments sur appuis pour la charge concentrée de la deuxième travée :

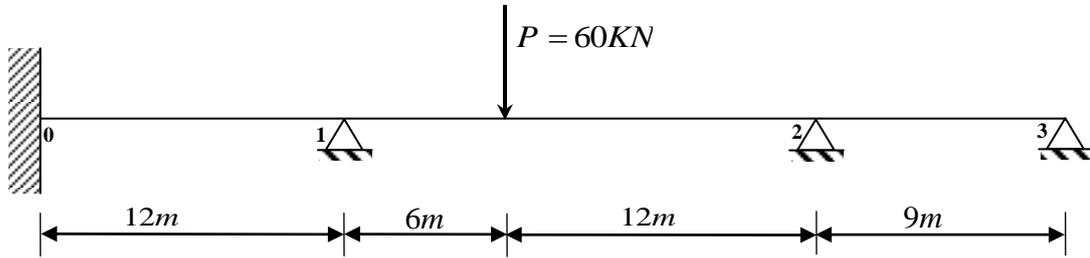


Fig.48

$$M_1 = -\frac{1}{b_2} \cdot \frac{\frac{w_2'}{\phi_2'} + w_2''}{\frac{1}{\phi_2 \cdot \phi_2'} - 1} = -\frac{1}{3/EI} \cdot \frac{\frac{1200/EI}{0.333} - 960/EI}{\frac{1}{(0.333) \cdot (0.333)} - 1} = -109.90 \text{ KN.m}$$

$$M_2 = \frac{1}{b_2} \cdot \frac{w_2' + \frac{w_2''}{\phi_2}}{\frac{1}{\phi_2 \cdot \phi_2'} - 1} = \frac{1}{3/EI} \cdot \frac{1200/EI - \frac{960/EI}{0.333}}{\frac{1}{(0.333) \cdot (0.333)} - 1} = -69.96 \text{ KN.m}$$

$$M_0 = -\phi_1 \cdot M_1 = -(0.5) \cdot (-109.90) = 54.95 \text{ KN.m}$$

$$M_3 = 0$$

À partir du principe de superposition, on obtient les moments sur appuis dus au chargement total :

$$M_0 = -126.02 + 54.95 = -71.07 \text{ KN.m}$$

$$M_1 = -35.96 - 109.90 = -145.86 \text{ KN.m}$$

$$M_2 = 11.97 - 69.96 = -57.99 \text{ KN.m}$$

$$M_3 = 0$$

Equations du moment fléchissant de la poutre continue :

$$\text{travée 1: } M(x) = \mu(x) + M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

$$M(x) = -4x^2 + 48x - 71.07 \left(1 - \frac{x}{12}\right) - 145.86 \frac{x}{12}$$

$$M_{\max} = M(x = 5.22) = 37.96 \text{ KN.m}$$

travée 2:

$$0 \leq x \leq 6m : M(x) = 40x - 145.86\left(1 - \frac{x}{18}\right) - 57.99 \frac{x}{18}$$

$$M(x) \begin{cases} x = 0 \rightarrow M(0) = -145.86 \text{ KN.m} \\ x = 6 \rightarrow M(6) = 123.43 \text{ KN.m} \end{cases}$$

$$6 \leq x \leq 18m : M(x) = 360 - 20x - 145.86\left(1 - \frac{x}{18}\right) - 57.99 \frac{x}{18}$$

$$M(x) \begin{cases} x = 6 \rightarrow M(6) = 123.43 \text{ KN.m} \\ x = 18 \rightarrow M(18) = -57.99 \text{ KN.m} \end{cases}$$

$$\text{travée 3: } M(x) = -57.99\left(1 - \frac{x}{9}\right)$$

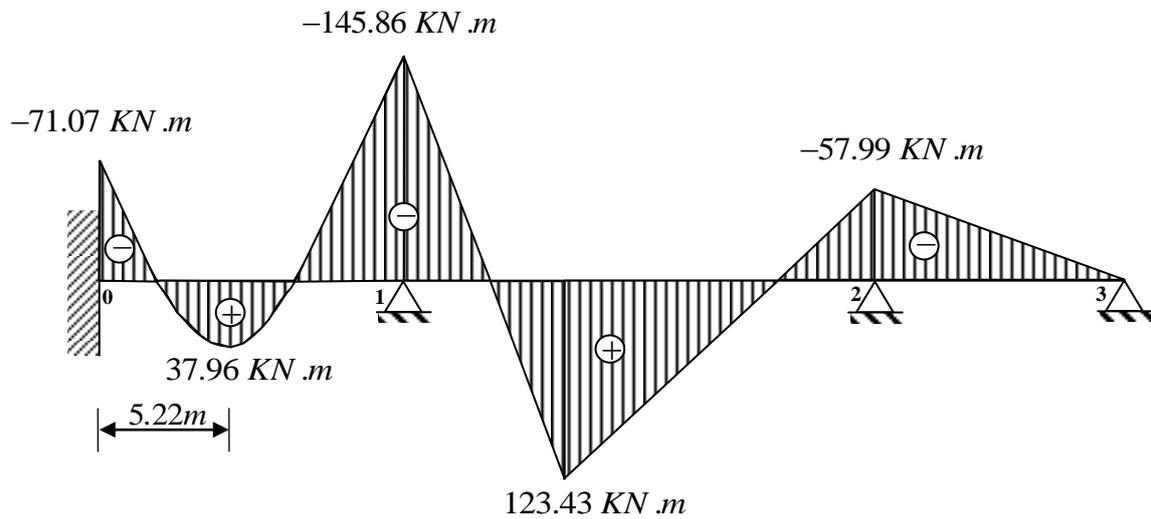
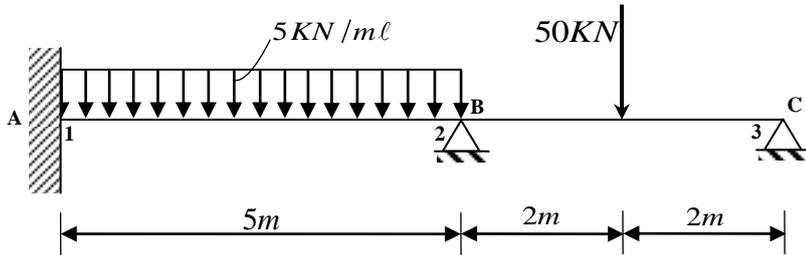


Diagramme de M

Fig.49

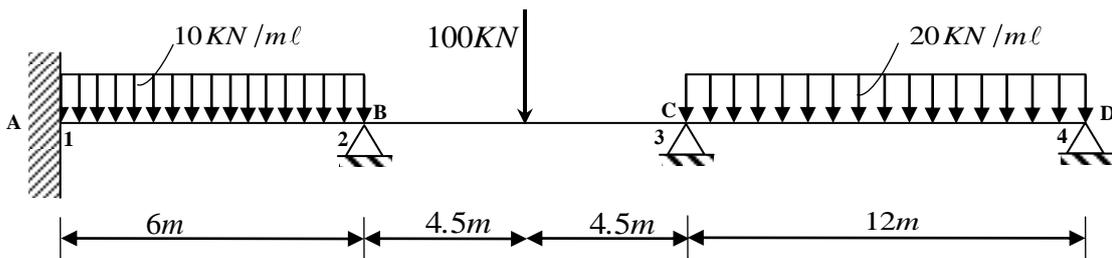
IV-6- Exercices:

Exercice 01 :



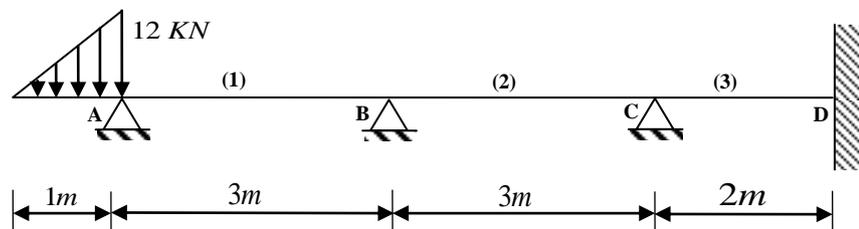
A l'aide de l'équation des trois moments, Tracer les diagrammes de M et T de la poutre continue représentée par la figure ci-dessus.

Exercice 02 :



En utilisant la méthode de CLAPEYRON, Tracer le diagramme de l'efforts tranchant T et du moment fléchissant M de la poutre continue représentée par la figure ci-dessus.

Exercice 03 :



A l'aide de la méthode des foyers, construire les diagrammes du moment fléchissant M et de l'efforts tranchant T de la poutre continue ci-dessus.

1. Zakaria, M.O., 1986. *Analyse des structures: Théorie*. Office des publications universitaires.
2. Zakaria, M.O., 1989. *Analyse des structures: Applications*. Office des publications universitaires.
3. Miroljubov, I.N., Engalytchev, S. and Serguievski, N., 1977. *Résistance des matériaux: manuel de résolution des problèmes*. Éditions Mir.
4. Bourahla, N., 2005. *Résistance des matériaux de base*. Université Saad Dahlab Blida, Edition GEOTEC.
5. Pluinage, G., Sapunov, V., 2006. *Resistance des materiaux*. éditions cépaduès.
6. Delaplace, A., Gatuingt, F., & Ragueneau, F., 2008. *Aide-mémoire Mécanique des structures : IUT-Licence-Master*. Dunod.
7. Khalfallah, S., 2018. *Structural Analysis 2: Statically Indeterminate Structures*. John Wiley & Sons.