جامعة الشهيد حمـة لخضر **كلية العلوم الدقيقة**

السنة الثانية ماستر رياضيات ***قسم الرياضيات***

تحليــل مركـب

حلول السلسلة الخامسه للأعمال الموجهه **Solutions TD 5 en Analyse complexe** **(02/01/2021)** **د.عبد الحميد رحومه**

التمرين الأول لنعرف دوال فيرشتراس على القرص الوحده $D(0,1)=\{z,|z|<1\}$ من $\mathbb{C}$ من الشكل : $E_0(z)=1-z$ و $E_p(z)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+......\frac{z^p}{p}\right)$

وهي تحقق الميزة الهامه الآتيه : $|1-E_p(z)|\le|z|^{p+1}$: $\forall p=0,1,2,3....,\ \forall z\in D(0,1)=\{z,|z|<1\}$

البرهان : $\forall p=1,2,3....$ لدينا $-E'_p(z)=z^p\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+......\frac{z^p}{p}\right)$ الدوال المشتقة $-E'_p(z)$ بل الصفر كجذر للرتبة p فنشور سلسلة قوى لها ذات

معاملات سالبه حقيقيه ومنه : $1-E_p(z)=-\int_0^z E'_p(w)dw$ ومنه $1-E_p(z)$ تقبل $z=0$ كصفر للرتبة $p+1$ ومنه لما $|z|\le1$: فان : $\varphi(z)=\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$

لننشر $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ بحيث $a_n\ge0, n=0,1,2....$ حسب نظرية سلاسل القوى : $|z|\le1$ لما $|\varphi(z)|\le\varphi(1), \Leftarrow |1-E_p(z)|\le|z|^{p+1}$.

مما يثبت صحة الخاصية.

لنثبت ما يلي : $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بحث $z_n\neq0, n=0,1,2.......$ وبحيث أن $|z_n|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ لنعتبر $\{p_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية أعداد طبيعية

غير سالبة بحيث : لكل $r>0$ توجد متتالية $\{r_n\}_{n=0,1,2.......}$ من الأعداد الموجبة (مثلا $\{|z_n|\}_{n=0,1,2.......}$) بحيث شرط فيرشتراس محقق وهو : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}<\infty$

فان مفكوك **فيرشتراس** $p(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ هو دالة صحيحة ولها اصفار المجموعه $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ من $\mathbb{C}$ ولا يقبل أي أصفار أخرى غير ذلك من $\mathbb{C}$.في حالة

تكرارية الجذر α, m مرة فان α هو جذر لـ $p(z)$ للرتبة m.

البرهان : نستخدم عادة المتراصات $|z|\le r$ من $\mathbb{C}$ كما حدث في اثبات تقارب جداء **بلاشك** لاثبات تقارب مفكوك **فيرشتراس.** $\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|\le\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1}\le\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$

وحيث أن $0\le\frac{r}{r_n}\le1$ ومنه السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}<\infty$ مما يستلزم تقارب السلسلة : $\sum_{n=0}^{\infty}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ السلسلة متقاربة مطلقا على كل متراص $|z|\le r$

من $\mathbb{C}$ وبالتالي الجداء اللامنته **لفيرشتراس** $p(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ متقارب مطلقا على **كل متراص** $|z|\le r$ **من $\mathbb{C}$**. يمكن اثبات من جديد أن أثبت من جديد

نظرية **أويلر** : $\forall z\in\mathbb{C}$ فان: $\sin(\pi.z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$. بالفعل $\exp z=Lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{z}{2k}\right)^{2k}$ ومنه

$\sin z=\frac{1}{2i}(\exp(iz)-\exp(-iz))=Lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2i)^k}\left(\left(1+i\frac{z}{2k}\right)^{2k}+\left(1-i\frac{z}{2k}\right)^{2k}\right)$ باستخدام الجذور $2k-i\grave{e}me$ أي

$\left(1+i\frac{z}{2k}\right)^{2k}+\left(1-i\frac{z}{2k}\right)^{2k}=0\Leftrightarrow z_k=2k\tan\left(\frac{n\pi}{2k}\right),-(k-1)\le n\le k-1$ وحيث أن $\frac{d}{dz}\left[\left(1+i\frac{z}{2k}\right)^{2k}+\left(1-i\frac{z}{2k}\right)^{2k}\right]_{z=0}=1$

ومنه

$$\sin z = z\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k-1}\left(1-\left(\frac{z}{2k\tan\left(\frac{n\pi}{2k}\right)}\right)^2\right)$$

وبالتالي $\sin(\pi.z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

بطريقة ثانية وأسهل من الأولى وهي باختصار حسب السلسلة 04 التمرين السادس أو دستور ميثاق لوفلر انظر الدرس نشورميثاق لوفلر فانه لما $G(z)=\frac{\sin(\pi.z)}{z}, P(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ فان $\frac{G'(z)}{G(z)}=\pi\cot an(\pi z), \frac{P'(z)}{P(z)}=(\log P(z))'=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$ وبالتالي

$\left(\frac{G(z)}{P(z)}\right)'=0=\frac{G(z)}{P(z)}\left(\frac{G'(z)}{G(z)}-\frac{P'(z)}{P(z)}\right)\Rightarrow P(z)=cG(z)\Rightarrow P(0)=cG(0)=1\Rightarrow \frac{\sin(\pi.z)}{z}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

التمرين الثاني

$\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بحث $z_n\neq 0, n=0,1,2.......$ وبحيث أن $|z_n|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ و $|z_1|<|z_2|<|z_3|<...<|z_n|..........$

لنعتبر f دالة صحيحة والتي أصفارها البسيطة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n..........$ فان : $f(z)=f(0)\exp(\kappa.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}\right)$

بحيث : $\kappa=\frac{f'(0)}{f(0)}$ لما : $f(0)=1$ فان : $f(z)=\exp(\kappa.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}\right)$

لنعتبر f دالة صحيحة والتي أصفاره المكررة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n..........$ بتكراريات $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, ... \mu_n..........$ فان :

$$f(z)=f(0)\exp(g(z))\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{z_n^2}+.......+\frac{1}{m-1}\frac{z^{m-1}}{z_n^{m-1}}\right)^{\mu_n}$$

بحيث أن : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^m}<\infty$.من جهة اخرى في حالة : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^3}<\infty$ فان صيغة فيرشتراس تصبح من الشكل :

$$f(z)=f(0)\exp(g(z))\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{z_n^2}\right)^{\mu_n}$$

بتطبيق النظرية أعلاه يمكن اثبات أن $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ متقرب بحيث $f(0)=1$.الأصفار هي $z_n=-n$ لكل $n=1,2.......$.

التمرين الثالث (دستور جونسون) اولا لما : $C(z_0,R)$ حافة القرص المفتوح $D(z_0,R)$ و $h=u+iv$ هولومورفية $C(z_0,r)\subset C(z_0,R)$ نطبق دستور كوشي $h(z_0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}\frac{h(t)}{t-z_0}dt,$ ونضع $t=z_0+re^{i\theta}$ فان $dt=irre^{i\theta}d\theta$ و $0\leq\theta\leq 2\pi \Rightarrow h(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(z_0+re^{i\theta})d\theta$ فالجزء الحقيقي أيضا يحقق $\operatorname{Re}h(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}h(z_0+re^{i\theta})d\theta$ تثبت لاحقا.

لنعتبر f دالة صحيحة والتي أصفاره المكررة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n$ بسيطة أو أصفاره المكررة هي $w_1, w_2, w_3, w_4, ... w_m$ بتكراريات $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, ... \mu_m..........$ فانه اولا لما : $C(z_0,R)$ حافة القرص المفتوح $D(z_0,R)$ و $h=u+iv$ هولومورفية $C(z_0,r)\subset C(z_0,R)$ و f مستمرة على $\Omega\supset D(z_0,r)\cup C(z_0,r)$ و $f(0)\neq 0$ و $f|_{C(z_0,R)}\neq 0$ فان : $\log|f(0)|=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{|z_k|}{R}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log|f(\operatorname{Re}^{i\theta})|d\theta$ بالفعل.

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2).....(z-z_n)}=\frac{f(z)}{(z-w_1)^{\mu_1}(z-w_2)^{\mu_2}.....(z-w_w)^{\mu_m}}$$

معرفة وهولومورفيه عدا $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n$ أو عدا $w_1, w_2, w_3, w_4, ... w_m$. ومنه $g|_{C(z_0,R)\cup D(z_0,R)}\neq 0$ ومنه $\int_0^{2\pi}Log|g(\operatorname{Re}^{i\theta})|d\theta=0$ باخذ اللوغاريتم للطرفين نتحصل على النتيجة $\log|f(0)|=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{|z_k|}{R}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log|f(\operatorname{Re}^{i\theta})|d\theta$.

ملاحظة $\log|g(0)|=0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log|g(\operatorname{Re}^{i\theta})|d\theta$ و أيضا $g(z)=\exp(h(z))$ فان $|g(z)|=\exp(\operatorname{Re}h(z))$ ومنه $\operatorname{Re}h(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}h(z_0+re^{i\theta})d\theta$

مثلا $f(z)=z-w$ تحقق $f(0)=-w$ ومنه $\log|w|=\log\frac{|w|}{R}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log\left|\mathrm{Re}^{i\theta}-w\right|d\theta$.

التمرين الرابع . الدالة جاما Fonction Gamma من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\,z>0\}$ نعرف الدالة جاما كما يلي: $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ نتحقق من ذلك.

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty t^z e^{-t}dt=-\lim_{t\to\infty}t^z e^{-t}+z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=z\Gamma(z)$$

ومنه نستنتج $\Gamma(1)=1$ و $\Gamma(n+1)=n!$ وكذلك $\Gamma(z+2)=(z+1)z\Gamma(z)$ وايضا $\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)(z+n-2)......(z+1)z\Gamma(z)$

. أصفارالدالة $\Gamma(z)$ بسيطة وهي : $0,-1,-2,-3,......-n,......$ تحقق الشروط اعلاه وصيغة فيرشتراس : $\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$

مما يستلزم ان : $\frac{1}{\Gamma(z)}=z\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\,z>0\}$ بحيث : $\Gamma'(0)=\gamma=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n$

يسمى ثابت **أويلر**.

التمرين الخامس لنبرهن أن من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\,z>0\}$ نعرف الدالة جاما كما يلي : : $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ تحقق أيضا $\Gamma(m)=2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx$

وبالتالي $\Gamma(m)\Gamma(1-m)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{-2m+1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\,z>0\}$ ومنه : $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ و $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ وأيضا

$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$. ثم أثبت الحقائق التالية : $\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}$ وكذلك $\prod_{k=1}^{2m}\Gamma\left(\frac{k}{2m+1}\right)=\frac{(2\pi)^m}{\sqrt{2m+1}}$.

التمرين الساس اعتمادا على الصيغة: $\frac{1}{\Gamma(z)}=z\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\,z>0\}$, $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)$,

بالفعل $\Gamma(z+1)=\int_0^\infty t^z e^{-t}dt=-\lim_{t\to\infty}t^z e^{-t}+z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=z\Gamma(z)$ لدينا من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\,z>0\}$. فان

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)(z+n-2)......(z+1)z\Gamma(z)\ .$$

يستلزم : $\frac{1}{\Gamma(z+n+1)}(z+1)......(z+n-2)(z+n-1)(z+n)=\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ ومنه جذور $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ هي بالضبط $0,-1,-2,-3,......-n,......$ وهي تحقق

شروط التباعد ل**فيرشتراس**.نطبق نظرية **فيرشتراس** لدينا : $\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{z}{\Gamma(z+1)}$

لحساب $\Gamma'(0)$ نستخدم الدستور (125) باعتبار $z=1$ بالفعل : $\frac{1}{\Gamma(2)}=1=\exp(\gamma)\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{1}{n}\right)\exp\left(-\frac{1}{n}\right)$

لوغاريتم الطرفين يستلزم أن : $\Gamma'(0)=\gamma=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n$.

$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)$, ومنه: $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(z+n)^2}$ وأيضا : $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right)=2.\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$ ومنه :

$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$. وأيضا $\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mz)$.

لنعرف التكامل بيتا Beta معرف كما يلي : $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ بحيث $\mathrm{Re}\,p>0,\mathrm{Re}\,q>0$ يحقق $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ بالفعل

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta d\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$ و $\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{1+t}dt=B(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

ويمكن استنباط أن : $\int_0^4 t^{\frac{3}{2}}\left(16-t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{64}{21}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2$.

لنثبت صحة العلاقتين تحقق أيضا $\Gamma(m)=2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx$ وبالتالي $\Gamma(m)\Gamma(1-m)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{-2m+1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

نضع $t=x^2$ فان :

$\Gamma(m)=\int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt=2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx$ من أجل $\mathrm{Re}\, m>0\}$.

لاثبات العلاقة الثانيه لدينا :

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)=4\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx\int_0^\infty y^{-2m+1}e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{-2m+1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

نستخد الاحداثيات القطبيه : $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, dxdxy=rdrd\theta$

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty(\tan g\theta)^{-2m+1}re^{-r^2}drd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan g\theta)^{-2m+1}d\vartheta=\frac{\pi}{\sin m\pi}$$

من أجل $\mathrm{Re}\, m>0\}$ نتحول الى العلاقة : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\pi$

بطريقة ثانية : $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty re^{-r^2}drd\theta=\pi$ نتحول الى العلاقة : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

مما يستلزم أن : $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}.$.

يمكن الرجوع الى احدى الدساتير السابقه للتأكد من صحة الدستورين : $\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m.}}$ و $\prod_{k=1}^{2m}\Gamma\left(\frac{k}{2m+1}\right)=\frac{(2\pi)^m}{\sqrt{2m+1}}$

بالفعل لدينا $\Gamma(m)\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\sin m\pi}$ لنعتبر الجداء المساعد **الجـــامي** :

$$\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)=\Gamma\left(1-\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

ومنه :

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right)^2=\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)\right)^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}\ldots\ldots\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{(m-1)\pi}{m}}$$

مما يستلزم صحة المساواة : $\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}$.

من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z>0\}$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)$$

ومنه

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(z+n)^2}$$

وأيضا : $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right)=2.\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$ ومنه : $\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$

لدينا حسب الدستور (126) :

$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ باشتقاق الطرفين : $-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{z}+\gamma.+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{z}{n}}-\frac{1}{n}\right)$

من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z>0\}$ مما يستلزم أن المشتق اللوغاريتمي للدالة جاما يكتب على النمط التالي :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{z}\right).+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z+1}\right)++\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{z+3}\right)+\ldots..$$

أو جمعا : $\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{z+k}\right).$

من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>0\}$. بقية الدساتير يمك استنباطها بسهولة بالغة.بمكاملة طرفي العبارة الاشتقاقية :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right)=2.\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).$$

فان : $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=c2^{az+b}\Gamma(2z)$ باستخدام بعض القيم الشهيرة للدالة جاما عند 0 أو 1 فان : $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2z-1}\Gamma(2z)$

ممكن استخدام المقاربة الشهيرة : $\dfrac{1}{\Gamma(z)}=Lim_{n\to\infty}\dfrac{(z+1)(z+2)....(z+n)}{n^z n!}$ مما يستلزم مباشرة أن : $\dfrac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=\dfrac{\sin\pi z}{\pi}$

من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>0\}$.

التمرين السابع نعرف الدالة **زيتا Zeta function** من اجل $s>1$: فان $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ متقاربة ومعرفة .لنثبت صحة الحقيقة : $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^z}$ متقاربة تقارب طبيعي على نصف المستوي المركب $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>1+\delta\}$ بحيث $\delta>0$.فهي معرفة $\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>1\}$.نضع $s=\sigma+it$ لما $\sigma>1+\delta$ فان

$$|\zeta(s)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^s|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|e^{s\log n}|}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sigma\log n}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}<\infty$$

أثبت الحقيقة التالية : $0<|z|<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{1}{1-z}\right|\le\dfrac{1}{1-|z|}\le1+2|z|$ من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>0\}$

$$0<|z|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{1}{1-z}\right|\le\frac{1}{1-|z|}\le1+2|z|\Rightarrow|\log(1+z)|=\left|z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-.....\right|\le|z|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=2|z|$$

ثم استنتج تقارب الجداء اللامنته $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^{-s}}\right)$ وهو أصغر أو يساوي $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^s}\right)$ وهذا لما $\{s\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}s>1\}$.

التمرين الثامن الحقيقه التاليه : $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{|dz|}{|1-\bar{a}.z|^2}=\dfrac{1}{1-|a|^2}\Leftarrow,z=e^{i\theta},\dfrac{dz}{iz}=d\theta,|z|=1,|a|<1$ وأيضا لما $z=x+iy$ بحيث $|z|\le1$ فان:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|dz|}{|1-\bar{a}.z|^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{|z=1|}\frac{1}{(1-\bar{a}z)\left(1-\frac{a}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2i\pi}\int_{|z=1|}\frac{\frac{1}{1-\bar{a}z}}{z-a}dz=\left(1-|a|^2\right)^{-1}$$

$\iint_{|z|\le1}\dfrac{dxdy}{(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\beta})}=\pi\log\dfrac{\alpha\bar{\beta}}{1-\alpha\bar{\beta}}$ نضع $dxdy=rdrd\theta\Leftarrow z=re^{i\theta}$ و $\left(\int_{|z|=r}\dfrac{\frac{1}{r^2-z\bar{\beta}}}{z-\alpha}dz\right)=\dfrac{2i\pi}{r^2-\alpha\bar{\beta}}$

$$\iint_{|z|\le1}\frac{dxdy}{(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\beta})}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{rdrd\theta}{(re^{i\theta}-\alpha)(re^{-i\theta}-\bar{\beta})}=\int_0^1 r\left(\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-\alpha)\left(\frac{r^2}{z}-\bar{\beta}\right)}\frac{dz}{irz}\right)==2\pi\int_0^1\frac{dr}{r^2-\alpha\bar{\beta}}=\pi\log\frac{\alpha\bar{\beta}}{1-\alpha\bar{\beta}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|re^{i\theta}-\xi|d\theta=\log|\xi|\Leftarrow,z=e^{i\theta},\frac{dz}{iz}=d\theta,|z|=1,|\xi|\ge r$$

نعرف الدالة $F_p(z)=\int_z^{\infty}\dfrac{e^{-t}}{t^p}dt$ من أجل $p>0$ تحقق $F_p(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^p}-pF_{p+1}$ وبالتالي $F_{p+1}(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^{p+1}}-(p+1)F_{p+2}$ ومنه

وبالتالي : $F_p(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^p}-p\left(\dfrac{e^{-z}}{z^{p+1}}-(p+1)F_{p+2}\right)$ $F_p(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^p}-p\dfrac{e^{-z}}{z^{p+1}}+p(p+1)F_{p+2}(z)$ ومنه $F_p(z)\approx\approx e^{-z}\left(\dfrac{1}{z^p}-\dfrac{p}{z^{p+1}}+\dfrac{p(p+1)}{z^{p+2}}-..................\right)$

أو $F_p(z)\approx\approx e^{-z}\left(\dfrac{1}{z^p}-\dfrac{p}{z^{p+1}}+\dfrac{p(p+1)}{z^{p+2}}-................(-1)^n\dfrac{p(p+1)......(p+n-1)}{z^{p+n}}\right)$ ومنه نستنتج من جهة أخرى يمكن استخلاص عبارة مقاربتيه :

$\Gamma(z+1)\approx\approx\sqrt{2\pi z}z^z e^{-z}\left(1+\dfrac{1}{12z}+\dfrac{1}{288z^2}-\dfrac{139}{51840z^3}..............\right)$ من أجل $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>0\}$.

بالتوفيـــق