جامعة الشهيد حمــة لخضر　　كلية العلوم الدقيقة　*السنة الثانية ماستر رياضيات*　　*قسم الرياضيات*　　تحليــل مركــب

**السلسلة الخامسة للأعمال الموجهة**　**(2021/2022)**　**TD 5 en Analyse complexe**　**د.عبد الحميد رحومه**

**التمرين الأول** لنعرف دوال **فيرشتراس** على القرص الوحده $D(0,1)=\{z,|z|<1\}$ من $\mathbb{C}$ من الشكل : $E_0(z)=1-z$ و $E_1(z)=(1-z)\exp(z)$

$E_p(z)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+......\frac{z^p}{p}\right)$ لنثبت أنها تحقق الميزة الهامه الآتيه $p=0,1,2,3....$ : $|1-E_p(z)|\le|z|^{p+1}$, $\forall z\in D(0,1)=\{z,|z|<1\}$ .

$\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بحث $z_n\neq 0, n=0,1,2.......$ وبحيث أن $|z_n|\underset{n\to\infty}{\to}\infty$ لنعتبر $\{p_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية أعداد طبيعية غير سالبة بحيث :

لكل $r>0$ توجد متتالية $\{r_n\}_{n=0,1,2.......}$ من الأعداد الموجبة ( مثلا $\{|z_n|\}_{n=0,1,2.......}$ ) بحيث شرط فيرشتراس محقق وهو : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}<\infty$

فان مفكوك أو جداء **فيرشتراس:** $p(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ هو دالة صحيحة ولها اصفار المجموعه $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ من $\mathbb{C}$ ولا يقبل أي أصفار أخرى غير ذلك من $\mathbb{C}$.في

حالة تكرارية الجذر $\alpha$, $m$ مرة فان $\alpha$ هو جذر لـ $p(z)$ للرتبة $m$.أثبت من جديد نظرية **أويلر** : $\forall z\in\mathbb{C}$ فان: $\sin(\pi.z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$

**التمرين الثاني ( صيغتا فيرشتراس )** لنتعرف على صيغة فيرشتراس $\{z_n\}_{n=0,1,2.......}$ متتالية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بحث $z_n\neq 0, n=0,1,2.......$ وبحيث أن

$|z_n|\underset{n\to\infty}{\to}\infty$ و $|z_1|<|z_2|<|z_3|<|z_4|<...<|z_n|..........$لنعتبر $f$ دالة صحيحة والتي أصفارها البسيطة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n..........$ فان :

$f(z)=f(0)\exp(\kappa.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}\right)$ بحيث : $\kappa=\frac{f'(0)}{f(0)}$ لما : $f(0)=1$ فان : $f(z)=\exp(\kappa.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}\right)$

لنعتبر $f$ دالة صحيحة والتي أصفاره المكررة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n..........$ بتكراريات $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, ... \mu_n..........$ فان :

$$f(z)=f(0)\exp(g(z))\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{z_n^2}+.......+\frac{1}{m-1}\frac{z^{m-1}}{z_n^{m-1}}\right)\right)^{\mu_n}$$

بحيث شرط فيرشتراس محقق وهو : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^m}<\infty$ . في حالة : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^3}<\infty$ فان صيغة فيرشتراس تصبح من الشكل :

$$f(z)=f(0)\exp(g(z))\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{z_n^2}\right)\right)^{\mu_n}$$

استخلص تقارب الجداء لفيرشتراس $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{z_n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$.

**التمرين الثالث** (دستور **جونسون** ) اولا لما : $C(z_0,R)$ حافة القرص المفتوح $D(z_0,R)$ و $h=u+iv$ هولومورفية $C(z_0,r)\subset C(z_0,R)$

$h(z_0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)}\frac{h(t)}{t-z_0}dt,$ و $t=z_0+re^{i\theta}$ فان $h(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(z_0+re^{i\theta})d\theta$ فالجزء الحقيقي يمكن اثبات أنه أيضا يحقق

$\operatorname{Re}h(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}h(z_0+re^{i\theta})d\theta$ لنعتبر $f$ دالة صحيحة والتي أصفاره المكررة هي $z_1, z_2, z_3, z_4, ... z_n$ بسيطة أو أصفاره المكررة هي $w_4, ... w_m$

$w_1, w_2, w_3,$ بتكراريات $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, ... \mu_m..........$ فانه اولا لما : $C(z_0,R)$ حافة القرص المفتوح $D(z_0,R)$ و $h=u+iv$ هولومورفية

$C(z_0,r)\subset C(z_0,R)$ و $f$ مستمرة على $\Omega\supset D(z_0,r)\cup C(z_0,r)$ و $f(0)\neq 0$ و $f|_{C(z_0,R)}\neq 0$ فان :

$$\log|f(0)|=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{|z_k|}{R}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Log|f(\mathrm{Re}^{i\theta})|d\theta$$

**التمرين الرابع . الدالة جاما Fonction Gamma** من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>0\}$ نعرف الدالة جاما كما يلي: $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$

وهي فورا حقق الخواص الأساسيه الآتية $\forall z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>0\}$ : $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ و $\Gamma(1)=1$ و $\Gamma(n+1)=n!$ $\Gamma(0)=\Gamma(1)=1$ .

أصفارالدالة $\Gamma(z)$ بسيطة وهي : $0,-1,-2,-3,......-n,......$ تحقق الشروط اعلاه وشروط صيغة فيرشتراس لها **الدالة جاما** تحقق:

$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ مما يستلزم ان : $\frac{1}{\Gamma(z)}=z\exp(\gamma.z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ من اجل : $z\in\{z\in\mathbb{C}\ \operatorname{Re}z>0\}$ .بحيث :

$\Gamma'(0)=\gamma=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n$ يسمى ثابت **أويلر**.

**التمرين الخامس** من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ نعرف الدالة جاما كما يلي : : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ تحقق أيضا $\Gamma(m) = 2\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx$ وبالتالي

$\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{-2m+1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ ومنه : $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ و $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ وأيضا $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ . ثم أثبت الحقائق التالية :

$$\prod_{k=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} \quad \text{وكذلك} \quad \prod_{k=1}^{2m} \Gamma\left(\frac{k}{2m+1}\right) = \frac{(2\pi)^m}{\sqrt{2m+1}} \cdot$$

**التمرين الساس** اعتمادا على الصيغة: $\frac{1}{\Gamma(z)} = z\exp(\gamma . z)\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ من اجل : $z \in \{z \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right)$ ,

ومنه: $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(z+n)^2}$ وأيضا : $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right) = 2.\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$ ومنه : $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \cdot$

$$\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(mz) \cdot$$

لنعرف التكامل بيتا Beta معرف كما يلي : $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$ بحيث $\mathrm{Re}\, p > 0, \mathrm{Re}\, q > 0$ يحقق $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ بالفعل

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta d\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$ و $\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \cdot$

أثبت أن $\int_0^4 t^{\frac{3}{2}} (16 - t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{64}{21}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2 \cdot$

**التمرين السابع** نعرف الدالة **زيتا** Zeta function من اجل : $s > 1$ فان $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ متقاربة ومعرفة .لنثبت صحة الحقيقة : $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ متقاربة تقارب طبيعي على نصف المستوي المركب $z \in \{z \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z > 1 + \delta\}$ بحيث $\delta > 0$ .فهي معرفة $\{z \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z > 1\}$ .أثبت الحقيقة التالية :

$0 < |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{1-z}\right| \le \frac{1}{1-|z|} \le 1 + 2|z|$ ثم استنتج تقارب الجداء اللامنته $\prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n^{-s}}\right)$ وهو أصغر أو يساوي $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{2}{n^s}\right)$ وهذا لما $\{s \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, s > 1\}$ .

وكذلك $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{2}{n^s}\right)$ متقارب وفق نفس الشروط $\{s \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, s > 1\}$ . أثبت التقارب المطلق للجداء اللامنته $\prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{z}{n}\right)\right) \cdot$

**التمرين الثامن** نريد التأكيد على الحقيقه التاليه : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|dz|}{|1 - \bar{a}.z|^2} = \frac{1}{1-|a|^2} \Leftarrow, z = e^{i\theta}, \frac{dz}{iz} = d\theta, |z| = 1, |a| < 1$ وأيضا لما $z = x + iy$ بحيث $|z| \le 1$ :

$\iint_{|z|\le 1} \frac{dxdy}{(z-\alpha)(\bar{z} - \bar{\beta})} = \pi \log \frac{\alpha\bar{\beta}}{1 - \alpha\bar{\beta}}$ و $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - \xi| d\theta = \log|\xi| \Leftarrow, z = e^{i\theta}, \frac{dz}{iz} = d\theta, |z| = 1, |\xi| \ge r$

و $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - \xi| d\theta = \log r \Leftarrow, |\xi| < r$ .أثبت أيضا بتطبيق دستور كوشي على الدائرة الوحدة : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(x + iye^{i\theta})\exp(-ik\theta) d\theta = \frac{(iy)^k}{k!} Q^{(k)}(x)$

ثم احسب $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta = L_n(x)$ وهو كثير حدود ليجندر للمتغير المركب .

نعرف الدالة $F_p(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^p} dt$ من أجل $p > 0$ تحقق $F_p(z) = \frac{e^{-z}}{z^p} - pF_{p+1}$ وبالتالي $F_{p+1}(z) = \frac{e^{-z}}{z^{p+1}} - (p+1)F_{p+2}$ ومنه

$F_p(z) = \frac{e^{-z}}{z^p} - p\left(\frac{e^{-z}}{z^{p+1}} - (p+1)F_{p+2}\right)$ وبالتالي : $F_p(z) = \frac{e^{-z}}{z^p} - p\frac{e^{-z}}{z^{p+1}} + p(p+1)F_{p+2}(z)$ ومنه $F_p(z) \approx\approx e^{-z}\left(\frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - ..................\right)$

أو $F_p(z) \approx\approx e^{-z}\left(\frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - ................(-1)^n \frac{p(p+1).......(p+n-1)}{z^{p+n}}\right)$ ومنه نستنتج من جهة أخرى يمكن استخلاص عبارة مقاربتيه :

$\Gamma(z+1) \approx\approx \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z}\left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} ..............\right)$ من أجل $z \in \{z \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ .

**بالتوفيـــق**