جامعة الشهيد حمـة لخضر **كلية العلوم الدقيقة**

السنة الثانية ماستر رياضيات ***قسم الرياضيات***

تحليـل مركـب

حلول السلسلة الرابعة للأعمال الموجهه **TD 4 en Analyse complexe (22/12/2020)** **د.عبد الحميد رحومه**

التمرين الأول $\phi(z)$ دالة تحليلية على الدائرة المغلقة C_a والتي تشمل النقطة a و z هو جذر المعادلة لاكرانج : $z=a+\xi\phi(z)$

ويأخذ $z=a$ لما $\xi=0$.نريد اثبات صحة صيغة لاكرانج الآتيه : $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\phi(a)^n$.لدينا $f(z)=z-a-\xi\phi(z)=0$ بحيث f يملك جذر وحيد بسيط z فقط ليس هناك أقطاب و $g(z)=z$ سنطبق خلال هذا البرهان الدستور (44).

$$z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a} w\left(\frac{1-\xi\phi'(w)}{w-a-\xi\phi(w)}\right)dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{w}{w-a}(1-\xi\phi'(w))\frac{1}{1-\xi\frac{\phi(w)}{w-a}}dw$$

وحيث أن : $\frac{1}{1-\xi\frac{\phi(w)}{w-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}$ ومنه : $z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{w}{w-a}(1-\xi\phi'(w))\frac{1}{1-\xi\frac{\phi(w)}{w-a}}dw$ وبالتالي :

$z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{w}{w-a}(1-\xi\phi'(w))\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n\phi^n(w)}{(w-a)^n}\right)dw$ يساوي بمراعاة العلاقة (71) كون $\frac{\xi\phi(w)}{w-a}=1$ فان :

$$z=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{w}{w-a}dw+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2i\pi}\int_{C_a}\left(\frac{w\phi^n(w)}{(w-a)^{n+1}}-\frac{w\phi^{n-1}(w)\phi'(w)}{(w-a)^n}\right)dw$$

الآن لدينا : $\frac{1}{n}\frac{d}{dw}\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}=\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^{n+1}}-\frac{\phi^{n-1}(w)\phi'(w)}{(w-a)^n}$ وبمراعاة : $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a}\frac{w}{w-a}dw=a$

ومنه توصلنا الى الدستور : $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2i\pi}\int_{C_a}\frac{w}{n}\left(\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}\right)dw$ باستخدام التكامل بالتجزئة مع مراعاة الخاصية الهولومورفية والكانتور المغلق تستلزمان :

$\left[\frac{w}{n}\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}\right]_{C_a}=0$ فان : $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2i\pi n}\int_{C_a}\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}dw$ وحسب احدى دساتير كوشي فان : $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\left[(\phi^n(w))^{(n-1)}\right]_{w=a}$

واخيرا : $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}(\phi^n(a))^{(n-1)}$.

تطبيق z هو جذر المعادلة لاكرانج : $z=a+\frac{1}{2}\xi(z^2-1)$ و يأخذ $z=a$ لما $\xi=0$.فان : $\frac{1}{\sqrt{1-2a\xi+\xi^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2^n n!}\frac{d^n}{da^n}(a^2-1)^n$

بالفعل: نطبق دستور لاكرانج بحيث أن : $\phi(z)=\frac{1}{2}(z^2-1)$ الدالة $\phi(z)$ تحليلية على الدائرة المغلقة C_a فان $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2^n n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(a^2-1)^n$.

المعدلة للاكرانج : $z=a+\frac{1}{2}\xi(z^2-1)$ تستلزم الجذرين الوحيدين : $z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{\xi^2-2a\xi+1}}{\xi}$.

ثم نختبر المتطابقة الآتية :

$$\left(\frac{1-\sqrt{\xi^2-2a\xi+1}}{\xi}\right)'=\frac{2\xi}{2\xi\sqrt{\xi^2-2a\xi+1}}=\frac{1}{\sqrt{\xi^2-2a\xi+1}}$$

باشتقاق طرفي المعادلة أعلاه فان :

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2-2a\xi+1}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2^n n!}\frac{d^n}{da^n}\left(a^2-1\right)^n$$

باتباع نفس الخطوات يمكن التطرق الى معادلة لاكرانج أخرى .

التمرين الثاني $\phi(z)=\xi.z^p$ دالة تحليلية على الدائرة المغلقة C_a والتي تشمل النقطة a و z هو جذر المعادلة لاكرانج : $z=1+\xi\phi(z)$

ويأخذ $z=1$ لما $0=\xi$. نطبق دستور لاكرانج بحيث أن : $\phi(z)=\xi.z^p$ الدالة $\phi(z)$ تحليلية على الدائرة المغلقة C_a فان $z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(z^{pn}\right)$.مما

يستلزم صحة النشور اللاكرانجي : $z=1+\xi+\frac{2p}{1!}\xi^2+\frac{3p(3p-1)}{3!}\xi^3+\frac{4p(4p-1)(4p-2)}{4!}\xi^4+$............

من اجل $p=\frac{1}{2}$ فان : z هو جذر المعادلة لاكرانج $z=\xi.\sqrt{z}+1$ ويأخذ $z=1$ لما $\xi=0$.فان :

$$z=1+\xi+\frac{1}{1!}\xi^2+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{3!}\xi^3.+.\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)}{5!}\xi^5+..............$$

التمرين الثالث لما $F(z)$ و $G(z)$ تحليليان على C_α و α هو جذر المعادلة لاكرانج : $z=a+\xi F(z)$
فان :

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{G(z)}{z-a-\xi F(z)},\beta\right)=\lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)G(z)}{z-a-\xi F(z)}=\lim_{z\to\alpha}\frac{G(z)}{\frac{z-a-\xi F(z)}{z-\alpha}}=\frac{G(\alpha)}{1-\xi F'(\alpha)}$$

ومنه : $\frac{1}{2i\pi}\int_{C_a}\frac{G(z)}{z-a-\xi F(z)}dz=\frac{G(\alpha)}{1-\xi F'(\alpha)}$.

التمرين الرابع لنحسب الرواسب عند كل قطب من أقطاب الدوال المركبة $f(z)=\frac{e^z}{\sin z}$ ،بالفعل $\sin z=0\Leftrightarrow z=n\pi, n=0,\pm1,\pm2,...$ وحيث أن

$\sin'(n\pi)=\cos(n\pi)=(-1)^n$ فالأقطاب بسيطة .و $\operatorname{Re}s(f,n\pi)=\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)e^z}{\sin z}=\lim_{z\to\alpha}\frac{e^z}{\frac{\sin z}{z-n\pi}}=\frac{e^{n\pi}}{\cos(n\pi)}=(-1)^n e^{n\pi}$ وبالتالي

$\operatorname{Re}s\left(\frac{g}{\sin z},n\pi\right)=(-1)^n g(n\pi)$.وأيضا أقطاب الدوال المركبة $f(z)=\frac{e^z}{\sin^2 z}$ مضاعفة وبالتالي : ،بالفعل $\operatorname{Re}s(f,n\pi)=\lim_{z\to n\pi}\left(\frac{(z-n\pi)^2 e^z}{\sin^2 z}\right)'$ نضع

$z=u-n\pi$ فانه لما $z\to n\pi$ $u\to 0$ وحسب قاعدة لوبيتال $\operatorname{Re}s(f,n\pi)=\lim_{z\to n\pi}\left(\frac{(z-n\pi)^2 e^z}{\sin^2 z}\right)'=e^{n\pi}\lim_{u\to 0}\frac{u^2\sin u+2u\sin u-2u^2\cos u}{\sin^3 u}=e^{n\pi}$.

باتباع نفس الخطوات مع تحديد طبيعة الأقطاب وتكراريتها بالنسبة للدالة $f(z)=\frac{e^{\lambda z}}{\cos^2 z}$ فان $\cos z=0\Leftrightarrow z=\pm\frac{\pi}{2}+n\pi, n=0,\pm1,\pm2,...$ وهي مضاعفة ،

وايضا الأقطاب التالية بسيطة بالنسبة للدالة $f(z)=\frac{\tan z}{e^{mz}-1}$ وهي $e^{mz}-1=0\Leftrightarrow z=\frac{2n}{m}\pi, n=0,\pm1,\pm2,...$. ومضاعفة بالنسبة للدالة $f(z)=\frac{\tan z}{\left(e^{mz}-1\right)^2}$.و

$e^z-1=0\Leftrightarrow z=2n\pi, n=0,\pm1,\pm2,...$ أقطاب مكعبة بالنسبة للدالة $f(z)=\frac{\tan z}{\left(e^z-1\right)^3}$.ونتبع حساب الراسب وفق القاعدة :الراسب عند القطب $z=z_0$ للرتبة

m للدالة التحليلية $f(z)$ يساوي : $\operatorname{Re}s(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$.

لأثبات صحة د ستور ميثاق لوفلر نضع : $f(z)=\cot g(z)-\frac{1}{z}=\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{1}{z}=\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}$ الأقطاب من الشكل $z=n\pi$ بحيث $n=0,1,2,3.......$

لنحسب الرواسب عند كل قطب من الأقطاب.

$$\operatorname{Re}s(f,n\pi)=\underset{z\to n\pi}{Lim}(z-n\pi)\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=\underset{z\to n\pi}{Lim}\frac{z-n\pi}{\sin z}\underset{z\to n\pi}{Lim}\frac{z\cos z-\sin z}{z}=1$$

نطبق لوبيتال فنتحصل على : $\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\left(\cot g(z)-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{z\sin z}=0$

الدوائر C_N دوائر أنصاف أقطارها $R_N=\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi$ بحيث $R_N\underset{N\to\infty}{\to}\infty$ لا تمر بأي قطب من الأقطاب بحيث $\forall z\in C_N$:

تحيط بكل الأقطاب السالفة الذكر ومنه دستور ميثلق لوفلر : $\cot g(z)-\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)$ لنثبت صحة الدستور الثاني بالفعل :

$$\cot g(z)-\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)=\sum_{-\infty}^{1}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)$$

وهذا يستلزم أن : $\cot g(z)-\frac{1}{z}=2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2\pi^2}$.

التمرين الخامس $f(z)$ دالة معطاة معلومه ليكن C_N الكانتور يشمل كل أقطاب $f(z)$ اقطاب $\cot g\pi z$ هي $z=0,\pm1,\pm2,\pm3;.....$

$$\operatorname{Re}s(\pi f(z)\cot g\pi z, z=n)=\lim_{z\to n}\pi\frac{z-n}{\sin\pi z}f(z)\cos\pi z=f(n)$$

بتطبيق نظرية الرواسب: $\int_{C_N}\pi f(z)\cot\pi z.dz=\sum_{n=-N}^{N}f(n)+\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(f(z)\cot\pi z,\lambda)$ لدينا من أجل $z=x+iy$ و $y>\frac{1}{2}$ او $y<-\frac{1}{2}$:

$$|\cot\pi z|=\left|\frac{\exp(i\pi z)+\exp(-i\pi z)}{\exp(i\pi z)-\exp(-i\pi z)}\right|\le\frac{|\exp(i\pi z)|+|\exp(-i\pi z)|}{|\exp(i\pi z)|-|\exp(-i\pi z)|}\le\frac{\exp(-\pi y)+\exp(\pi y)}{\exp(\pi y)-\exp(-\pi y)}$$

$$\Rightarrow|\cot\pi z|\le\frac{\exp(-\pi y)+\exp(\pi y)}{\exp(\pi y)-\exp(-\pi y)}\le\frac{1+\exp(-2\pi y)}{1-\exp(-2\pi y)}\le\frac{1+\exp(-\pi)}{1-\exp(-\pi)}=L$$

لما $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$ فانه لما $z=N+\frac{1}{2}+iy$: $|\cot\pi z|=\left|\cot\pi\left(N+\frac{1}{2}+iy\right)\right|=|\tanh\pi y|\le\left|\tanh\frac{\pi}{2}\right|\le K$ اي انه

لما $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$ فانه لما $z=-N-\frac{1}{2}+iy$ فان : $|\cot\pi z|=\left|\cot\pi\left(-N-\frac{1}{2}+iy\right)\right|=|\tanh\pi y|\le\left|\tanh\frac{\pi}{2}\right|\le K$ وبالتالي :

$$\left|\int_{C_N}\pi f(z)\cot\pi z dz\right|\le\frac{\pi AM}{N^k}(8N+4)\underset{N\to\infty}{\to}0$$

ومنه نستنتج أن : $\int_{C_N}\pi f(z)\cot\pi z dz=\sum_{n=-N}^{N}f(n)+\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(f(z)\cot\pi z,\lambda)\underset{N\to\infty}{\to}0$ ومنه نتحصل على المتطابقة :

$$:\sum_{n-\infty}^{\infty}f(n)=-\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(\pi\cot g\pi z f(z),\lambda)\cdot$$

ملاحظة باتباع نفس التقنية :

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(\pi\cos c\pi z f(z),\lambda)$$

وأيضا

$$\cdot\sum_{n-\infty}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\sum_{\lambda\in Poles(f)}\operatorname{Re}s(\pi\sec\pi z f(z),\lambda)$$

استنتاج صحة النشر بتطبيق نظرية ميثاق لوفلر لنثبت من اجل $a>0$ أن : $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=\frac{\pi}{a}\coth\pi a$. نعتبر الدالة المساعدة $f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ لديها قطبين بسيطين هما : $z=\pm ia$ قطب ينتمي الى النصف العلوي من المستوي المركب الراسب لـ $\pi\frac{1}{z^2+a^2}\cot\pi z$ عند القطب $z=ia$ هو $\lim_{z\to ia}\frac{(z-ia)}{(z-ia)(z+ia)}\pi\cot g\pi z=\frac{\pi\cot i\pi a}{2ia}=-\frac{\pi}{2a}\coth\pi a$ الراسب لـ $\pi\frac{1}{z^2+a^2}\cot\pi z$ عند القطب $z=-ia$ هو

$$\lim_{z\to -ia}\frac{(z-ia)}{(z-ia)(z+ia)}\pi\cot g\pi z=\frac{\pi\cot i\pi a}{2ia}=-\frac{\pi}{2a}\coth\pi a$$

الدالة $f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$ تستوفي شروط المحدودية علو الكانتورات C_N أي : $|f(z)|=\left|\frac{1}{z^2+a^2}\right|<\frac{M}{|z|^k}\underset{|z|\to\infty}{\to}0$ ومنه نطبق الدستور أعلاه :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=-\left[\operatorname{Re}s\left(\pi\frac{\cot\pi z}{1+z^2},ia\right)+\operatorname{Re}s\left(\pi\frac{\cot\pi z}{1+z^2},-ia\right)\right]=\frac{\pi}{a}\coth\pi a.$$

فالدستور (88) محقق. بالنسبة للنتيجة (89) يمكن التأكد مها كما يلي : $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2+\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}=\frac{\pi}{a}\coth\pi a$ ومنه $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=-\frac{1}{\pi^2}+\frac{\pi}{a}\coth\pi a$ مما يستلزم أن : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\pi^2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi^2}+\frac{\pi}{a}\coth\pi a\right)\cdot$

التمرين السادس لنشر الدالة : $f(z)=\frac{\pi}{z^3\cos\pi.z}$ ميثاق لوفلريا نحسب الراسب عند الصفر.ثم الرواسب عند بقية الأقطاب كما يلي : $f(z)=\frac{\pi}{z^3\cos\pi.z}$ وتساوي

$$f(z)=\frac{\pi}{z^3\left(1-\frac{z^2\pi^2}{2}+...\right)}=\frac{\pi}{z^3}\left(1+\frac{z^2\pi^2}{2}+.....\right)=\frac{\pi}{z^3}+\frac{\pi^3}{2}\frac{1}{z}+.....\Rightarrow\operatorname{Re}s(f,0)=\frac{\pi^3}{2}$$

بقية الأقطاب من الشكل $\cos\pi.z=0\Leftrightarrow z=n+\frac{1}{2},n=0,\pm1,\pm2,...$ وهي أقطاب بسيطة وبالتالي

$$\operatorname{Res}(f,n+\frac{1}{2})=\lim_{z\to n+\frac{1}{2}}\left(z-n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{z^3\cos\pi z}=\frac{\pi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\lim_{z\to n\pi}\frac{z-n-\frac{1}{2}}{\cos\pi z}=-\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}$$

لأثبات $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2}{32}$ الكانتور المستطيل C_N الذي رؤوسه من الشكل $z_n=\pm n\pm i, n=0,1,2,3.......$ عليه الدالة $f(z)=\frac{\pi}{z^3\cos\pi.z}$ تحقق المحدودية

أعلاه وبالتالي : $\left|\int_{C_N}\frac{\pi}{z^3\cos\pi.z}dz\right|\le\underset{N\to\infty}{\to}0$ ومنه نستنتج أن : $\int_{C_N}\frac{\pi}{z^3\cos\pi.z}dz=-\sum_{n-N}^{N}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{\pi^3}{2}\underset{N\to\infty}{\to}0$.لنتحصل على النتيجة الأولية التاليه

$\sum_{n-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}=-8.\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{2}$ ومنه $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2}{32}$.

لنثبت صحة المساواة $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}=\frac{\pi^2\cos\pi.a}{\sin^2\pi.a}$. $\sin\pi.z=0\Leftrightarrow z=n,n=0,\pm1,\pm2,.....$ يمكن $\left|\int_{C_N}\pi f(z)\frac{1}{\sin\pi z}dz\right|\le\underset{N\to\infty}{\to}0$

$$\operatorname{Res}(\pi\frac{f(z)}{\sin\pi z},n)=\lim_{z\to n}(z-n)\frac{\pi f(z)}{\sin\pi z}=\pi f(z)\lim_{z\to n}\frac{z-n}{\sin\pi z}=(-1)^n f(n)=\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$$

ومنه نستنتج أن : $\int_{C_N}\pi f(z)\frac{1}{\sin\pi z}dz=\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}+\frac{\pi^2\cos\pi a}{\sin^2\pi a}\underset{N\to\infty}{\to}0$ ومنه : $\sum_{n-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}=-\sum_{-a\in Poles(f)}\operatorname{Res}\left(\pi\frac{1}{\sin\pi z}\frac{1}{(z+a)^2},-a\right)$.

الاستعانة بالدالة $f(z)=\frac{1}{(z+a)^2}$ ذات القطب المضاعف الوحيد $z=-a$. ومنه الراسب لـ $\pi\frac{1}{\sin\pi z}\frac{1}{(z+a)^2}$ عند القطب $z=-a$ هو

$\lim_{z\to-a}\left(\pi\frac{1}{\sin\pi z}\right)'=-\frac{\pi^2}{\sin\pi a}\cot g\pi a$ ومنه $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}=\frac{\pi^2\cos\pi a}{\sin^2\pi a}$. ومنه بتجميع الحدين الزوجيين المتعاكسين في الاشارة

$\pm\left(\frac{1}{(n+a)^2}+\frac{1}{(-n+a)^2}\right)=\pm\frac{a^2+n^2}{(a^2-n^2)^2}$ نستنتج صحة المتطابقة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^2+n^2}{(a^2-n^2)^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi^2\cos\pi a}{2\sin^2\pi a}$.

لنطبق نظرية ميتـــــــــاق لوفــلر لا ثبات أن :

$$\frac{\pi}{\tan(\pi.z)}=\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right):$$

بالفعل الأقطاب من الشكل $z=n$ بحيث $n=0,\pm1,\pm2,\pm3.......$

لنحسب الرواسب عند كل قطب من الأقطاب.

$$\operatorname{Res}(f,n)=\lim_{z\to n}(z-n)\frac{\pi\cos\pi.z}{\sin\pi.z}=\lim_{z\to n}\frac{z-n}{\sin\pi.z}\lim_{z\to n\pi}\pi\cos\pi.z=1$$

الدوائر C_N دوائر أنصاف أقطارها $R_N=\left(N+\frac{1}{2}\right)$ بحيث $R_N\underset{N\to\infty}{\to}\infty$ لا تمر بأي قطب من الأقطاب بحيث $\forall z\in C_N$:

تحيط بكل الأقطاب السالفة الذكر ومنه دستور ميتلق لوفلر : $\frac{\pi}{\tan(\pi.z)}=\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$ لنثبت صحة الدستور الثاني بالفعل :

$\frac{\pi}{\tan\pi.z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{-\infty}^{1}\left(\frac{1}{z-n}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}-\frac{1}{n}\right)$ وهذا يستلزم أن : $\frac{\pi}{\tan\pi.z}=.-\frac{1}{z}=2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$ باشتقاق طرفي المتطابقة يمكن استنتاج $-\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2=-\frac{1}{z^2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$.

لنثبت أن :

$$\frac{\pi}{\cos(\pi.z)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-z^2}-\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-z^2}+\frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2-z^2}-\frac{7}{\left(\frac{7}{2}\right)^2-z^2}.........$$

مما يستلزم أن : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{16}$.

لأثبات صحة دستور ميثاق لوفلر الأقطاب للدالة $f(z)=\frac{\pi}{\cos(\pi.z)}$ من الشكل $z=\frac{1}{2}+n$ بحيث $n=0,\pm1,\pm2,\pm3.......$

لنحسب الرواسب عند كل قطب من الأقطاب.

$$\operatorname{Res}(f,n\pi)=\lim_{z\to\frac{1}{2}+n}\left(z-n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\cos(\pi.z)}=-(-1)^n$$

المربعات C_N $(i+1)N,(-i+1)N,(i-1)N,(-i-1)N$ لا تمر بأي قطب من الأقطاب بحيث $\forall z\in C_N$:

$$\int_{C_N}\pi\frac{1}{\cos\pi z}dz=-\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{\pi^3}{2}\underset{N\to\infty}{\to}0\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{\pi^3}{2}$$

تحيط بكل الأقطاب السالفة الذكر ومنه دستور ميتلق لوفلر : $\frac{\pi}{\cos(\pi.z)}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z-n-\frac{1}{2}}$ مما يستلزم بالتجميع :

$$\frac{\pi}{\cos(\pi.z)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-z^2}-\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-z^2}+\frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2-z^2}-\frac{7}{\left(\frac{7}{2}\right)^2-z^2}.........$$

لاثبات صحة $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{\pi^3}{2}$ باستبدال $f(z)=\frac{\pi}{z^3\cos(\pi.z)}$ من الشكل $z=\frac{1}{2}+n$ بحيث $n=0,\pm1,\pm2,\pm3.......$ والصفر قطب مكعب للرتبة 3.

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{\pi^3}{3},\operatorname{Res}\left(f,n+\frac{1}{2}\right)=-\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3},n=0,\pm1,\pm2,.....$$

المربعات C_N $(i+1)N,(-i+1)N,(i-1)N,(-i-1)N$ لا تمر بأي قطب من الأقطاب بحيث $\forall z\in C_N$:

$$\int_{C_N}\pi\frac{1}{\cos\pi z}dz=-\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{\pi^3}{2}\underset{N\to\infty}{\to}0\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{\pi^3}{2}$$

مما يستلزم أن : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{16}$.

التمرين السابع الجداء غير المنته $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|w_n|)$ متقارب بحيث $w_n\neq-1,n=1,2,3......$ متقارب اذا وفقط : $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|<\infty$. بالفعل نستخدم المتراجحة :

$|(1-\varepsilon)|w_n|\leq|\log(1+w_n)|\leq(1+\varepsilon)|w_n|$ للأشارة $\log(1+w_n)$ يرمز للفرع الرئيسي للوغاريتم .بمعنى التحديد الرئيسي لعمدة اللوغاريتم محصور في المجال $]-\pi\quad\pi[$ بالفعل :

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\Rightarrow\left|\frac{\log(1+x)}{x}-1\right|\leq\varepsilon$$

ومنه باستخدام كون $w_n\underset{n\to\infty}{\to}0$: $(1-\varepsilon)|w_n|\leq|\log(1+w_n)|\leq(1+\varepsilon)|w_n|$ فالسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+w_n)|$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|$ لهما نفس طبيعة التقارب. ومنه :

$\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|<\infty\Leftrightarrow\prod_{n=1}^{\infty}(1+|w_n|)<\infty$.مما يثبت تقارب الجداء اللامتناه .

الجداء اللامنته $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ متقاربين اذا وفقط $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty$ **لما** $p>1$.بالفعل حسب شرط التقارب أعلاه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty$ لما $p>1$. مما يثبت تقارب الجداء اللامتناه . بنفس الشرط $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)}<\infty$ مما يستلزم تقارب $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$.

أيضا $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{n+1}{2^n}\right)$ متقارب اذا وفقط $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}<\infty$ يمكن اثبات هذا الشرط بملاحظة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}}==\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ وحيث أن السلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. متقاربة ومجموعها يساوي $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ فان $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=4$.

أثبت التقارب للجداء اللامنتـــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$ و $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{n+1}{2^n}\right)$ثم أحسب قيمته و استنتج حسابا للجداء اللامنتـــــــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

استنتج بطريقة الحذف حسابا للجداء اللامنتـــــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$. اولا متقارب لأن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2}<\infty$.أو ننتبه للتمرين الموالي الذي يستخدم في حسابه.

كما يلي $\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2}{4n^2\pi^2}\right)=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ ومنه $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$.

باستخدام مكاملة احدى دساتير نشور ميثاق لوفلر السابقة أثبت صحة عبارة الجداءا اللامتناه لمتغير مركب: $\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$,

بالفعل : نعتمد على احدلى دساتير مجامبع ميثاق لوفلر ونكاملها فنتحصل على عبارة جداء لامتناه هولومورفي كما يلي :

$$\int_0^z\left(\cot gt-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\frac{\sin z}{z}=\int_0^z\left(\frac{2t}{t^2-\pi^2}+\frac{2t}{t^2-4\pi^2}+.....\right)dt\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ومنه : $\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$.

لنثبت الآن صحة الدستور $\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$, بملاحظة أن : $\int_0^z\left(\tan gt+\frac{1}{t}\right)dt=-\ln\frac{\cos z}{z}$ حسب دستور ميثاق لوفلر 82

$$\tan z=\frac{2z}{-z^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{2z}{-z^2+\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}+\frac{2z}{-z^2+\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}-$$

يمكن مكاملتها فنتحصل على

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right),$$

التمرين الثامن نعتبر $f_n(z)\neq -1, n=1,2,3.......$ متتالية دوال هولومورفية على الجموعة $\forall z\in\Omega$ من $\mathbb{C}$ بحيث : $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|<\infty$

فانه من الممكن تحقق $\forall z\in D\subset\Omega$ من $\mathbb{C}$ مفتوح : $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ متقارب مطلقا وهذا محقق بتطبيق النظرية الأساسيه للتقارب والهولومورفيه محققة .

بحيث أن $(\log f(z))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^{/}(z)}{1+f_n(z)}$ بالفعل : $(\log f(z))'=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\log(1+f_{n'}(z))\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n{}'(z)}{1+f_n(z)}$ على كل $\forall z\in\Delta\subset\Omega$ من $\mathbb{C}$ لا يشمل اي صفر من أصفار $f_n(z), n=1,2,3.......$ فان : $\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^{/}(z)}{1+f_n(z)}$.مما يستلزم أن :

$$f'(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^{/}(z)}{1+f_n(z)}\right)$$

التمرين التاسع (جداء بلاشك Produit de Blaschke) $(a_n)_{n=1,2,3.....}$ متتالية من $\mathbb{C}$ عناصر من القرص الوحدة $D(0,1)=\{z,|z|<1\}$ نعرف الجداء الامنته لبلاشك على القرص الوحدة $D=\{z,|z|<1\}$ الدالة : $z\mapsto B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}$ بحيث $a\in D$ يسمى جداء بلاشك وهو جداء متقارب هولومورفي على القرص الوحدة $D=\{z,|z|<1\}$ فقط لما يتحقق شرط بلاشك : $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$. بالفعل : نستخدم احدى نظريات تقارب الجداء اللامنته للدوال الهولومورفية الهوموغرافيه.لنختبر تقارب سلسلة الدوال على المتراصات $\{z,|z|\leq r\}$ الاتية : $\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}\right|$ الحد العام لها يساوي :

$$\left|1-\frac{a_n-z}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}\right|=\left|\frac{a_n(1-\overline{a_n}z)-|a_n|(a_n-z)}{1-\overline{a_n}z}\right|=\left|\frac{a_n+z|a_n|}{(1-\overline{a_n}z)a_n}\right|(1-|a_n|)$$

لدينا $|z|\leq r$ مع ملاحظة $\left|\frac{|a_n|}{a_n}\right|=1$ يستلزم أن : $\left|\frac{a_n+z|a_n|}{(1-\overline{a_n}z)a_n}\right|\leq\frac{1+r}{1-r}$ $|z|\leq r\Rightarrow$ السلسلة متقاربة لما تتقارب السلسلة: $\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ وهذا محقق بناء على شرط بلاشك المحقق. ومنه جداء بلاشك متقارب مطلقا على المتراصات $\{z,|z|\leq r\}$ من القرص الوحدة $D(0,1)$.ومنه جداء بلاشك هولومورفي على القرص الوحدة $D(0,1)$. ونكتب : $B\in H(D(0,1))$.لنلاحظ أنكل عامل من عوامل جداء بلاشك هي تحويل لبلاشك بالفعل لما $\forall z\in D(0,1)$:

ومنه : $\left|\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}\right|=\left|\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\right|<1$ وبالتالي : $w=B(z),\forall z\in D=\{z,|z|<1\}\Rightarrow|w|=|B(z)|<1$: $|z|<1\Rightarrow|B(z)|<1$

مما يثبت صحة الخواص المذكورة أعلاه لجداء **بلاشك**. جداء **بلاشك** يحقق الخواص :

1. $|z|<1\Rightarrow|B(z)|<1$
2. $\left|B(e^{i\theta})\right|=1:\ \forall\theta\in[-\pi\quad\pi]$
3. لا يقبل أصفارا بسيطة غير $(a_n)_{n=1,2,3.....}$.
4. $\forall z\in D\subset\Omega:\ \frac{B'(z)}{B(z)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)(a_n-z)}$

على سبيل المثال بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}<\infty$ فان جداء **بلاشك** : $B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}}{1-\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}z}$ متقارب $\forall z\in D(0,1)$ وهولومورفي على القرص الوحدة $D(0,1)$ ويحقق المحدودية : : $z\in D(0,1)\subset\mathbb{C}$. المحدودية الآتية :

$$|z|<1\Rightarrow|B(z)|=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left|z-\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}\right|}{\left|1-\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right|}<1$$

(**خواص جداءات بلاشك**) $\forall z\in D(0,1)$ فان :

$$\frac{B'(z)}{B(z)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)(a_n-z)}$$

كذلك

$$B'(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(z)}{a_n-z}\frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)}.$$

وايضا

$$|B'(z)|\le|B(z)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n-z|}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|}$$

بوضع : $B_n(z)=\frac{B(z)}{b_n(z)}$ بحيث $b_n(z)=\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}$ جداء لامنته لبلاشك فان $\forall z\in D(0,1)$:

,

$$B'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n'(z)B_n(z)$$

وبالتالي :

$$|B'(z)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}|B_n(z)|$$

وايضا

$$\frac{1-|B(z)|^2}{2\left(1-|z|^2\right)}\le\frac{1-|B(z)|^2}{1-|z|^2}\le 2\frac{1-|B(z)|^2}{1-|z|^2}$$

بملاحظة أن : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|1-e^{i\theta}|d\theta=0$ فان : $Lim_{r\to1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\log|B(re^{i\theta})|d\theta=0$. ومنه $|B(e^{i\theta})|=1$.