جامعة الشهيد حمــة لخضر — كلية العلوم الدقيقة

السنة الثانية ماستر رياضيات — *قسم الرياضيات*

تحليــل مركـب

السلسلة الرابعه للأعمال الموجهه — **TD 4 en Analyse complexe (2021)** — **د.عبد الحميد رحومه**

التمرين الأول $\phi(z)$ دالة تحليلية على الدائرة المغلقة C_a والتي تشمل النقطة a و z هو جذر المعادلة لاكرانج : $z = a + \xi\phi(z)$

ويأخذ $z = a$ لما $\xi = 0$. فان : $z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \phi(a)^n$.

تطبيق z هو جذر المعادلة لاكرانج : $z = a + \frac{1}{2}\xi\left(z^2 - 1\right)$ ويأخذ $z = a$ لما $\xi = 0$. فان :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2a\xi + \xi^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{2^n n!} \frac{d^n}{da^n} \left(a^2 - 1\right)^n$$

للأشارة أن : $\frac{d^n}{da^n} \left(a^2 - 1\right)^n = \left(\left(a^2 - 1\right)^n\right)^{(n)}$.

التمرين الثاني z هو جذر المعادلة لاكرانج : $z = \xi . z^p + 1$ ويأخذ $z = 1$ لما $\xi = 0$. فان :

$$z = 1 + \xi + \frac{2p}{1!}\xi^2 + \frac{3p(3p-1)}{3!}\xi^3 + \frac{4p(4p-1)(4p-2)}{4!}\xi^4$$

من اجل $p = \frac{1}{2}$ فان : z هو جذر المعادلة لاكرانج $z = \xi . \sqrt{z} + 1$ ويأخذ $z = 1$ لما $\xi = 0$. فان :

$$z = 1 + \xi + \frac{1}{1!}\xi^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{3!}\xi^3 + \frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{2} - 2\right)\left(\frac{5}{2} - 3\right)}{5!}\xi^5 + ...$$

التمرين الثالث لتكن $F(z)$ و $G(z)$ تحليليان على C_α و α هو جذر المعادلة لاكرانج : $z = a + \xi F(z)$ أثبت صحة المساواة :

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{G(z)}{z - a - \xi F(z)}, \beta\right) = \frac{G(\alpha)}{1 - \xi F'(\alpha)}$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_a} \frac{G(z)}{z - a - \xi F(z)} dz = \frac{G(\alpha)}{1 - \xi F'(\alpha)}$$

التمرين الرابع أحسب الرواسب عند كل قطب من أقطاب الدوال المركبة $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$, $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ ، $f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{\cos^2 z}$ ، $f(z) = \frac{\tan z}{e^{mz} - 1}$ ، $f(z) = \frac{\tan z}{\left(e^{mz} - 1\right)^2}$

$f(z) = \frac{\tan z}{\left(e^z - 1\right)^3}$ ثم طبق نظرية ميثاق لوفلر لاثبات صحة الدستور : $\cot g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$ ثم استنتج صحة النشر ميثاق لوفلر:

$$\cot g(z) - \frac{1}{z} = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$

التمرين الخامس $f(z)$ دالة معطاة معلومه فان :

$$\sum_{n-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{\lambda \in Poles(f)} \operatorname{Re}s\left(\pi \cot g \pi z f(z), \lambda\right)$$

استنتج صحة النشر بتطبيق نظرية ميثاق لوفلر لنثبت من اجل $a > 0$ أن : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \pi^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$ ثم تأكد بنف آلية ميثاق لوفلو صحة النشر الموالي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \pi^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{\pi}{a} \coth \pi a.\right)$.

التمرين السادس لنشر الدالة : $f(z) = \frac{\pi}{z^3 \cos \pi z}$ ميثاق لوفلريا أحسب الراسب عند الصفر.ثم الرواسب عند بقية الأقطاب واستنتج أن: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{32}$.

أثبت كذلك صحة المساواة $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$.يمكن الاستعانة بالدالة $f(z) = \frac{1}{(z+a)^2}$ ذات القطب المضاعف الوحيد $z = -a$.

طبق نظرية ميتــــــــاق لوفــلر لا ثبات أن :

$$\frac{\pi}{\tan(\pi . z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\right):$$

أثبت أن : $-\left(\frac{\pi}{\sin(\pi.z)}\right)^2=-\frac{1}{z^2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ أثبت أن : $\frac{\pi}{\cos(\pi.z)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-z^2}-\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-z^2}+\frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2-z^2}-\frac{7}{\left(\frac{7}{2}\right)^2-z^2}.........$

و $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}=\frac{1}{\cos^2 z}$.

التمرين السابع الجداء غير المنته $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|w_n|)$ متقارب بحيث $w_n\neq -1, n=1,2,3......$ متقارب اذا وفقط : $\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|<\infty$ الجداء اللامنته $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ متقاربين اذا وفقط $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty$ لما $p>1$. أثبت التقارب للجداء اللامنتـــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$ و $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{n+1}{2^n}\right)$ ثم أحسب قيمته و استنتج حسابا للجداء اللامنتـــــــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

باستخدام مكاملة احدى دساتير نشور ميثاق لوفلر السابقة أثبت صحة عبارة الدوال الجداءات اللامتناهيه لمتغير مركب:

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),\ \cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right),\ \sinh z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),\ \cosh z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

التمرين الثامن نعتبر $f_n(z)\neq -1, n=1,2,3.......$ متتالية دوال هولومورفية على الجموعة $\forall z\in\Omega$ من $\mathbb{C}$ بحيث : $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|<\infty$

فان $\forall z\in D\subset\Omega$ من $\mathbb{C}$ مفتوح : $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ متقارب مطلقا.

على كل $\forall z\in\Delta\subset\Omega$ من $\mathbb{C}$ لا يشمل اي صفر من أصفار $f_n(z), n=1,2,3.......$ فان : $\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$.

التمرين التاسع (جداء بلاشك Produit de Blaschke) $(a_n)_{n=1,2,3.....}$ متتالية من $\mathbb{C}$ عناصر من القرص الوحدة $D(0,1)=\{z,|z|<1\}$ نعرف الجداء الامنته لبلاشك على القرص الوحدة $D=\{z,|z|<1\}$ الدالة : $z\mapsto B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}\frac{|a_n|}{a_n}$ بحيث $a\in D$ يسمى جداء بلاشك وهو جداء متقارب هولومورفي على القرص الوحدة $D=\{z,|z|<1\}$ فقط لما يتحقق شرط بلاشك : $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$.جداء **بلاشك** يحقق الخواص :

1. $|z|<1\Rightarrow|B(z)|<1$
2. $|B(e^{i\theta})|=1:\ \forall\theta\in[-\pi\quad\pi]$
3. لا يقبل أصفارا بسيطة غير $(a_n)_{n=1,2,3.....}$.
4. $\forall z\in D\subset\Omega:\ \frac{B'(z)}{B(z)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)(a_n-z)}$

على سبيل المثال بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}<\infty$ فان جداء **بلاشك** : $B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}}{1-\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}z}$ متقارب $\forall z\in D(0,1)$ وهولومورفي على القرص الوحدة $D(0,1)$ ويحقق المحدودية : : $z\in D(0,1)\subset\mathbb{C}$.المحدودية الآتية :

$$|z|<1\Rightarrow|B(z)|=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left|z-\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}\right|}{\left|1-\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right|}<1$$

أحسب عبارة الدالة المشتقة لها $B'(z)$ ثم عبارة الدالة المشتقه الثانيه $B''(z)$.

أوجد عبارات جداء بلاشك $B\circ B(z)$ و $B\circ\varphi(z)$ بحيث $\varphi(z)$ تحويل هولومورفي محدود على القرص الوحدة كيفي .استنتج محدوديته على القرص الوحدة.

أحسب عبارة المشتقة الهولومورفية

بالتوفيـــق