جامعة الشهيد حمـة لخضر — كلية العلوم الدقيقة

السنة الثانية ماستر رياضيات — قسم الرياضيات — تحليـــل مركـب

السلسلة الثالثة أعمال موجهة — **TD 3 en Analyse complexe** (2021) — د.عبد الحميد رحومه

التمرين الأول. التحويـل المركب $f(z)=2z+\frac{1}{2z}+1+i$ أوجد نطاق الهولومورفية ثم أثبت هولومورفية $f(z)$ أحسب المشتقة الأولى لها ..ليكن المستطيل المملوء : $D=\{z/1\le \operatorname{Re} z\le 2, 2\le \operatorname{Im} z\le 3\}$. أثبت أن $f(z)$ محدودة على D أي : $\forall z\in D:\exists M>0, |f(z)|\le M$.

.اوجد.صور المستقيمات الشاقولية $C=\{z, \operatorname{Re} z=c\}$ بواسطة التحويل $w=f(z)=z^2$ هي قطوع مكافئة يطلب تحديد معادلتها ورسمها. صور المستقيمات الافقية $C=\{z, \operatorname{Im} z=d\}$ بواسطة التحويل $w=g(z)=2z^2+4$ هي قطوع مكافئة يطلب تحديد معادلتها ورسمها.اثبت صحة المتباينات $|\sin z|\ge \frac{1}{2}|e^y-e^{-y}|$ و $|\tan z|\ge \frac{|e^y-e^{-y}|}{|e^y+e^{-y}|}$ من اجل $z=x+iy$.ماهي صوور القطاع أواتحاد الشريحتين من $\mathbb{C}$ وهي $\{z=x+iy, |y|\ge 1\}$ بواسطة هده الدوال المثلثيه المركبه.

لتمرين الثاني 1..أوجد نشر تايلر للدالة $f(z)=\log(1+z)$ على القرص المفتوح $|z|<1$: استنتج المحدودية : $\left|1-\frac{\log(1+z)}{z}\right|\le \frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|}$.

أثبت أن : $|z|<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}|z|\le|\log(1+z)|\le\frac{3}{2}|z|$ ماذا تستنتـــــج بالنسبة للمجموعة الصورة.. f دالة تحليليه نشوره بصيغة تايلر $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ على القرص $|z|\le r$ وتحقق الخاصية المحدودية : $\exists M>0, \exists r_0>0, r_0\le r, |z|\le r_0\Rightarrow |f(z)|\le M$ كيف تحسب معاملات النشر a_n .أثبت المحدودية الآتية : $|a_n|\le Mr^{-n}$ لكل n عدد طبيعي .

2 أثبت أن صور الدوائر $D(0,r)=\{z, |z|=r\}, r>1$ بواسطة التحويل $f(z)=\frac{z^4+iz}{z^2+z+1}$ هي دوائر مضاعفه (Annulus) يطلب تحديدها.

التمرين الثالث . نعتبر الدالة المركبــــــة الهولومورفية f على المفتوح $U=\{|z|<r\}$ من مجموعة الأعداد المركبة C ليكن $z_0\in U$ و $r>0$ باستخدام دستـور كـــوشي بين ما يلي : $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{r^n e^{int}}dt$ استنتـج المتباينـــة $\forall n\in N: |f^{(n)}(z_0)|=\frac{n!}{r^n}\underset{0\le t\le 2\pi}{Sup}|f(z_0+re^{it})|$ طبق ما سبق للبرهان أن كل دالة f هولومورفيـة (entière) محدودة بـ $M>0$ فهي ثــــــابته.(نظرية **ليـوفيل**).

التمرين الرابع D المترابط ببساطة الذي حافته C كانتور مغلق نفرض أن $f(z)$ هولومورفية على D كيف تثبت أن $\oint_C f(z)dz=0$. هـات أمثلة مفيدة تبين أهمية قانون **كوشي-قرين** أعلاه.باستخدام نشـــــور لـوران أحسب الراسبين : $\lambda=\underset{z=0}{\operatorname{Re}s}.(1-z^3)\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ ورواسب الدلبة $f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$ نعتبر الدالة $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ تقبل $z=z_0$ كقطب بسيط بمعنى $\psi(z_0)=0$ و $\psi'(z_0)\ne 0$ فان : $\operatorname{Re}s(f,z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.أثبت أن معاملات النشر الآتـي : $\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$ تحقق العلاقة التراجعية : $C_n=C_{n-1}+C_{n-2}$ أحسب الراسب عند كل قطب للدالتين $f(z)=z^3\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ و $f(z)=\frac{(z+i)\sin z}{\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$.

التمرين الخامس لنثبت أن $\left|\int_C \frac{zdz}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right|\le\frac{18\pi}{5}$, C القوس من الدائرة $|z|=3$ الرابط بين النقطتين $z=3$ و $z=3i$. نعتبـــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 .نعتبـــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 . أحسب التكـــــــامل المركب ، w عدد مركب: $H(w)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Omega \frac{z\exp(zw)}{(z^2+\pi^2)^2}dz$ هل أن H هولومورفيـــــة , لمـــــاذا ؟ أحسب $H'(w)$ ؟ استنتــــج حسابـــا لـ : $\frac{1}{2i\pi}\int_\Omega\frac{z^2\exp(zw)}{(z^2+\pi^2)^2}dz$ ؟

التمرين السادس نعتبــر التكامل العددي الحقيقي $J=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$. وضح أولا كيف تحسب هذا التكامل بتحويله الى تكامل مركب على دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها. نبين طبيعة كل قطب من الأقطاب الثلاثة للدالة المركبة تحت التكامل و انتمائه للــدائرة السابقة المتحصل عليها ثم استنتج بشكل مفصــــل قيمــــــــــة J .

.أحسب التكاملان الجيبيان : $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ ..وضح أولا كيف تحسب هذا التكامل بتحويله الى تكامل مركب على دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرهــا ثم بين طبيعة كل قطب للدالة المركبة تحت التكامل و انتمائه للــدائرة السابقة المتحصل عليها ثم استنتج بشكـــــل مفصـــل قيمـــــة التكــــامل I.

أحسببنفس التوجيهات التكامل الجيبي : $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$ بحيث $a>b>0$. أثبت أن $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}=\frac{5\pi}{32}$.

أثبت أن $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},(a>|b|)$.

التمرين السابع .بين باستخدام احدى النظريات المعروفة أن جميع جذور المعادلة: $z^9-5z^3+12=0$ تقع بين الدائرتين: $|z|=1$ و $|z|=3$. (الجذور تقع خارج الدائرة $|z|=1$ وداخل الدائرة $|z|=3$). يطلب التأكـــد بشكل واضح و منهجــي من انتماء وعدد جذور المعادلة $12z^7-5z^3+80=0$ على نفس الدائرتين. يطلب التأكـــد بشكل واضح و منهجــي من انتماء وعدد جذور المعادلة $z^4-2z^3+z^2-12z+20=0$ على نفس الدائرة $|z|=1$.

أثبت أن كل جذور كثير الحدود ذو المتغير المركب $f(z)=5z^6-2z^5+z^2-12z+1$ تقع داخل القرص الوحدة أي $D(0,2)=\{z,|z|\le 2\}$

ثم احسب $\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ و $\frac{1}{2i\pi}\int_D z\frac{f'(z)}{f(z)}dz$.و $\frac{1}{2i\pi}\int_D z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

دون استخدام طريقة حساب الاقطاب، أحسب التكاملين : $\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ و $\frac{1}{2i\pi}\int_C(z^2+3z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ بحيث : $f(z)=\frac{(z^2+4)^3}{(z^2+iz+2)^7}$.نعتبر C الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 5. .

أحسب التكاملين : $\frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ و $\frac{1}{2i\pi}\int_D z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ بحيث $z^9-5z^3+12=0$.نعتبر D الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 3.

من اجل $k>0$ لنحسب التكاملين : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\exp(iax)}{x^2+k^2}dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x(x^2+k^2)}dx$ استنتج ما يلي : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx=\frac{\pi}{\exp(ak)}$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos ax}{x^2+k^2}dx=0$

وكذلك $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{(x^2+k^2)}dx=\frac{\pi}{2k^2}(1-\exp(ak))$. اثبت أن $\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m},m>0.$.

أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$, و $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx=-\pi e^{-2\pi}$, .

التمرين التاسع ليكن التابع $f_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Omega\frac{\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{z^{n+1}}dz$ بحيث الدائرة Ω مركزها 0 ونصف قطرها 1.أثبت أن : $f_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-\lambda\sin\theta)d\theta$

*يمكن استخدام المتطابقة : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(n\theta-\lambda\sin\theta)d\theta=0$ وهي سهلة الأثبات بتعويض θ ب $2\pi-\theta$ نتحصل على – التكامل.ماذا تمثل الكمية : $f_n(\lambda)$ بالنسبة للدالة الهولومورفية : $g(z)=\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$.علل أكثر فأكثر. اوجد نشورا تايلوريا للدالة $g_\lambda(z)=\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$.

كيف تبحث على المحدودية : $\exists M>0,\exists r_0>0, r_0\le r$,$|\lambda|\le r_0\Rightarrow|f_n(\lambda)|\le M$. نفس السؤال للدالة الهولومورفية : $g(z)=\exp\left(\frac{1}{2i}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$ و $f_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Omega\frac{\exp\left(\frac{1}{2i}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}{z^{n+1}}dz$.

بالتوفيـــــــــق