جامعة الشهيد حمـة لخضر	كلية العلوم الدقيقة

السنة الثانية ماستر رياضيات	قسم الرياضيات	تحليـل مركـب

أعمال موجهة السلسلة الثانية

TD 2 en Analyse complexe

د.عبد الحميـد رحومه

التمرين السادس : (تحويل **Borel**)

نعتبر الدالة التحليليه $z \mapsto w = f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ونرفق بها **محول بوريل** الدالة التحليليه $z \mapsto w = F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ بحيث $|z|<R$ لنفرض ان $M(\rho)=\max\{z,|z|=\rho,0<\rho<R\}$ و $\Gamma(\rho)=\{\{z,|z|=\rho,0<\rho<R\}\}$ فان $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

باستخدام احدى دساتير كوشي $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(\rho)}\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt$ مما يستلزم ان $|a_n|\le \frac{M(\rho)}{2\pi}\int_{\Gamma(\rho)}\frac{1}{|t|^{n+1}}|dt| = M(\rho)\rho^{-n}$

وبالتالي : $|F(z)|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n!}|z|^n \le M(\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \le M(\rho)\exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right)$ ومنه تحققت المتباينة من أجل $A(\rho)=M(\rho)$. فمحول بوريل لكل دالة تحليلية محدودة على القرص المحدود هي محدودة أيضا على نفس القرص المحدود.وعكسا لنفرض ان محول بوريل محدود أي أن $z \mapsto w = F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ تحقق $|F(z)|\le B\exp(k|z|)$باستخدام دستور كوشي على الدائرة $|z|=r$ فان $b_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!}$

$b_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(r)}\frac{F(t)}{t^{n+1}}dt$ مما يستلزم ان $|b_n|\le B\frac{e^{k.r}}{r^n}, n=0,1,2,3........$ على الدائرة $|z|=r$.ومنه

$|b_n|\le Min\left\{B\frac{e^{k.r}}{r^n}, n=0,1,2,3......\right\}$.. وبما ان $\left(B\frac{e^{k.r}}{r^n}\right)'=\left(Br^{-n}k-nBr^{-n-1}\right)e^{kr}, n=0,1,2,3........$ القيمة الحدية لما $r={n}/{k}$ وتساوي $Bn^nk^{-n}e^n, n=0,1,2,3.$ .... $Bn^{-n}k^ne^n=B\left(\frac{ke}{n}\right)^n, n=0,1,2,3.......$ ومنه لاختبار تقارب $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

$n!|b_n|=Bn!\left(\frac{ke}{n}\right)^n, n=0,1,2,3.......$ حسب معيار دالمبر السلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{\infty} n!b_nz^n$ متقاربة مطلقاعلى $|z|<\frac{1}{k}$.أي المحول العكسي لبوريل للدالة التحليليه $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ هو $z \mapsto w = f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n!b_nz^n$.و هي محدودة أيضا على نفس القرص المحدود المعرف أعلاه.

التمرين السابع نعتبر Ω الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها r والدالة : $\Xi(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Omega}\frac{z^{n}\exp(zt)}{n!t^{n+1}}dt$ باستخدام دستور كوشي

$\Xi(z)=\frac{z^{n}}{(n!)^{2}}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(\exp(zt))_{t=0}=\frac{z^{2n}}{(n!)^{2}}$ معامل نشر فوريبه للدالة $\exp(tz)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{n}$ هو بالفعل

$a_{n}=\frac{1}{n!}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(\exp(zt))_{t=0}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Omega}\frac{\exp(zt)}{t^{n+1}}dt$ مما يستلزم حسب متطابقة بارسفال : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(2z\cos\theta)d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n}}{n!}\right)^{2}$.

التمرين الثامن لما $|z|<1$ فان : $|t|=1\Rightarrow|1-t\bar{z}|=\overline{|1-t\bar{z}|}=|t||1-\bar{t}z|=|\overline{t-z}|=|t-z|$. لنفسر هذه الظاهرة للحظات قليله :

$|t|=1\Rightarrow|1-t\bar{z}|=|t-z|\Rightarrow\left|\frac{t-z}{1-t\bar{z}}\right|=1$ معناه تحويل بلاشك $t\mapsto b(t)=\frac{t-z}{1-t\bar{z}}$ يحول الدوائر الوحدة الى دوائر وحدة وهو تحويل

هوموغرافي (تحويل هولومورفي كسري ناطق درجة البسط تساوي درجة المقام وتساوي 1) وكونفورم Conforme فهو يحول القرص الوحدة

$|t|<1$ الى قرص وحدة $|w|<1$ بحيث $w=b(t)$. لنتصور معا $|t|=1\Rightarrow t=e^{i\theta},-\pi\le\theta\le\pi\Rightarrow dt=ie^{i\theta}d\theta$ f هولومورفية على

$|z|<1$ القرص الوحدة الذي مركزه 0 ونصف قطره 1 باستخدام دستور كوشي : $[(1-t\bar{z})f(t)]_{t=z}=\frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1}\frac{1-t\bar{z}}{t-z}f(t)dt$ ومنه باستخدام

ميزة تويل بلاشك فان : $\left|1-|z|^{2}f(z)\right|=\left(1-|z|^{2}\right)|f(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}|f(t)|\left|\frac{t-z}{1-t\bar{z}}\right||dt|=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}|f(t)||dt|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|d\theta=K_{f}$

لنكتشف احدى خواص الدوال الهولومورفية على القرص الوحدة وهي : $f\in H(|z|<1)\Rightarrow|f(z)|=\frac{K_{f}}{1-|z|^{2}}$ لكل $|z|<1$.

بوضع $|z|=\rho<1$ $z=\mathrm{Re}^{i\theta},0\le R\le\rho,-\pi\le\theta\le\pi$ فان لما $|z|=\rho<1$

$$f\in H(|z|<1)\Rightarrow\iint_{|z|\le\rho}|f(z)|dxdy=K_{f}\iint_{|x+iy|=\rho}\frac{dxdy}{1-|x+iy|^{2}}\le K_{f}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\rho}\frac{RdRd\theta}{1-R^{2}}=-\pi K_{f}\left(\ln(1-R^{2})\right)_{0}^{\rho}=-\pi K_{f}\ln(1-\rho^{2})$$

لنعاود الكرة للمرة الثانية : $f\in H(|z|<1)\Rightarrow|f(z)|^{2}=\frac{K_{f}^{2}}{\left(1-|z|^{2}\right)^{2}}$ لكل $|z|<1$. مما يستلزم امكانية محدودية مساحة طويلة مربع f

$$f\in H(|z|<1)\Rightarrow\iint_{|z|\le\rho}|f(z)|^{2}dxdy=K_{f}^{2}\iint_{|x+iy|=\rho}\frac{dxdy}{\left(1-|x+iy|^{2}\right)^{2}}\le K_{f}^{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\rho}\frac{RdRd\theta}{\left(1-R^{2}\right)^{2}}$$

$$\iint_{|z|\le\rho}|f(z)|^{2}dxdy=K_{f}^{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\rho}\frac{RdRd\theta}{\left(1-R^{2}\right)^{2}}=\pi K_{f}\left(\left(1-R^{2}\right)^{-1}\right)_{0}^{\rho}=\pi K_{f}\left(-1+\left(1-\rho^{2}\right)^{-1}\right)$$

بالاستفادة من هذه التجارب يمكن ايجاد محدووية لمساحة مربع مشتقة f الهولومورفية $\left[\frac{d}{dt}(1-t\bar{z})f(t)\right]_{t=z}=\frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1}\frac{1-t\bar{z}}{(t-z)^{2}}f(t)dt$

ولكن $\left[\frac{d}{dt}(1-t\bar{z})f(t)\right]_{t=z}=-\bar{z}f(z)+\left(1-|z|^{2}\right)f'(z)$ ومنه $-\bar{z}f(z)+\left(1-|z|^{2}\right)f'(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1}\frac{1-t\bar{z}}{(t-z)^{2}}f(t)dt$ ومنه

باستخدام ميزة تويل بلاشك فان : $\left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \le |z||f(z)| + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{|f(t)|}{|t-z|}\left|\frac{t-z}{1-\bar{t}z}\right||dt| \le |f(z)| + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{|f(t)|}{|t-z|}|dt|$

$$\Rightarrow \left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \le |f(z)| + \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}|f(t)|^2|dt|}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{|dt|}{|t-z|^2}}$$

$$\Rightarrow \left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \le |f(z)| + \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\left|e^{i\theta}-z\right|^2}}$$

$$K=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}, L=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\left|e^{i\theta}-z\right|^2}} \Rightarrow |f'(z)| \le \frac{|f(z)|}{1-|z|^2}+\frac{KL}{1-|z|^2}$$

يمكن ايجاد محدودية بطريقة أقصر وهي

$$\Rightarrow |f'(z)| \le \frac{|f(z)|}{1-|z|^2}+\frac{KL}{1-|z|^2} \Rightarrow |f'(z)| \le \frac{\delta}{1-|z|^2}+\frac{KL}{1-|z|^2} \Rightarrow \iint_{|z|\le\rho}|f'(z)|^2 dxdy = (\delta+KL)^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\rho}\frac{RdRd\theta}{\left(1-R^2\right)^2}$$

ممكن اختبار الطريقة : $|z|=\rho<1$ بوضع $z=\mathrm{Re}^{i\theta}, 0\le R\le\rho, -\pi\le\theta\le\pi$ فان لما $|z|=\rho<1$

$$\Rightarrow \iint_{|z|\le\rho}\left|\frac{z}{1-z^2}\right|dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\rho}\left|\frac{R.e^{i\theta}}{1-R^2.e^{i2\theta}}\right|RdRd\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\rho}\left|\frac{R^2.}{e^{-i\theta}-R^2.e^{i\theta}}\right|dRd\theta$$

التمرين التاسع Ω القطع الناقص ذو المعادلة الديكارتية $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ **لما** $z=x+iy$ فان المعادلة القطبيه لقطع الناقص $6=|z-1|+|z+1|$ وهي نفس المعادلة الهندسية للقطع الناقص الذي بؤرتيه النقطتين A و B صورتي العددين المركبين z_A و z_B فمعادلتي القطع الناقص Ω هما $\left\{z(x+iy):|z-z_A|+|z-z_B|=C\right\} \Leftrightarrow \Omega=\left\{M(x,y):MA+MB=C\right\}$**.** او نتحقق من ذلك مباشرة

$$|x-1+iy|+|x+1+iy|=6 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=36+(x+1)^2+y^2-12\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2-36-(x+1)^2=12\sqrt{(x+1)^2+y^2}=36-4x \Rightarrow 144\left((x+1)^2+y^2\right)=4(9-x)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$$

نلخص قانون المساحة كالآتي :

$$x=3cos\theta, y=2\sqrt{2}\,sin\theta, dx=-3sin\theta d\theta, dy=2\sqrt{2}\,cos\theta d\theta$$

$0\le\theta\le2\pi$, بتطبيق دستور قرين $\oint_C p(x,y)dx+q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$

فان $\iint_\Omega(4x^3-2xy)\,dxdy=\oint_C xy^2dx+x^4dy=-72\int_0^{2\pi}cos\theta sin^3\theta d\theta+162\sqrt{2}\int_0^{2\pi}cos^5\theta d\theta$

القرص الذي نصف قطره r. $D=\left\{(x,y):0\le x^2+y^2\le r^2\right\}$ الذي حافته الدائرة : $C=\left\{(x,y):x^2+y^2=r^2\right\}$

نلخص قانون المساحة كالآتي : $x = rcos\theta, y = rsin\theta, x = rcos\theta, y = rsin\theta, dx = -rsin\theta d\theta, dy = rcos\theta d\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$, بتطبيق دستور قرين $\oint_C \ p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_D \ \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy$

فان $\iint_D \ (4x^3 - 2xy)\, dxdy = \oint_C \ xy^2 dx + x^4 dy = -r^4 \int_0^{2\pi} cos\theta sin^3 \theta d\theta + r^5 \int_0^{2\pi} cos^5\theta d\theta$

$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-i|=2\pi}\frac{\cos z}{z^2(z+i\pi)^3}dz = \frac{d}{dz}\left[\frac{\cos z}{(z+i\pi)^3}\right]_{z=0} + \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\cos z}{z^2}\right]_{z=-i\pi}$ لأن $|-i\pi - i| = |1+\pi| < 2\pi$ و $|0-i| = 1 < 2\pi$.

$C = \{(x,y): x^2+y^2=4\}$ فان $\left|\int_C \frac{\exp(z)}{1+z^2}dz\right| \le \int_C \frac{|\exp(z)|}{\left|1-|z|^2\right|}|dz| \le \frac{e^2}{3}\int_C |dz| = \frac{4\pi}{3}e^2$.

التمرين العاشر نفرض أن $f_n(z) = \prod_{k=1}^n (z-a_k)$ والتي جذورها بسيطة .ليكن $|a_k| < R, k = 1,2,3.....n$ على الكانتور $|z| = R$

$$\int_{|z|=R}\frac{dz}{f_n(z)} = 2i\pi\sum_{k=1}^n \mathrm{Re}\,s\left\{\frac{1}{f_n(z)}, a_k\right\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^n (a_k - a_j)}$$

كل كثير حدود مركب $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ يملك جذرا مركبا على الاقل .بالفعل لنفرض مؤقتا كثير الحدود $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ فهو يخلف عن الصفر دوما على احدى الدوائر $|z| = r > 1$

$$\frac{1}{|P_n(z)|} = \frac{1}{\left|\sum_{k=0}^n a_k z^k\right|} \le \frac{1}{r^n}\frac{1}{|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{r} - \dots \frac{|a_0|}{r}} \le \frac{1}{r^n}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

مما يستلزم $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ثابت تناقض. ومنه

$$Lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{dz}{f_n(z)} = Lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\int_{|z|=R}\frac{1}{|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{R} - \dots \frac{|a_0|}{R}} = 0 \Rightarrow = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^n (a_k - a_j)} = 0.$$

$$(n-1)!\int_C \frac{f^{(m)}(t)}{(t-z_0)^n}dt = 2i\pi . f^{(m+n-1)}(z_0) = (m+n-1)!\int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+n}}dt$$

$$\Rightarrow (n-1)!\int_C \frac{f^{(m)}(t)}{(t-z_0)^n}dt = (m+n-1)!\int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+n}}dt \Rightarrow \frac{\int_C \frac{f^{(m)}(t)}{(t-z_0)^n}dt}{\int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{m+n}}dt} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!}$$