جامعة الشهيد حمــة لخضر **كلية العلوم الدقيقة**

السنة الثانية ماستر رياضيات **قسم الرياضيات** **تحليــل مركـب**

أعمال موجهة السلسلة الأولى

TD 1 en Analyse complexe

د.عبد الحميــد رحومه

التمرين الأول : المؤثران التفاضليان : $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

بالفعل : $z = x + iy$ فان $\bar{z} = x - iy$ وبالتالي : $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

وعليه الدالة f هولومورفيه اذا وفقط : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$ ومشتقتها تعطى بالقانون : $f'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

ملاحظة : عن طريق نفس المؤثرين التفاضليين $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ يمكن الحصول على مؤثر لابلاص :

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- لاثبات عدم الهولومورقية للدالة $f(z) = \frac{\bar{z}^3}{z^2}$ لدينا $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\bar{z}^3}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{(x - iy)^3}{x^2 - y^2 + i2xy}\right) = 3\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 \neq 0.$

بنفس الطريقة يمكن اثباتت عدم هولومورفية الدالة $f(z) = \frac{\bar{z}^2}{|z|}$ بالفعل لما : $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(|z|) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\sqrt{z\bar{z}}\right) = \frac{z}{2|z|}$ فان :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\bar{z}^{2}}{|z|}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{(x-iy)^{2}}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}\right)=\frac{2|z|\bar{z}-\frac{z\bar{z}^{2}}{2|z|}}{|z|^{2}}=3\frac{\bar{z}}{|z|}\neq 0$$

- لايجاد مجال الهولومورفية للدالة $g(z)=\tan^{-1}(z)=\frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$ الفرع الذي لا يعرف $\tan^{-1}(z)$ هو بالتالي

$$\left\{z,\frac{i+z}{i-z}=w\in\ ]-\infty\quad 0]\cup\left\{z,z=i\frac{w-1}{w+1},w\in\ ]-\infty\quad 0]\ \right\}\right.$$

بالفعل $z=i\frac{w-1}{w+1}$ فان $\operatorname{Re}z=0$ و لما $w\in\ ]-\infty\quad 0]$ فان $\frac{w-1}{w+1}=1-\frac{2}{1+w}\in\ ]-\infty\quad -1[\ \cup[1\quad\infty[$

لان $w>-1\Rightarrow 1+w>0$ ومنه $\tan^{-1}(z)$ هولومورفية على المجموعة $\mathbb{C}\ ]-\infty-\{z,\operatorname{Re}z=0,\operatorname{Im}z\in\ -1[\ \cup[1\quad\infty[\ \}$..

طريقة أولى لاثبات $i^{n-p}f^{(n)}(z)=\frac{\partial^{n}g}{\partial x^{p}\partial y^{n-p}}(x,y)$

f هولوومورفية و $g(x,y)=f(z)=f(x+iy)$ فان $f(z+u+iv)-f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(u+iv)^{n}}{n!}f^{(n)}(z)$ وعليه وبما أن :

$f(z+u+iv)-f(z)=g(x+u,y+v)-g(x,y)$ فان $g(x+u,y+v)-g(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}C_{p}^{n}u^{p}(iv)^{n-p}f^{(n)}(z)$ وحسب

دستور نشر تايلر لمتغيرين $\left(u\frac{\partial g}{\partial x}+v\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{(n)}(u,v)=\sum_{p=0}^{n}C_{p}^{n}\frac{\partial^{n}g(x,y)}{\partial x^{p}\partial y^{n-p}}u^{p}v^{n-p}=\sum_{p=0}^{n}C_{p}^{n}u^{p}(iv)^{n-p}f^{(n)}(z)$

مما يستلزم $i^{n-p}f^{(n)}(z)=\frac{\partial^{n}g}{\partial x^{p}\partial y^{n-p}}(x,y)$ أي $i^{q}f^{(p+q)}(z)=\frac{\partial^{p+q}g}{\partial x^{p}\partial y^{q}}(x,y)$ وهذا لما $z=x+iy$. على سبيل المثال لا الحصر

$f''(z)=f''(x+iy)=-i\frac{\partial^{2}g}{\partial x\partial y}(x,y)$.

طريقة ثانية لاثبات أن $i^{n-p}f^{(n)}(z)=\frac{\partial^{n}g}{\partial x^{p}\partial y^{n-p}}(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

وبما أن f هولومورفية فان $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ مما يستلزم أن : $\frac{\partial^{p+q}g}{\partial x^{p}\partial y^{q}}(x,y)=i^{q}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{q}f(z)=i^{q}f^{(p+q)}(z)$.

- اثبات هولومورفية الدالة $\sin z$ و $\cos z$ وحساب المشتقتين

$$\frac{\partial\sin z}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sin z}{\partial x}+i\frac{\partial\sin z}{\partial y}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\sin z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sin z}{\partial x}-i\frac{\partial\sin z}{\partial y}\right)=\cos z$$

$$\frac{\partial\cos z}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\cos z}{\partial x}+i\frac{\partial\cos z}{\partial y}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\cos z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\cos z}{\partial x}-i\frac{\partial\cos z}{\partial y}\right)=-\sin z$$

لدينا $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ و $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ فانه يمكن التأكد من المشتقات .كذلك $\cos iz=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\cosh z$

$-i\sin iz=\dfrac{e^{-z}-e^{z}}{2}=\sinh z$ و $\left|\sin(x+iy)\right|^2=\left|\sin x\cos iy+\cos x\sin iy\right|^2=\left|\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y\right|^2$

$$\left|\cos(x+iy)\right|^2=\left|\cos x\cos iy-\sin x\sin iy\right|^2=\left|\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y\right|^2$$

مما يستلزم أن : $\left|\tan(x+iy)\right|=\dfrac{\left|\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y\right|}{\left|\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y\right|}$..

$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ لنبحث عن المحدودية من اجل $z=x+iy$ ولكن $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}$ فان $\left|\sin z\right|=\dfrac{\left|e^{iz}\right|-\left|e^{-iz}\right|}{2}$ او $\left|\sin z\right|\geq\dfrac{\left|e^{y}-e^{-y}\right|}{2}$

وكذلك $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ فان $\left|\cos z\right|\leq\dfrac{\left|e^{iz}\right|+\left|e^{-iz}\right|}{2}$ومه $\left|\cos z\right|\leq\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ من اجل $z=x+iy$.والخلاصه أن :

$\left|\cos z\right|\leq\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}$و $\left|\sin z\right|\geq\dfrac{\left|e^{y}-e^{-y}\right|}{2}$ من اجل $z=x+iy$.مما يستلزم $\left|\tan z\right|\geq\dfrac{\left|e^{y}-e^{-y}\right|}{e^{y}+e^{-y}}$ من اجل $z=x+iy$.

لما $z=x+iy$ بحيث $\left|y\right|\geq 1$.فان $\left|\sin z\right|\geq\dfrac{\left|e-e^{-1}\right|}{2}$ و$\left|\cos z\right|\leq\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ و $\left|\tan z\right|\geq\dfrac{\left|e-e^{-1}\right|}{e+e^{-1}}$.

التمرين الثاني

- حسب ما سبق لدينا : $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar{z}}=4\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}\right)$ ومنه :

$$\Delta f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left|f(z)\right|^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(z)\overline{f(z)}=4\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial f(z)\overline{f(z)}}{\partial z}\right)=4f'(z)\overline{f'(z)}=4\left|f'(z)\right|^2$$

وحسب شروط كوشي ريمان محققة فان الدالة $f=u+iv$ هولومورفيه عند النقطة $z=x+iy$ اذا تحققت شروط **كـــــوشي ريمان** :وفي هذه الحالة $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ وبالتالي $\left|f'(z)\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$ وهو بالضبط أي $\left|f'(z)\right|^2$ يعقوبية التبديل $w=f(z)=u+iv$

بالغعل $J_z=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$ ومنه حسب شروط كوشي رمان $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ فان :

$$J_z=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|f'(z)\right|^2 .$$

ومنه في حالة $w=f(z)=u+iv$ يحول D_z الذي حافته المغلقة الكانتور C_z الى E_w الذي حافته L_w ذو الطول l_w الذي يحقق

$$l_w=\int_{L_w}\left|dw\right|=\int_{C_z}\left|f'(z)\right|\left|dz\right|$$

مساحة E_w ومساحة D_z تحققان

$$A=\iint_{E_w} dudv=\iint_{D_z} |f'(z)|^2 dxdy$$

ومنه لما $\Phi=\Phi(x(u,v),y(u,v))$ و $z=x+iy,$ و $f(z)=u+iv,$ فان $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)$.

- **الاحداثيات القطبيه** $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta \Leftrightarrow z=x+iy=re^{i\theta}$ وحيث أن :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

شروط ك. ر $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ تكافؤ $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$.ومنه : $zf'(z)=r\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial v}{\partial \theta}-i\frac{\partial u}{\partial \theta}$

وايضا $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \Leftarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$ و $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0$.

مثلا . $f(z)=\sqrt{z}$ هولومورفية حسب الفرع الذي عمدنه محصورة $0\le \arg z\le 2\pi$ $z=x+iy=re^{i\theta}$ (الدورة الأولى) فان

$$\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{r}}=\frac{\partial u}{\partial r},\ 0=\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial r}r-=\frac{\partial v}{\partial r}r-=\left(\sqrt{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta},\ \frac{1}{2\sqrt{z}}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\frac{r}{z}=f'(z)$$

مثلا . $f(z)=\log z$ هولومورفية حسب الفرع الذي عمدنه محصورة $0\le \arg z<\pi$, $z=x+iy=re^{i\theta}$ فان

$$\ln z=\ln\sqrt{x^2+y^2}+iarctg\left(\frac{y}{x}\right)=\ln re^{i\theta}=\ln r+i\theta$$ ومنه $$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\theta)=\frac{1}{r}=\frac{\partial u}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial \theta}(r)=-r\frac{\partial}{\partial r}(\theta)=0$$

$zf'(z)=1$ ومنه $f'(z)=\frac{1}{z}$ بحيث $z\in\mathbb{C}-\{0\}$.ومنه $|f'(re^{i\theta})|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2$.

- لتكن الدالة $u(x,y)=y^3-3x^2y$ نثبت أنها توافقيه ثم نوجد عبارة الدالة $v(x,y)$ المرافقه التوافقيه لها بحيث $f=u+iv$

هولومورفيه. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y$, $\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2$ ومنه $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

وبالتالي الدالة $u=y^3-3x^2y$ توافقيه. عندئذ توجد دالة v مرافقة توافقيه لها (بمعنى يحققان شرطي كوشي ريمان) بحيث أن $f=u+iv$ دالة هولومورفية على $D\subset\mathbb{C}$.بحيث أن : $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.وعليه : $\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+3x^2$ لنكامل الشرط الأول أعلاه بالنسبة لـ y : $v=-3xy^2+C(x)$ باشتقاق طرفي هذه المادلة بالنسبه لـ x و استخدام الشرط الثاني لــ ك.ر $\frac{\partial v}{\partial x}=C'(x)=-3y^2+3x^2$

ومنه : $C'(x)=3x^2\Rightarrow C(x)=x^3+c$ وعليه : $v=-3xy^2+x^3+c$ ومنه $f'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ بالنسبه لعبارة $f=u+iv$ فهي: $f(x+iy)=y^3-3x^2y+i(-3xy^2+x^3+c)=i(z^3+c)$

- بالطبع $f=\lambda\overline{f}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}=0\Rightarrow f=Cte$

التمرين الثالث $f(z)$ هولومورفية على القرص $D(0,R)=\{z,|z\leq R|\}$ وتحقق $|f(z)|\leq\frac{M}{|y|}$ لما $z=x+iy\in D(0,R)$ لنعتبر الدالة المساعدة $g(z)=(z^2-R^2)f(z)$ فانه لما $z=\mathrm{Re}^{i\theta}$ فان $|z^2-R^2|=R^2|e^{2i\theta}-1|=R^2|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|=2R^2\sin\theta=2R|y|$

باستخدام الشرط أعلاه فان $|g(z)|\leq 2MR$ وهذا لكل $z=\mathrm{Re}^{i\theta}$ أي لكل $|z|=R$.حسب مبدأ القيمة العظمى (م.ق.ع) فان $|g(z)|\leq 2MR$

لكل $z\in D(0,R)=\{z,|z\leq R|\}$. لما $|z|\leq\frac{R}{2}$ و حيث $\left||z|^2-R^2\right|=|z-R||z+R|\geq\left||z|-R\right|(|z|+R)\geq\frac{R}{2}\frac{3R}{2}=\frac{3R^2}{4}$

مما يستلزم أن $|f(z)|\leq\frac{8}{3}\frac{M}{R}$ لكل $z\in D(0,R)=\{z,|z\leq R|\}$.القيمة العظمى للدالة $f(z)$ هي بالضبط $\frac{8}{3}\frac{M}{R}$ على القرص $D(0,R)$.

- كل دالة هولومورفية محدودة على القرص $D(0,R)$.فهي ثابيه على $\mathbb{C}$ قاطبة.

التمرين الرابع $f(z)$ هولومورفية على القرص الوحدة $D(0,1)=\{z,|z\leq 1|\}$ وتحقق $f(0)=0$ وتحقق $|f'(z)|\leq M$ لكل $z\in D(0,1)$

لاثبات صحة المتباينة نعتبر الدالة المساعدة $g(z)=\frac{1}{2M}(f'(z)-f'(0))$ الدالة $g(z)$ هولومورفية على القرص الوحدة $D(0,1)$.وتنعدم عند الصفر أي $g(0)=0$ ومحدودة $|g(z)|\leq 1$ على القرص الوحدة $D(0,1)$.فهي تحقق كل شروط توطئة شوارز وعليه : $|g(z)|\leq|z|$

لكل $z\in D(0,1)$.مما يستلزم أن : $|f'(z)-f'(0)|\leq 2M|z|$ لكل $z\in D(0,1)$.

لاثبات صحة المتباينة الثانية نستخدم الدالتين المساعدتين $H(z)=f(z)-zf'(0)$ و $k(t)=H(tz)$ بحيث $0\leq t\leq 1$ مما يستلزم $|k'(t)|=|zH'(tz)|\leq 2Mt|z|^2$ حسب نظرية التزايدات المنتهية بحيث $0\leq t\leq 1$ فان $|k(1)-k(0)|\leq M|z|^2$ لكل $z\in D(0,1)$.أي أن $|f(z)-zf'(0)|\leq M|z|^2$ لكل $z\in D(0,1)$.الدالة $g(z)=\frac{e^{iz}}{1+z+z^2}=u+iv$ هولومورفية بالفعل $\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+i\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0$, $g'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-i\frac{\partial g}{\partial y}\right)$ على المجموعة $\{z,|z|=R,\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ وأيضا $1+z+z^2\neq 0\Rightarrow z\in\left\{z_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$.وبالتالي :

ومنه $\left|\frac{e^{iz}}{1+z+z^2}\right|\leq\frac{1}{(R-1)^2}$, بالفعل $|z^2+z+1|=|z-z_1||z-z_2|\geq\left||z|-1\right|(|z|+1)=(R-1)^2$ مما يستلزم أن $\left|\frac{e^{iz}}{1+z+z^2}\right|\leq\frac{1}{(R-1)^2}$.وهذا لكل $\{z,|z|=R,\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ مثلا لو كاملنا هذه الدالة على الكانتور $C_R=\{z,|z|=R,\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$

وبجعل $R\to\infty$ فانه يؤول الى الصفر.أي $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{1+z+z^2}dz=0$.

- نقترح : $g(z)=a_0+a_1z+....+a_{n-1}z^{n-1}$ و $f(z)=a_nz^n$ ، و $C(0,r)=\{|z|=r\}$ بحيث $r>1$ من الواضح أن:

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|}=\left|\frac{a_0+a_1z+....+a_{n-1}z^{n-1}}{a_nz^n}\right|\leq\frac{|a_0|+|a_1|r+....+|a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n}\leq\frac{|a_0|r^{n-1}+|a_1|r^{n-1}+....+|a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n}$$

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|a_0|r^{n-1}+|a_1|r^{n-1}+....+|a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n} = \frac{|a_0|+|a_1|+....+|a_{n-1}|}{|a_n|r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$ مما يستلزم $\frac{|g(z)|}{|f(z)|}<1$ ومنه حسب نظرية

روشي : $Z(f+g,C(0,1)) = Z(f,C(0,1)) = n$.

تطبيق. القرص لذي نصف قطره 2. $D(0,r)=\{|z|<r\}$ الذي حافته الدائرة : $C(0,r)=\{|z|=r\}$ نقترح المعادلة : $z^7-5z^3+12=0$

أثبت أن جذور المعادلة لا تنتمي الى الدائرة $C(0,1)=\{|z|=1\}$ وتنتمي الى الدائرة $C(0,2)=\{|z|=2\}$ على الدائرة : $C(0,1)=\{|z|=1\}$

نقترح : $g(z)=z^7-5z^3$ و $f(z)=12$ ، من الواضح أن: $|f(z)|=12>6\geq|1|^7+5|1|^3\geq|g(z)|$ ومنه حسب نظرية روشي 4 :

$Z(f+g,C(0,1))=Z(f,C(0,1))=0$ على الدائرة : $C(0,2)=\{|z|=2\}$ نقترح : $g(z)=12-5z^3$ و $f(z)=z^7$ ، من الواضح أن:

$|f(z)|=|2|^7=128>52\geq5|2|^3+12\geq|g(z)|$ ومنه حسب نظرية روشي 4 : $Z(f+g,C(0,2))=Z(f,C(0,2))=7$.

التمرين الخامس (تحويل **جوكوفسكي** و مشتقة **لوران شوارتز**)

تحويل **جوكوفسكي** $f(z)=z+\frac{1}{z}$ معرف على $\mathbb{C}-\{0\}$ وهو ليس تباين لان $f(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ (سيكون تحويل كونفورم Transformation conforme على أقراص دائرية مغلقة) لنشرع في ايجاد المجموعه الصورة بواسطة تحويل جوكوفسكي للدوائر $C(0,r)=\{z/z\in\mathbb{C}\,|z|=r\}$

حساب المجموعة الصورة له طرق مثلا في حالة $\forall z\in C(0,r)\Rightarrow|f(z)-\alpha|=\lambda$ معناه المجموعة الصورة للدوائر $C_z(0,r)$ هي دوائر في المستوي Ow $C_w(\alpha,\lambda)=\{w/w\in\mathbb{C}\ ,|w-\alpha|=\lambda\}$. بالفعل $w=f(re^{i\theta})=\frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right)=u+iv$ بحيث أن

$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta, v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$ وحيث أن $\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right)^2}=1,$ فالصورة هي بالطبع قطوع ناقصة

$E_w(\pm1,\gamma(r))=\{w/|w+1|+|w-1|=\gamma(r)\}$ ذات المحورين $u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right), v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$ و ذات البؤر ±1 وبما ان شروط كوشي ريمان بالصيغة البولارية جاهزه بالفعل

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta, \frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta, \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta, \frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$$ و تحقق شروط كوشي ريمان بالصيغة البولاريه $\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$. ومنه $f(z)=z+\frac{1}{z}$ هولومورفية على $\mathbb{C}-\{0\}$ و $f'(z)=1-\frac{1}{z^2}$.

باستخدام نقطة كاشفة من القرص الوحدة $D_z(0,1)=\{z,|z|<1\}$ يمكن اثبات أن صور القرص الوحدة $D_z(0,1)=\{z,|z|<1\}$ بواسطة تحويل جوكوفسكي هي خارج القطع الناقص $E_w(\pm1,\gamma(r))=\{w/|w+1|+|w-1|=\gamma(r)\}$. والتحويل العكسي له يحقق نفس الميزه العكسيه :

$$\forall w\in Ext(E_w(\pm1,\gamma(r))), w=f(z)=z+\frac{1}{z}\Rightarrow z^2+1=2zw\Rightarrow z^2-2zw+1=0\Rightarrow z_{1,2}=w\pm\sqrt{w^2-1}$$

$z_1=w-\sqrt{w^2-1}$ و $z_2=w+\sqrt{w^2-1}$ و $z_1z_2=1$ اذا احدى الجذرين فقط يحقق الانتماء للقرص الوحدة $D_z(0,1)=\{z,|z|<1\}$.

والخلاصة : $|z_2| = \left|w + \sqrt{w^2 - 1}\right| > 1$ و $|z_1| = \left|w - \sqrt{w^2 - 1}\right| < 1$ وهذا لما $w \notin [-1 \quad +1]$. مما يبين أن صور $\{\ [-1 \quad +1]\ \} - \mathbb{C} - \{[-1 \quad +1]\}$

هي $D_z(0,1) = \{z, |z| < 1\}$ أو $\mathbb{C} - \{|z| < 1\ \}$.

- مشتقة **لوران شوارتز** نسمي مشتقة لوران شوارتز للدالة الهوموغرافيه $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, z \neq -\dfrac{d}{c}$ المشتقة ات العبارة الاتيه

$L_f(z) = \left(\dfrac{f''}{f'}\right)' - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f''}{f'}\right)^2$ قبل الولوج في صلب السؤال يجدر بنا ملاحظة التفكيك الهام للدالة للدالة الهوموغرافيه :

$w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, z \neq -\dfrac{d}{c}$ فهي تحقق $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\dfrac{bc-ad}{c}}{cz+d}, z \neq -\dfrac{d}{c}$ بمعنى التحويل الهوموغرافي هو حاصل

تركيب أربع تحويلات بسيطة (يسهل ايجاد الصور بواسطتها) وهي : أولا $z_1 = cz + d$, $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$, $w = z_3 = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c} z_2$

التحويل الأول . $z_1 = cz$, يحول الدوائر $C_z(0,r) = \{z, |z| = r\}$ الى دوائر بالفعل لما $c = \alpha . e^{i\beta}, z = re^{i\theta} \Rightarrow w = r\alpha . e^{i(\beta+\theta)}$

التحويل الأول $z_1 = cz + d$, يحول الدوائر $C_z(0,r) = \{z, |z| = r\}$ الى دوائر $C_w(0, r\alpha) = \{w, |w| = r\alpha\}$ ثم نقوم بسحب هذه الدوائر $C_w(0, r\alpha) = \{w, |w| = r\alpha\}$ بواسطة الشعاع لاحقة العدد المركب d فهي دوائر مسحوبة المراكز بنفس أنصاف الأقطار $r\alpha$.

التحويل الثاني $w = z_2 = \dfrac{1}{z_1}$, في الحقيقة يحول الدوائر $C_z(0,r) = \{z, |z| = r\}$ الى دوائر $C_w\left(0, \dfrac{1}{r}\right) = \left\{w, |w| = \dfrac{1}{r}\right\}$ وعكس اتجاه

عقارب الساعه بالفعل لما $z = re^{i\theta} \Rightarrow w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow |w| = \dfrac{1}{r}$.

التحويل الثالث $w = z_3 = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c} z_2$ له نفس الصبغه للتحويل الأول تشابه فهو يحول الدوائر الى دوائر والخلاصه التحويل الهوموغرافي يحول الدوائر الى دوائر.يمكننا بسهولة ساحرة الوصول الى الحقيقة المدهشة الآتية :

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}, z \neq -\frac{d}{c} \quad \text{و} \quad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, z \neq -\frac{d}{c}$$

لكل دالة هولومورفيه g فان الدالة $g \circ f$ هولومورفية وتحقق الميزة الشوارتزيه الآتيه :

$$L_f(z) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

عندئذ :

$$L_{g \circ f}(z) = \left(\frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{(g \circ f)''}{(g \circ f)'}\right)^2$$

يستلزم أن : $L_{g \circ f} = L_g$ بمعنى في حالة التركيب هوموغرافي هولومورفي فأن المشتقة الهوموغرافيه تذوب لتبقى المشتقة الهولومورفية .

The Laurent Schwartz derivative of homographic function composite with holomorphic function equal to the Schwartz derivative of holomorphic function.