



UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL-OUED

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE



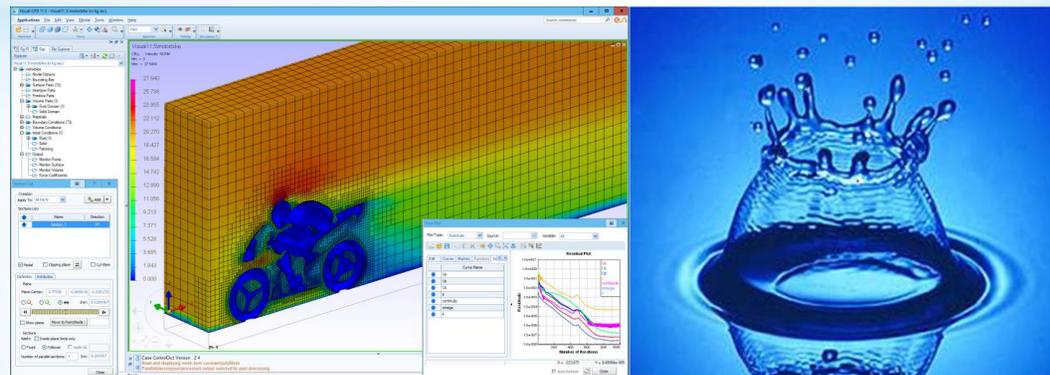
# Cours de Mécanique des fluides Approfondie

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique & Energies Renouvelables en Mécanique

Présentée par :

ATIA Abdelmalek



2020-2021

Semestre : 1

Unité d'enseignement : UEF 1.1.1

Matière : Mécanique des fluides approfondie

VHS: 67 h30 (Cours: 3h00, TD: 1h30)

Crédits : 6

Coefficient : 3

**Objectifs de l'enseignement :**

Le but de la matière est de développer les connaissances de base de l'étudiant. La spécialité énergétique est étroitement liée à la phénoménologie des écoulements visqueux et turbulents observés dans les systèmes énergétiques, leur compréhension et analyse sont indispensables. L'imprégnation de l'étudiant des lois et modèles physiques et mathématiques de ces écoulements souvent complexes est un des fondamentaux de la spécialité dans l'acquisition d'un enseignement consistant nécessaire pour la recherche.

**Connaissances préalables recommandées :**

Base de Mécanique des fluides  
Les mathématiques  
Les méthodes numériques

**Contenu de la matière :**

**Chapitre 1 : Dynamique des fluides et équations de transport :** description du mouvement, tenseurs, dérivée particulaire, transport d'un volume infinitésimal, bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, fluides visqueux, équations de Navier-Stokes, éléments de rhéologie... **(4 semaines)**

**Chapitre 2 : Fluide parfait et ses applications :** écoulements potentiels, ondes d'interfaces **(2 semaines)**

**Chapitre 3 : Dynamique des fluides réels :** écoulement unidirectionnels, écoulement de Stokes, écoulement à faible vitesse, à faible nombre de Reynolds, lubrification hydrodynamique... **(3 semaines)**

**Chapitre 4 : Couches limites :** développement de la couche limite, solutions approchées, équation de Van Karman,... **(2 semaines)**

**Chapitre 5 : Ecoulements turbulents :** champ moyen et fluctuations, équations de Reynolds, modèle de Boussinesq, modèle de la longueur de mélange de Prandtl, échelles de turbulence, modèles de turbulence K- $\epsilon$ , K- $\omega$ , SST... **(4 semaines)**

**Mode d'évaluation :**

Contrôle Continu : 40%, Examen : 60%.

**Références bibliographiques :**

- 1- Inge L. Ryhming, *Dynamique des fluides*, Presse Polytechniques et Universitaire Romandes.
- 2- P. Chassaing, *Turbulence en mécanique des fluides*, CEPADUÉS- Editions
- 3- R. Comolet, *Mécanique expérimentale des fluides, Tome II, dynamique des fluides réels, turbomachines*, Editions Masson, 1982.
- 4- T. C. Papanastasiou, G. C. Georgiou and A. N. Alexandrou, *Viscous fluid flow*, CRC Press LLC, 2000.
- 5- Adil Ridha, *Cours de Dynamique des fluides réels, M1 Mathématiques et applications : spécialité Mécanique*, Université de Caen, 2009.
- 6- R. W. Fox, A. T. Mc Donald and P. J. Pritchard, *Introduction to fluid mechanics, sixth edition*, Wiley and sons editor, 2003
- 7- Hermann Schlichting, *Boundary layer theory*, McGraw Hill book Company.
- 8- W.P. Graebel, *Advanced fluid mechanics*, Academic Press 2007.
- 9- H. Tennekes and J. L. Lumley, *A first course in turbulence*, The MIT Press 1972

# Contenu de Cours

**Contenu de la matière :**

**Chapitre 1 : Dynamique des fluides et équations de transport :** description du mouvement, tenseurs, dérivée particulaire, transport d'un volume infinitésimal, bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, fluides visqueux, équations de Navier-Stokes, éléments de rhéologie... **(4 semaines)**

**Chapitre 2 : Fluide parfait et ses applications :** écoulements potentiels, ondes d'interfaces **(2 semaines)**

**Chapitre 3 : Dynamique des fluides réels :** écoulement unidirectionnels, écoulement de Stokes, écoulement à faible vitesse, à faible nombre de Reynolds, lubrification hydrodynamique... **(3 semaines)**

**Chapitre 4 : Couches limites :** développement de la couche limite, solutions approchées, équation de Van Karman,... **(2 semaines)**

**Chapitre 5 : Ecoulements turbulents :** champ moyen et fluctuations, équations de Reynolds, modèle de Boussinesq, modèle de la longueur de mélange de Prandtl, échelles de turbulence, modèles de turbulence K- $\epsilon$ , K- $\omega$ , SST... **(4 semaines)**

# Contenu de Cours

## Contenu de la matière :

**Chapitre 1 : Dynamique des fluides et équations de transport :** description du mouvement, tenseurs, dérivée particulaire, transport d'un volume infinitésimal, bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, fluides visqueux, équations de Navier-Stokes, éléments de rhéologie... **(4 semaines)**

**Chapitre 2 : Fluide parfait et ses applications :** écoulements potentiels, ondes d'interfaces **(2 semaines)**

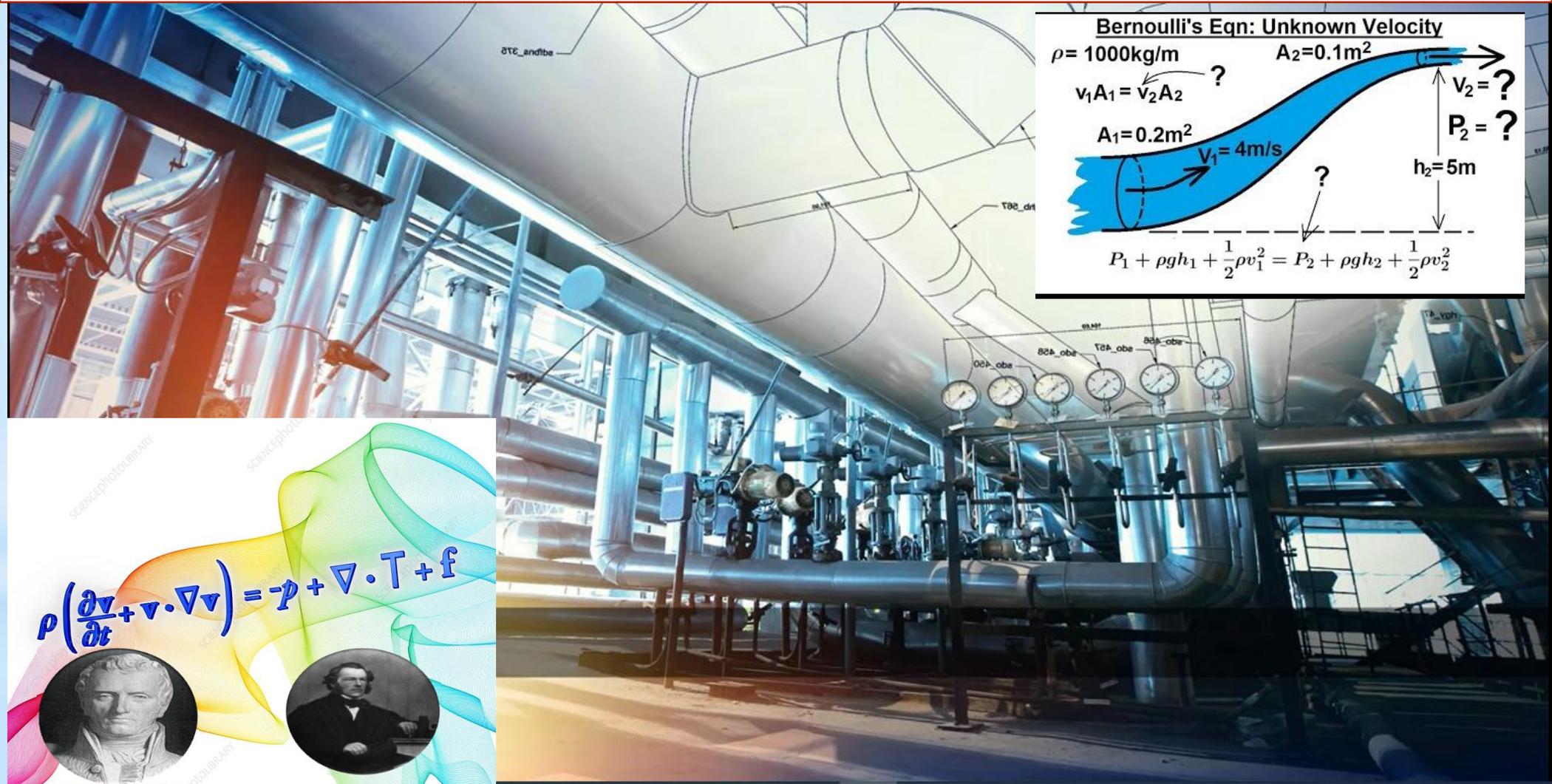
**Chapitre 3 : Dynamique des fluides réels :** écoulement unidirectionnels, écoulement de Stokes, écoulement à faible vitesse, à faible nombre de Reynolds, lubrification hydrodynamique... **(3 semaines)**

**Chapitre 4 : Couches limites :** développement de la couche limite, solutions approchées, équation de Van Karman,... **(2 semaines)**

**Chapitre 5 : Écoulements turbulents :** champ moyen et fluctuations, équations de Reynolds, modèle de Boussinesq, modèle de la longueur de mélange de Prandtl, échelles de turbulence, modèles de turbulence  $K-\varepsilon$ ,  $K-\omega$ , SST... **(4 semaines)**

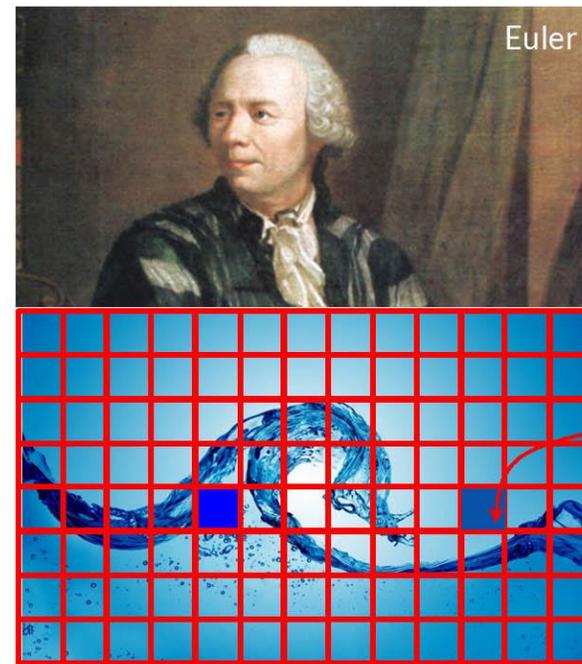
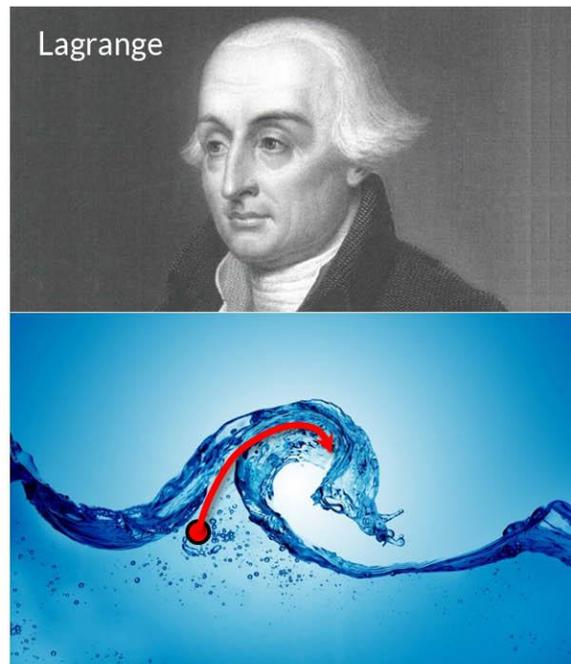
# Chapitre 2 : Dynamique des fluides et équations de Transport

# Transport Phenomena: Fluid Flow, Heat Transfer, and Mass Transport



# 1. Description du mouvement

Pour la description mathématique d'un écoulement on dispose deux méthodes différentes



**1/DESCRIPTIONS LAGRANGIENNE ET EULÉRIENNE**

Il existe deux façons de décrire le mouvement des particules de fluide dans un flux. Une *description lagrangienne* a une utilité limitée car elle nécessite de suivre la position et la vitesse de chaque particule de fluide en fonction du temps.

Une *description eulérienne* considère une *élément de volume* dans l'écoulement, et elle mesure le mouvement ou une propriété de fluide de toutes les particules qui traversent cette région.

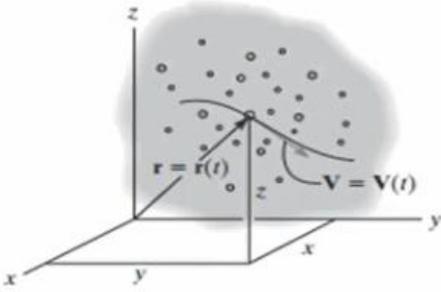
nous définissons à l'intérieur de l'élément de volume une *variables de champ*, des fonctions de l'espace et du temps. Par exemple, le champ de pression est une *variable de champ scalaire* pour les écoulements de fluide non stationnaires dans les coordonnées cartésiennes.

**champ de pression**  $P = P(x, y, z, t)$  ....(1.1)

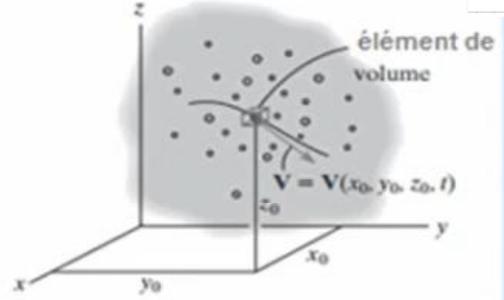
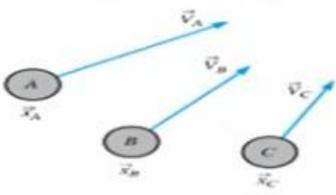
**champ de vitesse(champ vectoriel)**  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$  ....(1.2)

**champ d'accélération(champ vectoriel)**  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$  ....(1.3)

L'ensemble de ces variables de champ définissent le champ d'écoulement.

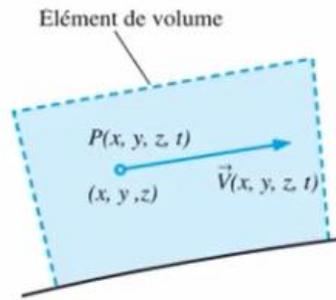


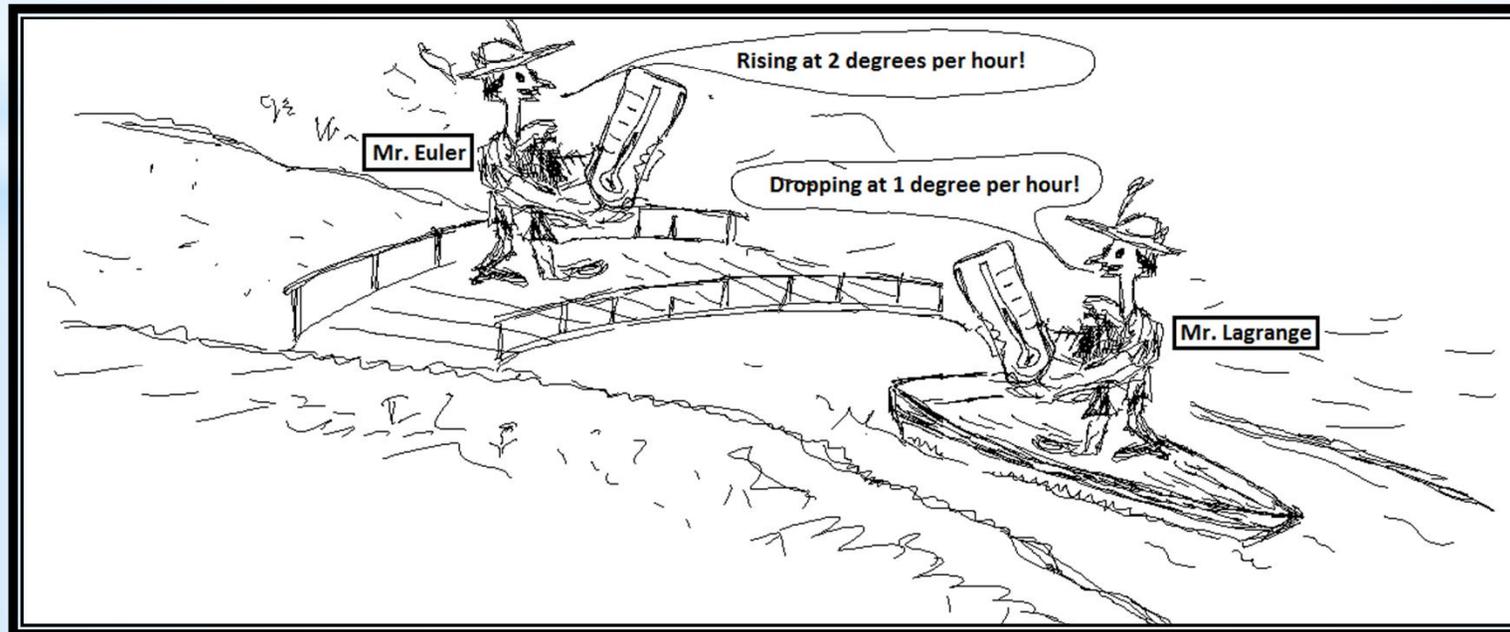
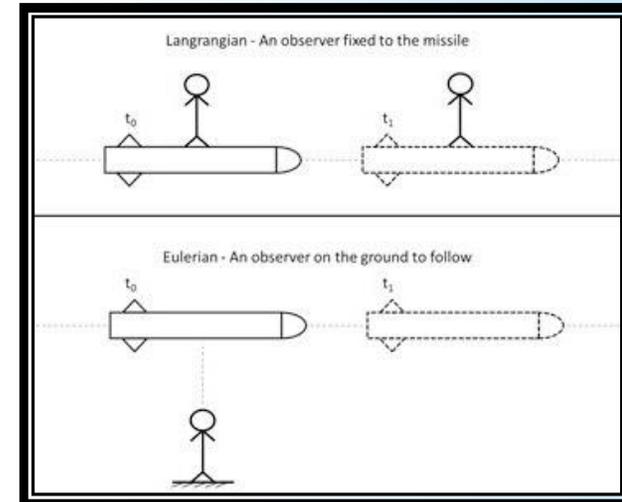
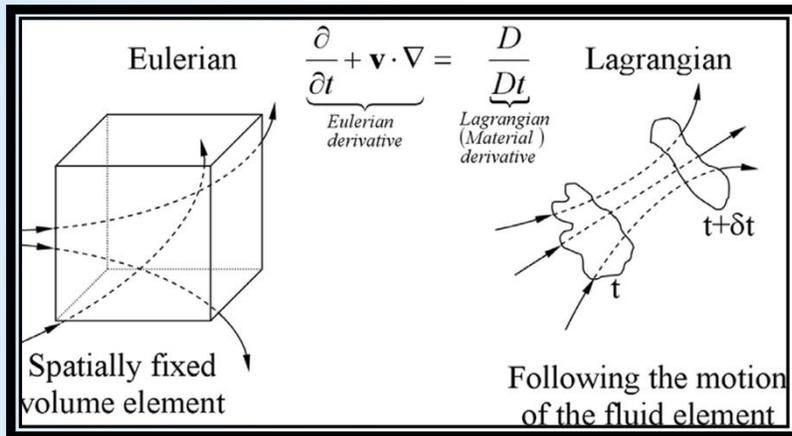
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$



Le champ de vitesse de l'équation 1.2 peut être développé dans les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z), (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{V} = (u, v, w) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$





Lagrangian — Fixed Packet Of Mass — System

Can change size and shape, but we always follow that packet of mass

Eulerian — Fixed Region of Interest — Control Volume

Can change size and shape and mass might cross boundary

Our Physics experience applies to **Systems** not **Control Volumes!**

$$\sum \vec{F}_{sys} = m_{sys} \vec{a}_{sys}$$

$$\sum \vec{F}_{cv} \neq m_{cv} \vec{a}_{cv}$$

BY : KHALID AL-OTAIBI



منهج أويلر  
Eulerian



منهج لاغرانج  
Lagrangian

## 2.1.1 Description Lagrangienne

Le mouvement d'une particule de fluide étiquetée est étudié (Fig.2.1). Le vecteur lieu  $\vec{r}$  de la particule à un temps initial  $t_0$  est donc utilisé comme étiquette. L'image de l'écoulement est complète quand on connaît le vecteur lieu  $\vec{r}$  de la particule et qui est une fonction de  $\vec{r}_0$  et du temps  $t$ :  $\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0)$ .

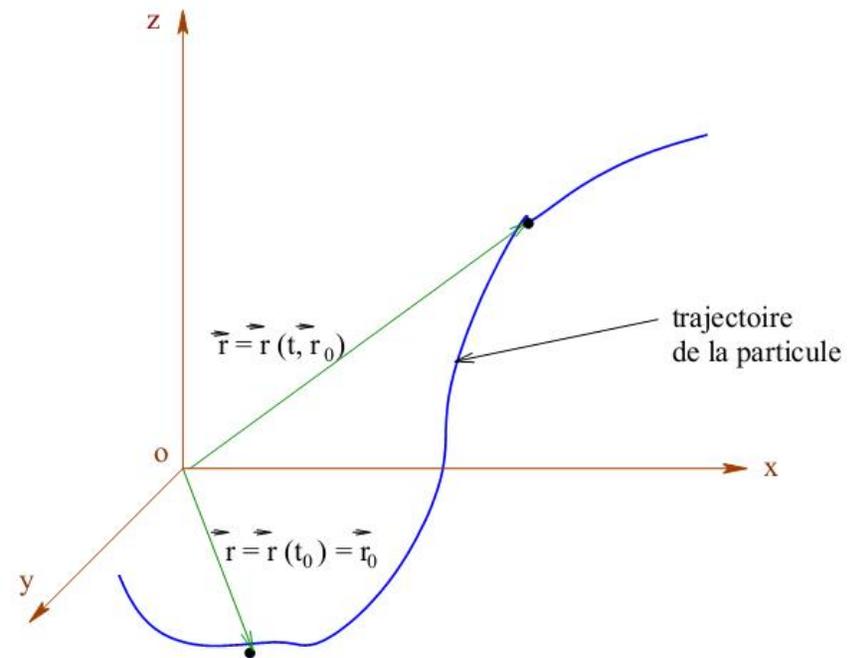


Figure 2.1: *Description Lagrangienne.*

## 2.1.2 Description Eulérienne

Par cette méthode, toutes les grandeurs d'écoulement (vitesse  $q$ , pression  $P$ , etc...) sont données comme fonctions du vecteur lieu  $\vec{r}$  et du temps  $t$ . Au lieu de suivre une particule le long de sa trajectoire, l'étude est concentrée sur un point donné de l'espace. A chaque instant, les différentes particules passent par le point considéré et on étudie en ce point les variations temporelles des grandeurs physiques ( $P, q, \dots$ ).

Donc dans la description lagrangienne les coordonnées  $x, y, z$  des particules sont fonctions du temps mais elles sont indépendantes dans la description eulérienne.

## 2.2 Écoulement permanent et non permanent

Dans la description eulérienne nous avons les variables indépendantes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ . Si en chaque point de l'espace l'écoulement est indépendant du temps, il est alors appelé *permanent* (ou *stationnaire*). S'il varie avec le temps en un point, l'écoulement est dit *non permanent* (ou *instationnaire*).

## 2.4 Fonction de courant

Elle fournit une mesure du débit-masse dans l'écoulement. Elle représente les lignes de courant sous la forme:  $\psi(x, y) = C^{te}$  pour un écoulement plan (bidimensionnel) dans le plan  $xy$ . Elle est définie telle que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

On a:  $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$

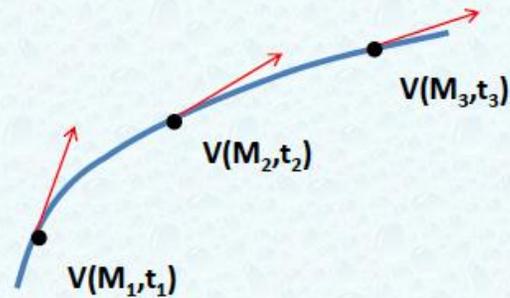
Or sur une ligne de courant nous avons d'après (2.1):  $v dx = u dy$

alors:  $d\psi = -u dy + u dy = 0$  et de ce fait nous pouvons conclure que:

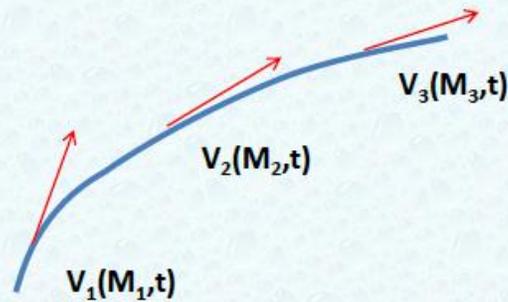
*La fonction de courant  $\psi = C^{te}$  le long d'une ligne de courant.*

### II-4-3 Notions de trajectoire, ligne de courant et tube de courant

• **Trajectoire** : c'est l'ensemble des positions qu'occupe une particule d'un fluide en écoulement pendant des instants différents.



• **Ligne de courant**: Elle représente la **tangente** aux **vecteurs vitesses de plusieurs particules** d'un fluide en écoulement à un instant donné  $t$ .



Remarque: Dans le cas du régime permanent, les trajectoires se confondent avec les lignes de courant.

Les lignes de courant sont donc définies par les équations suivantes:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2.1)$$

\* Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée constituent un *tube de courant* (Fig.2.2). Si le tube est de section infiniment petite, il est alors appelé *filet de courant*.

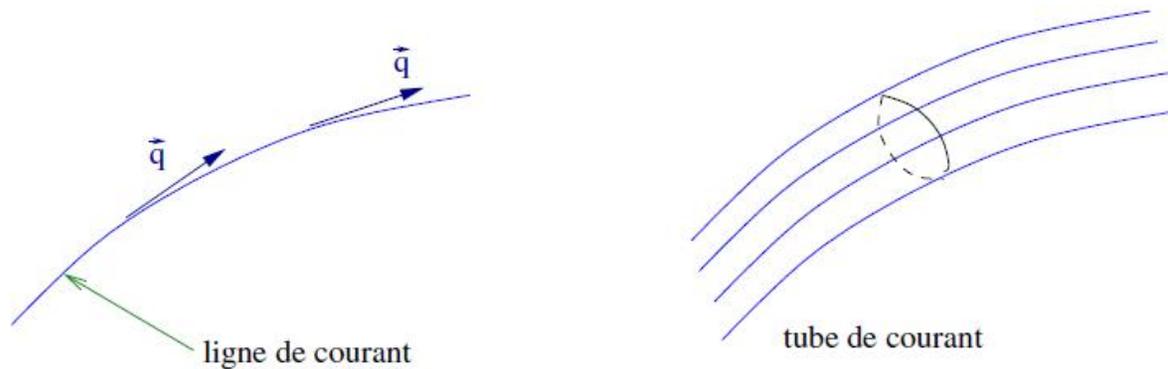
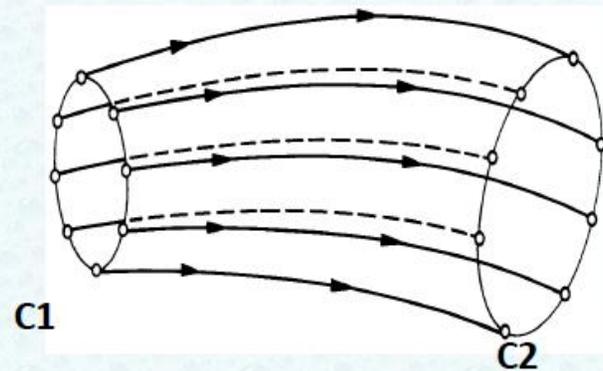


Figure 2.2: *Ligne de courant - Tube de courant.*

Deux lignes de courant ne peuvent pas avoir un point d'intersection sauf au point d'arrêt ( $q = 0$ ). Autrement, on aura pour une même particule une vitesse avec deux directions différentes!

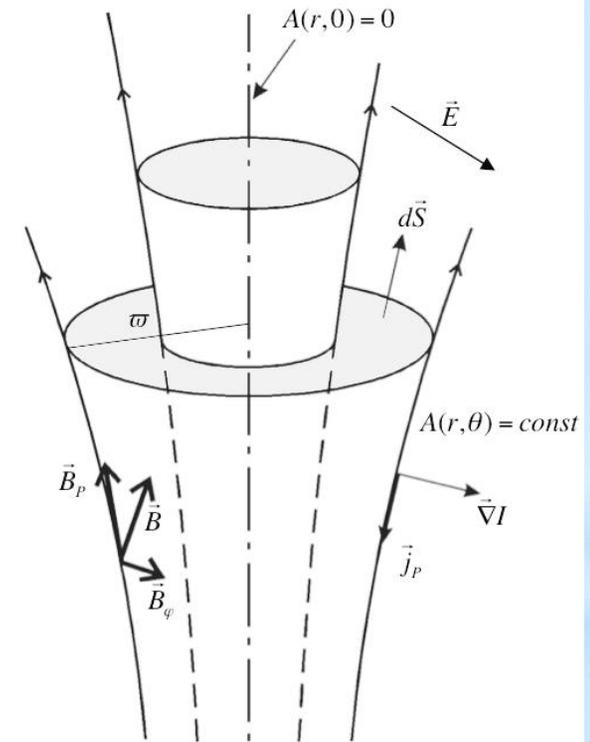
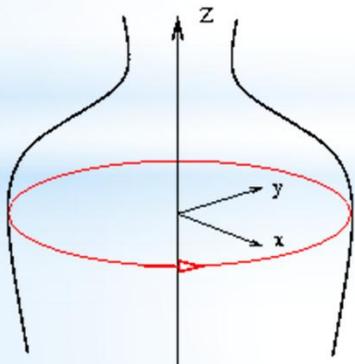
**Tube de courant :** est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé  $C$



## 2.5 Écoulement axisymétrique

Un écoulement est dit axisymétrique si les composantes du vecteur vitesse référées à des coordonnées cylindriques  $r$ ,  $z$  et  $\theta$  sont toutes *indépendantes de l'angle  $\theta$* .

Nous parlerons de symétrie axiale pour un plan donné ou de symétrie de révolution dans le cas où la symétrie se développe autour d'un axe

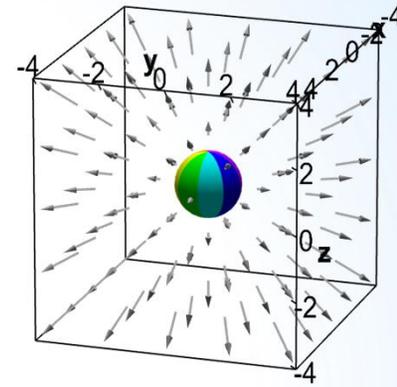


Structure d'un écoulement MHD axisymétrique stationnaire

## The Gauss Theorem

This theorem is related to conservation laws in physics. It states that the total sources and sinks of a vectorial quantity, or the integral volume of its divergence, is equal to the net flux of this vectorial quantity across the volume boundary.

$$\int_{\Delta V} d^3x \nabla \cdot \mathbf{A} = \oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$



# Divergence Theorem

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

# Visual Explanation

# Reynolds transport theorem

The Reynolds transport theorem (RTT) is used to analyse the fluid flow. For an extensive flow variable, say B (it can be mass, momentum, energy, angular momentum or entropy), the RTT is as follows:

$$\underbrace{\frac{dB_{sys}}{dt}}_I = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} b\rho dV}_{II} + \underbrace{\int_{CS} b\rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA}_{III}$$

Select the CORRECT statement, regarding the application of RTT to the basic laws.

- Term III in RTT is  $\int_{CS} \rho e \vec{U} \cdot \vec{n} dA$  in the 1st law of thermodynamics and it means the energy flux through CS.
- Term III in RTT is  $\int_{CS} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA$  in the conservation of mass law and it is the flux of mass through CS.
- Term I in RTT is the  $[\dot{Q} + \dot{W}]_{on CV} = [\dot{Q} + \dot{W}]_{on sys}$  in the conservation of energy equation (1st law of thermodynamics).
- Term III in RTT is  $\int_{CS} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA$  in the conservation of mass law and it is the volume flow rate through CS.



OSBORNE  
REYNOLDS

- Mass conservation equation (continuity equation)

### 1- Integral form of mass conservation equation

Using RTT

$$\frac{DB}{Dt} = \iiint \frac{\delta}{\delta t} (\rho b) d\vartheta + \iint \rho b \vec{V} dA$$

B=m

b=m/m=1

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 = \iiint \frac{\delta}{\delta t} (\rho) d\vartheta + \iint \rho \vec{V} dA$$

Inlet Flux is negative sign



## 2.6 Dérivée particulaire

Pour connaître le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule, on doit la suivre dans son déplacement (description Lagrangienne) pour tenir compte de toute variation spatiale et temporelle. D'où la notion de dérivée particulaire:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

Elle est traitée comme un opérateur différentiel applicable sur une fonction scalaire ou vectoriel.

$\frac{D}{Dt}$  : représente le taux de variation par rapport au temps en suivant la particule dans son mouvement;

$\frac{\partial}{\partial t}$  : représente le taux de variation local;

$\vec{q} \cdot \vec{\nabla}$  : représente le taux de variation convectif.

## 2.7 Volume de contrôle

C'est un volume arbitraire (région dans l'écoulement) perméable (le fluide passe librement à travers sa surface) mais fixe dans l'écoulement.

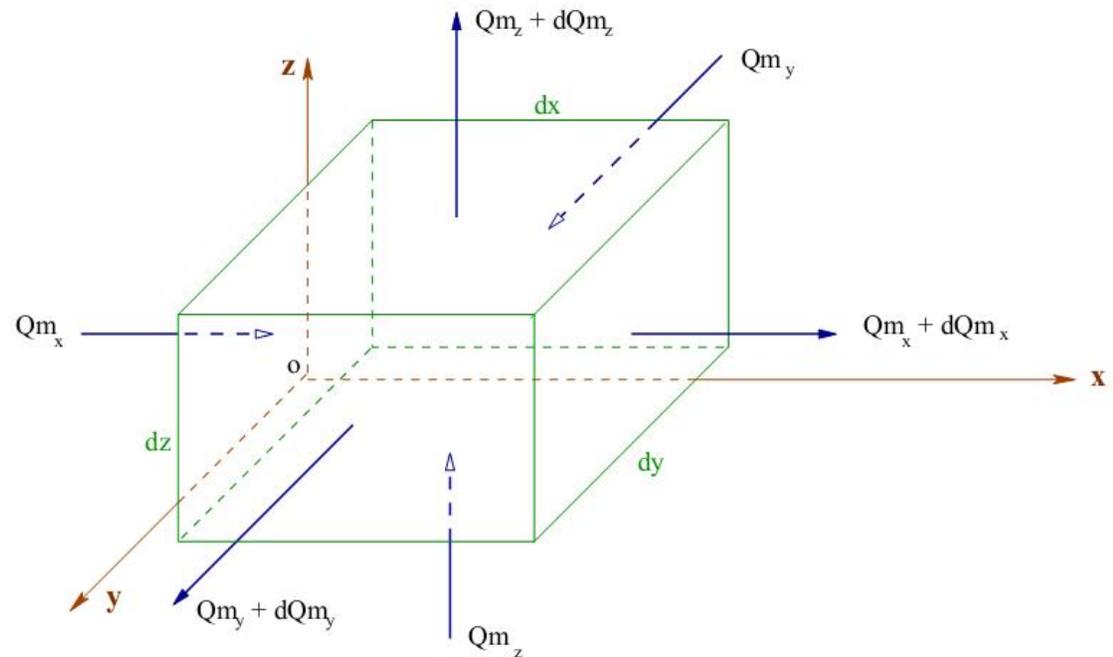


Figure 2.3: *Flux à travers la surface de l'élément de fluide.*

# Transport Equations

Mass conservation - Continuity

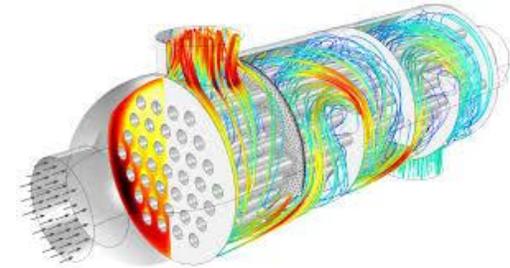
Momentum conservation -**NV**- Newton's Second Law

Energy conservation - First Law of Thermodynamics

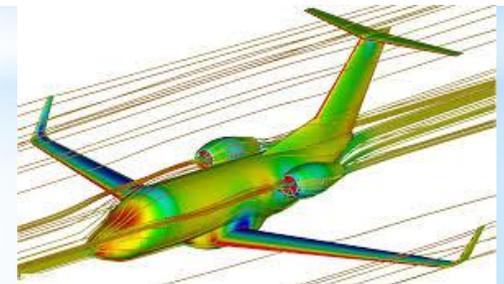
# Mass conservation - Continuity

The basic equations considered here are the three laws of conservation for physical systems:

1. Conservation of mass (continuity)
2. Conservation of momentum (Newton's second law)
3. Conservation of energy (first law of thermodynamics)



The three unknowns that must be obtained simultaneously from these three basic equations are the velocity  $\mathbf{u}$  (three components), the thermodynamic pressure  $p$ , and the absolute temperature  $T$ . However, the final forms of the conservation equations also contain four other thermodynamics variables: the density  $\rho$ , the enthalpy  $h$ , and have two transport properties  $\mu$  and  $k$ .

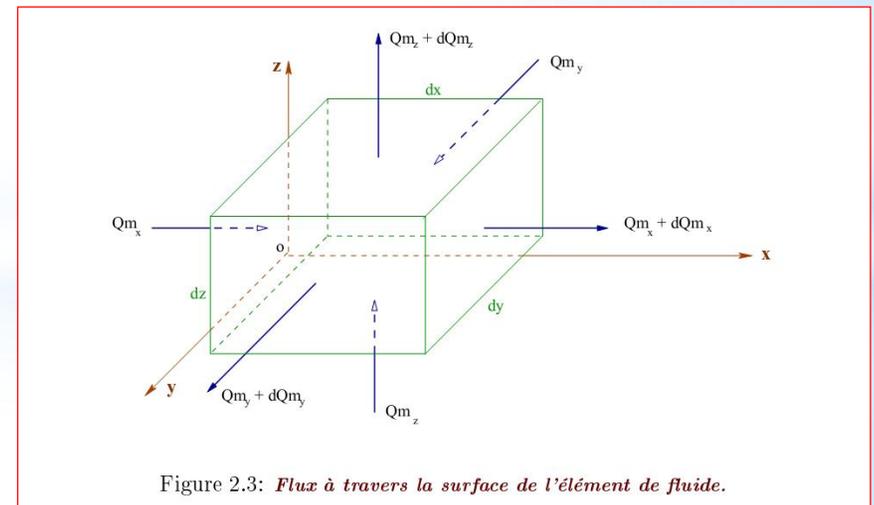


## 2.8 Equation de conservation de la masse

### 2.8.1 Forme différentielle

Cette équation exprime la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire  $dV$  (description Lagrangienne) ou encore pour un élément fixe (description Eulérienne): la diminution de masse contenue dans le volume  $dV$  est égale à la masse ayant traversé la surface extérieure de l'élément (débit sortant).

En utilisant cette seconde description, nous aurons (Fig.2.3):



### 3.1- Conservation of mass:

The first step in the derivation of the mass conservation equation is to write down a mass balance for the fluid element:

$$\begin{array}{ccc} \text{Rate of increase of mass} & = & \text{Net rate of flow of mass} \\ \text{in fluid element} & & \text{into fluid element} \end{array}$$

The rate of increase of mass in the fluid element is;

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\Delta x \Delta y \Delta z)$$

Velocities  
 u in x direction  
 v in y direction  
 w in z direction

I

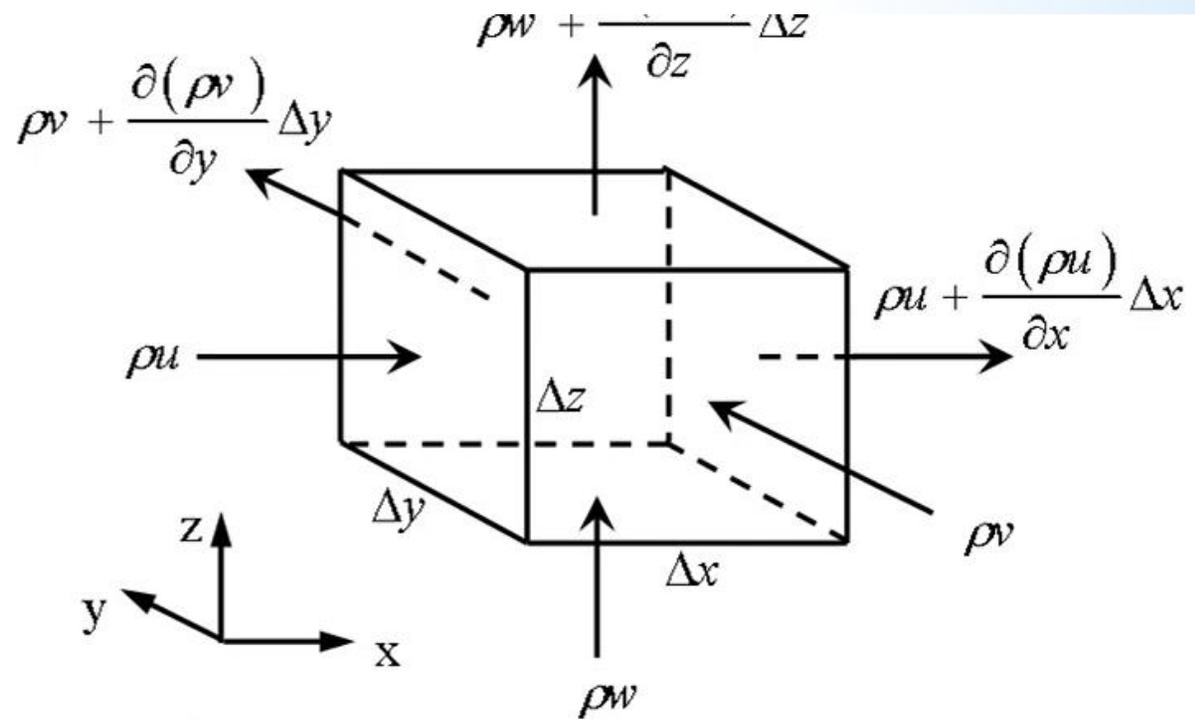


Fig. (1) Mass flows in and out of fluid element

The mass balance for the fluid element is given by;

$$\text{In x - dir.} \quad (\rho u) \Delta y \Delta z - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$

$$\text{In y - dir.} \quad +(\rho v) \Delta x \Delta z - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z$$

$$\text{In z - dir.} \quad +(\rho w) \Delta x \Delta y - \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y = \frac{\partial \rho}{\partial t} (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

Rearrangement the above equ. we have;

$$-\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

La diminution de la masse à travers le volume de contrôle est donnée par:

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (*)$$

et d'autre part, d'après la figure (2.3) on a:

$$\frac{dm}{dt} = Q_m|_{x+dx} - Q_m|_x + Q_m|_{y+dy} - Q_m|_y + Q_m|_{z+dz} - Q_m|_z \quad (**)$$

Le vecteur vitesse étant défini par ses composantes  $\vec{q}$  ( $u, v, w$ ) on a alors les débits massiques qui passent à travers chaque facette du cube:

$$Q_m|_x = \rho u dy dz; \quad Q_m|_y = \rho v dx dz \quad \text{et} \quad Q_m|_z = \rho w dx dy$$

$$Q_m|_{x+dx} = Q_m|_x + \frac{\partial Q_m|_x}{\partial x} dx = Q_m|_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

$$Q_m|_{y+dy} = Q_m|_y + \frac{\partial Q_m|_y}{\partial y} dy = Q_m|_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz$$

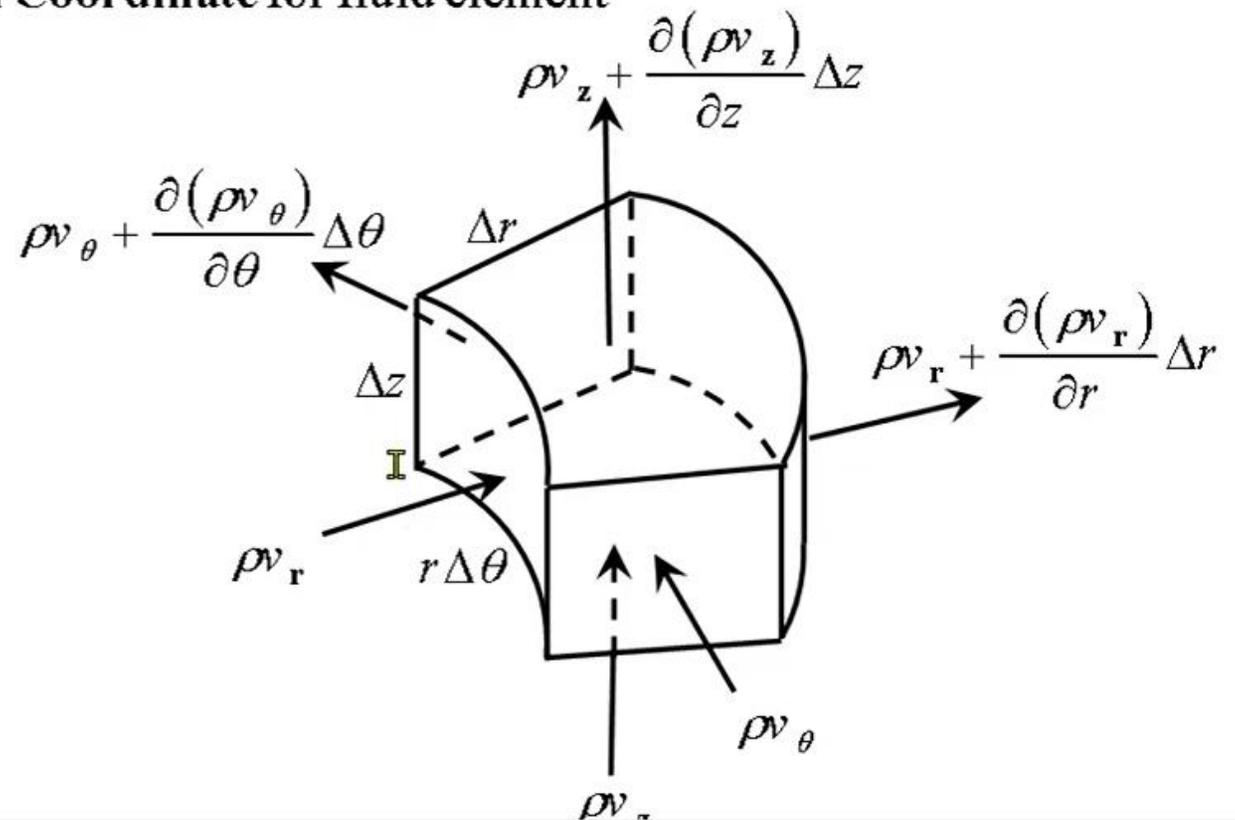
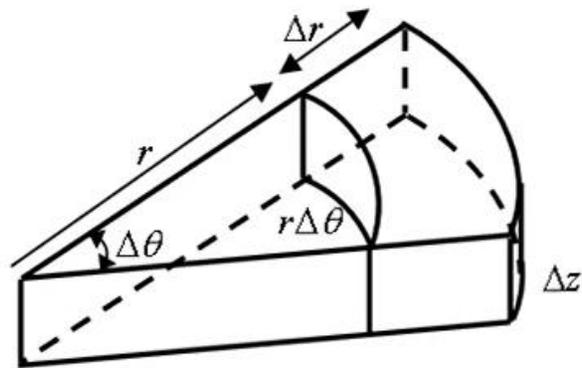
$$Q_m|_{z+dz} = Q_m|_z + \frac{\partial Q_m|_z}{\partial z} dz = Q_m|_z + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

en combinant les équations (\*) et (\*\*) nous aurons:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

d'où l'équation de conservation de la masse ou encore l'équation de continuité:

## H.W Continuity in cylindrical Coordinate for fluid element



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

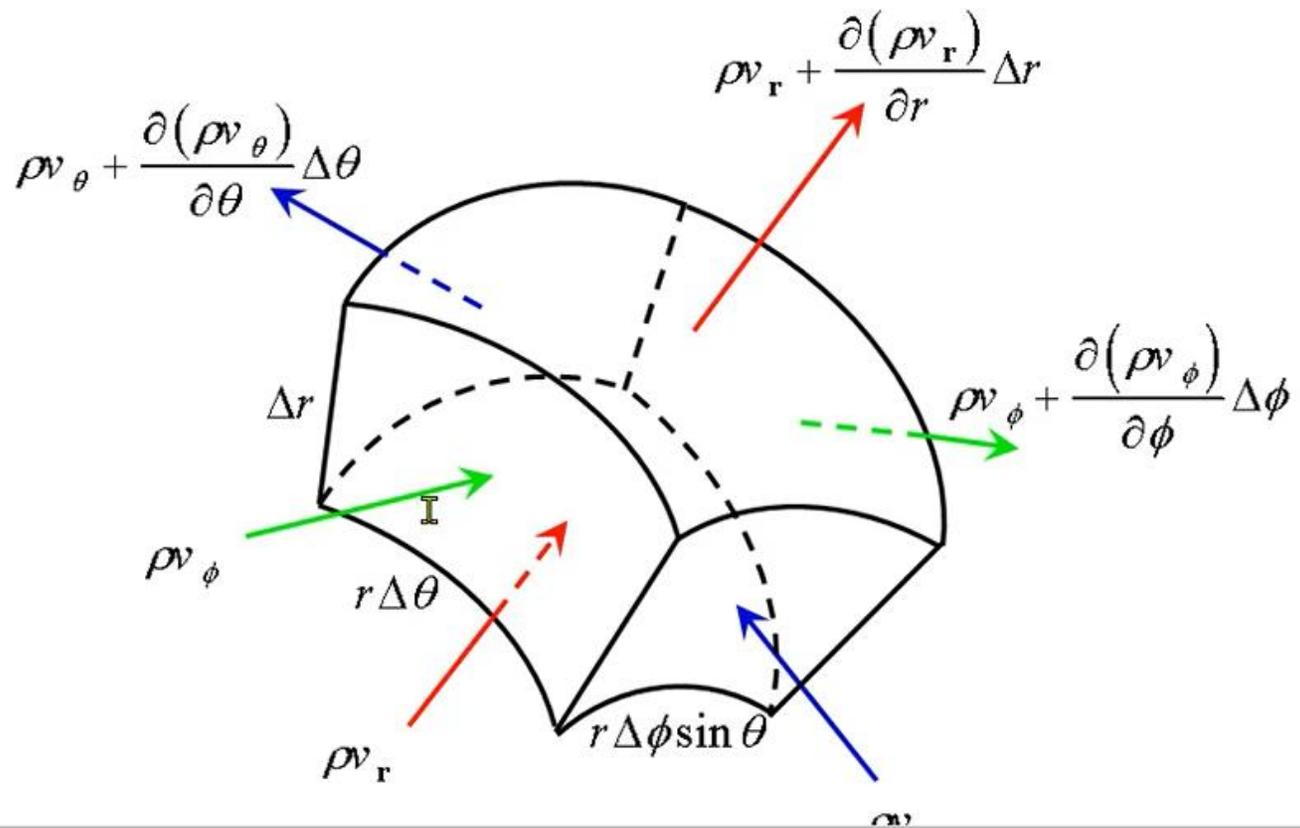
En coordonnées cylindriques  $\vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$  l'équation (2.4) devient, en posant:  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) s'écrit encore sous forme plus compacte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (2.6)$$

et puisque:



Shows that:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

nous aurons alors:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (2.7)$$

Cette équation générale peut s'utiliser selon les formes particulières suivantes:

**\* Cas d'un écoulement permanent:**

La masse volumique en un point est constante même si sa valeur peut varier d'un point à un autre.

C'est-à-dire:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  d'où:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

**\* Cas d'un écoulement incompressible:**

La masse volumique reste constante quelque soit les valeurs de la pression et de la température au sein du fluide.

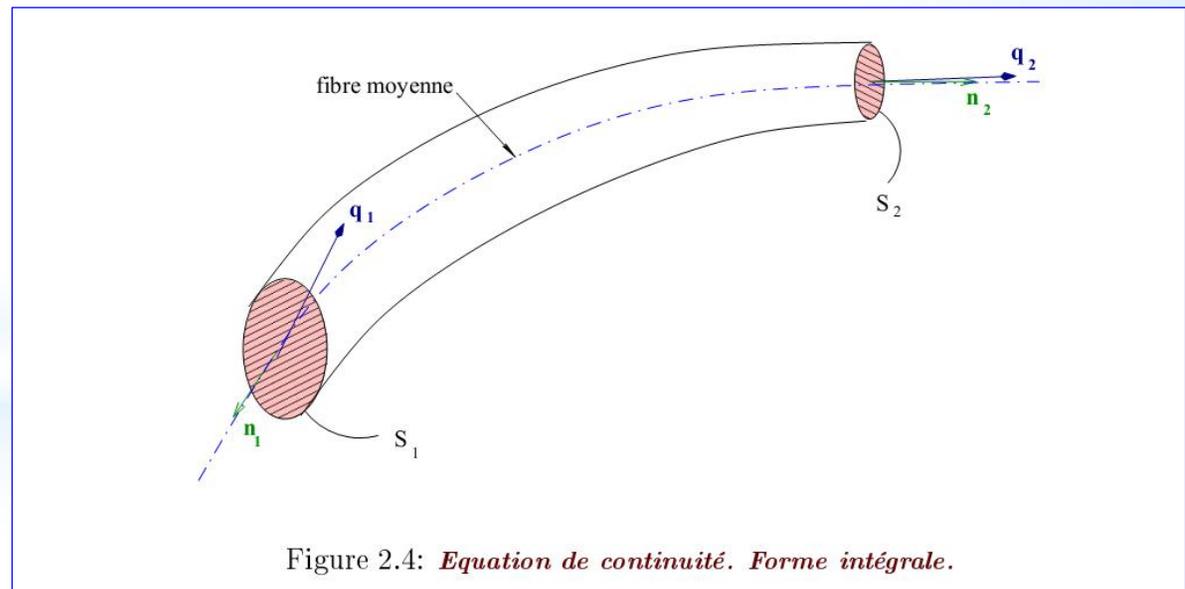
C'est-à-dire:  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  d'où:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

## 2.8.2 Forme intégrale

### \* Cas particulier:

Considérons en premier lieu un écoulement stationnaire d'un fluide compressible dans une conduite de section  $S$  variable le long de sa fibre moyenne (Fig.2.4).



Si la vitesse  $\vec{q}$  et la densité  $\rho$  sont constantes (ou uniformes) dans les sections  $S_1$  et  $S_2$ , l'écoulement est unidimensionnel et nous pouvons écrire que la variation du débit massique est constante:  $Q_{m2} - Q_{m1} = 0$  d'où:

$$\rho_1 q_1 S_1 = \rho_2 q_2 S_2 \quad (2.10)$$

- Si le fluide est incompressible alors:  $\rho = C^{te}$  et donc:

$$q_1 S_1 = q_2 S_2 \Leftrightarrow Q_{v1} = Q_{v2} \quad (2.11)$$

$Q_v$  étant le *débit volumique* (ou *volumétrique*).

Donc  $q = \frac{Q_v}{S}$  est la *vitesse moyenne* si le profil de vitesse n'est pas uniforme dans la section de passage.

### \* Cas général :

L'équation (2.6) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_v \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) \right] dv = 0$$

car le volume de contrôle ne dépend pas de  $t$ . En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski (Annexe A.9), nous aurons :

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_s \rho (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

et par suite, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho dv}_{(1)} + \underbrace{\int_s \rho (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS}_{(2)} = \frac{Dm}{Dt} = 0 \quad (2.12)$$

La première partie (1) de l'équation (2.12) représente le *taux de variation locale* de  $m$  à travers le volume de contrôle  $v$ ; la seconde partie (2) représente quant-à-elle, le *débit masse* (ou *flux*) à travers la surface de contrôle  $S$ .

**- Remarques :**

1. L'équation (2.12) représente la continuité de masse dans l'écoulement sous forme intégrale. Pour avoir la conservation de la masse dans un volume de contrôle (v.c) la somme des taux de changement local de  $m$  et du débit masse net  $Q_m$  doit être nulle.
2. Si les variables  $\rho$  et  $\vec{q}$  sont uniformes alors :

$$Q_m = \rho q S \quad (2.13)$$

3. Puisque (v.c) est indépendant du temps, la dérivée  $\frac{\partial}{\partial t}$  dans (2.12) s'applique uniquement à l'intégrant  $\rho dv$ .
4. Si l'écoulement est permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), l'équation (2.12) devient :

$$\int \rho (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.14)$$

5. Le (v.c) peut prendre une forme quelconque dans l'analyse de l'écoulement. Son choix est important pour obtenir une solution simple du problème.

- Exemple d'application :

Un jet d'eau de diamètre  $d$  sort d'un réservoir de diamètre  $D$ . Si on suppose que la vitesse d'écoulement dans le jet est donnée par  $q = \sqrt{2gh}$ . Trouver le temps nécessaire pour que la surface du réservoir s'abaisse de la hauteur  $h_1$  à  $h_2$  (Fig.2.5). La masse volumique et la vitesse sont supposées uniformes à travers la section de sortie.

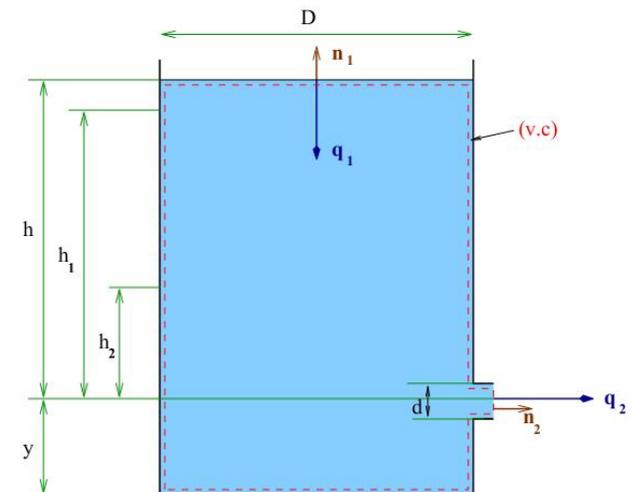


FIGURE 2.5: *Vidange d'un réservoir.*

Le débit masse net à travers la section de contrôle est :

$$Q_m = \int_{s_1} \rho (\vec{q}_{1r} \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS$$

$$Q_m = -\rho q_{1r} S_1 + \rho q_2 S_2 = -\rho q_{1r} S_1 + \rho \sqrt{2gh} S_2$$

Puisque la surface  $S_1$  se déplace avec le (v.c) alors sa vitesse relative  $q_{1r}$  est nulle. En d'autres termes, il n'y a pas de particules de fluides qui passent à travers la section  $S_1$ .

$$\int_v \rho dv = \rho v = \rho (y + h) S_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_v \rho dv = \rho S_1 \frac{dh}{dt}$$

en remplaçant dans l'équation de continuité :

$$\rho S_1 \frac{dh}{dt} + \rho S_2 \sqrt{2gh} = 0 \Rightarrow \int_0^t dt = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

et en intégrant le temps entre 0 et t et la hauteur entre  $h_1$  et  $h_2$  on aura :

$$t = \frac{2 S_1}{S_2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{D^2}{d^2} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})$$

\* Dans le cas où le réservoir est percé en bas alors  $y = 0$  et la hauteur varie de  $h$  à 0 (vidange). Le temps de vidange sera donc :

$$t_v = \frac{2 S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \sqrt{h} = \frac{2 S_1 h}{S_2 \sqrt{2gh}} = \frac{2 V_0}{Q_{v0}}$$

où :

$V_0$  : volume initial ;

$Q_{v0}$  : débit volumétrique initial.

### Application numérique :

Soit une boîte de hauteur  $115 \text{ mm}$  et de diamètre  $100 \text{ mm}$  qui se vidange par un petit orifice de  $1,5 \text{ mm}$  de diamètre. Sachant que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , le temps de vidange de la boîte est :

$$t_v = \sqrt{\frac{2}{10} \frac{100^2}{1,5^2}} \sqrt{0,115} = 674 \text{ s} \Rightarrow t_v = 11 \text{ mn } 14 \text{ s.}$$

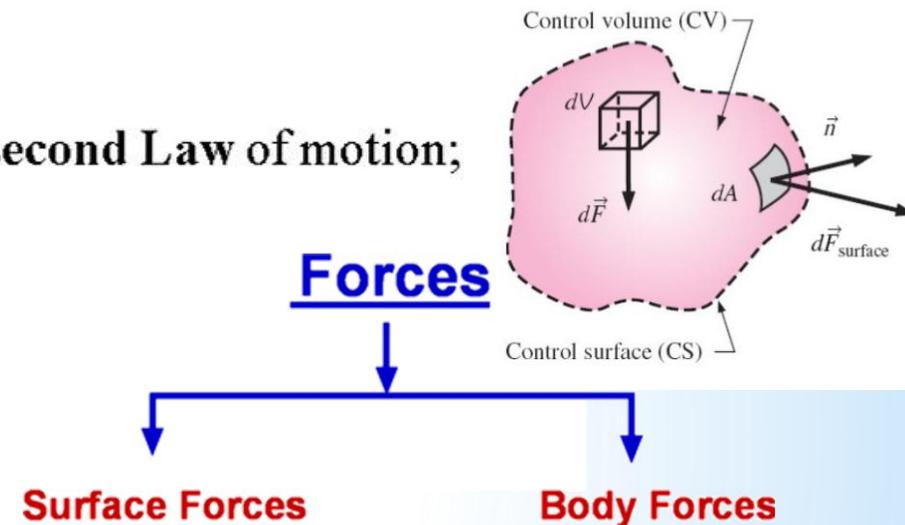
# Momentum conservation -NV- Newton's Second Law

### 3.2- Conservation of Momentum:

Momentum equation are derived based on Newton's second Law of motion;

$$\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}_i$$

where  $\sum \mathbf{F}_i$  = summation of forces in  $i$ - direction,



**Forces : Body Force**

**Surface Force**

**Body Forces : - Gravity force**

**- Electromagnetic Force**

**- Coriolis Force**

**- Centrifugal Force**

**Surface Forces : - Pressure Force**

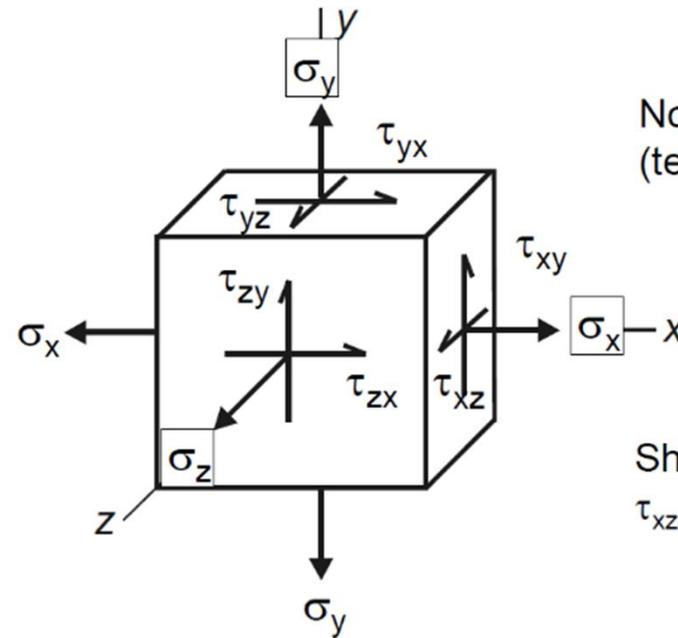
**- Viscous Force**

**(Shear Force)**

Herein, the following notation will be followed;

$\sigma_{ij}$  &  $\tau_{ij}$ :  $i$  -represents the direction of the normal line to the surface on which the stress is acting.  
 $j$  - represents the stress direction.

$$\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}_i$$



Normal stresses  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$   
 (tension is positive)

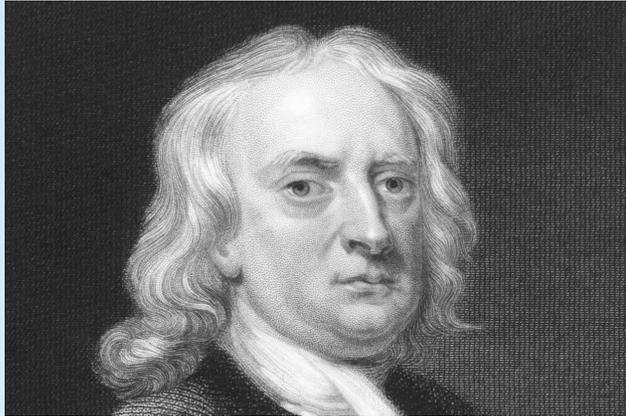
Shear stresses  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  
 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Sign convention for  $\tau_{ab}$

Subscript a indicates the "face" on which the stress acts  
 (positive x "face" is perpendicular to the positive x direction)

Subscript b indicates the direction in which the stress acts

Strictly  $\sigma_x = \sigma_{xx}$ ,  $\sigma_y = \sigma_{yy}$ ,  $\sigma_z = \sigma_{zz}$



Isaac Newton



## Newtonian Fluids

### Examples of Newtonian fluids

All gases and most liquids which have simpler molecular formula and low molecular weight such as

- Water
- Benzene
- ethyl alcohol
- $\text{CCl}_4$
- Hexane

and most solutions of simple molecules are Newtonian fluids

## Non-Newtonian Fluids

### Examples of Non-Newtonian fluids

Generally non-Newtonian fluids are complex mixtures such as

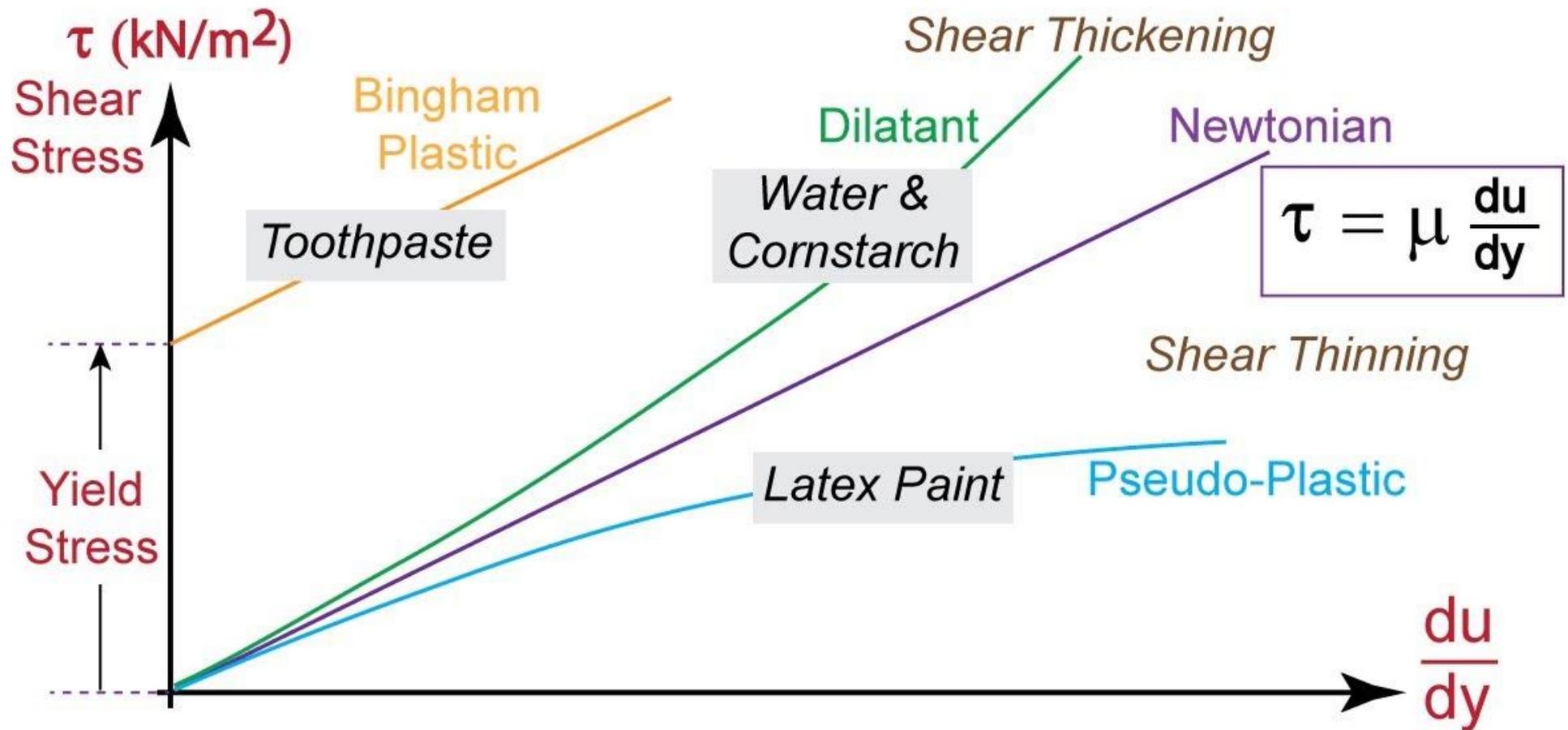
- slurries
- Pastes
- Gels
- polymer solutions etc



# Non-Newtonian Fluids

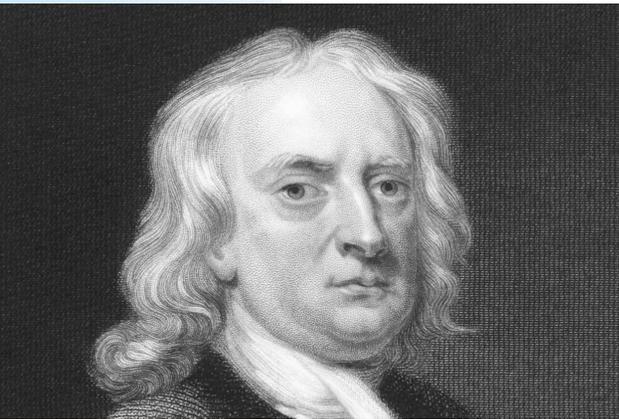


# NON-NEWTONIAN FLUIDS



# Newtonian Fluids

- Contraintes normales :



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \\ \sigma_{yy} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \\ \sigma_{zz} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p \end{array} \right. \quad (4.12)$$

- Contraintes tangentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

## 2.9 Equations de quantité de mouvement

Avant d'établir les équations du mouvement d'un écoulement idéal, donnons en premier lieu la définition des forces massiques et surfaciques :

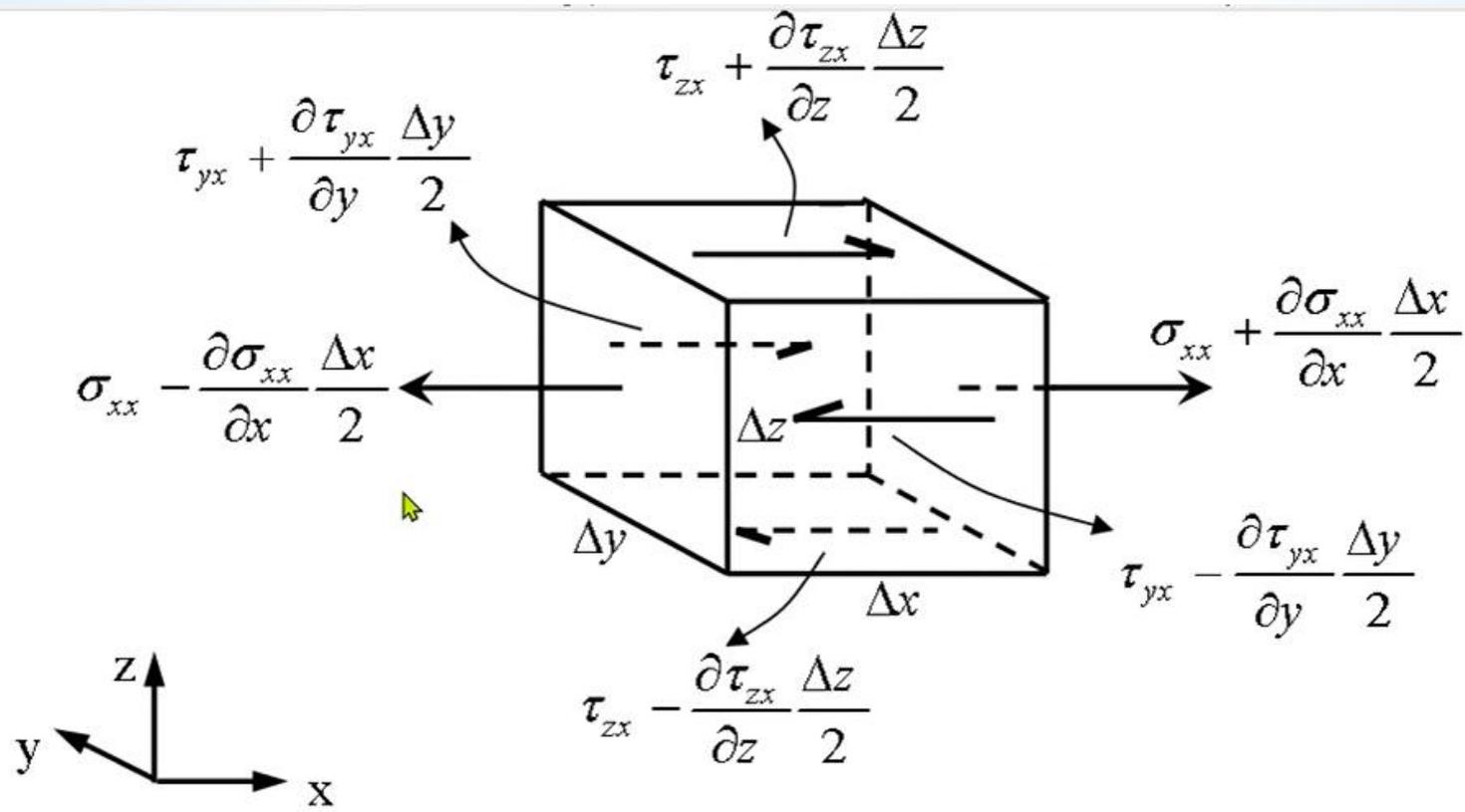
- Une force massique est une force dont la valeur est proportionnelle à la masse de l'élément de fluide sur lequel elle agit (force de gravité, magnétique, ...etc.).

- Une force de surface est une force qui agit sur la surface de l'élément de fluide et elle est exercée soit par les autres éléments adjacents soit par un solide en contact avec le fluide (force de pression, contrainte de cisaillement, ...etc.).

\* Dans un écoulement idéal, on néglige les frottements entre les éléments de fluide ( $\mu \rightarrow 0$ ). Donc les contraintes de cisaillement ne se produisent pas et on trouve, comme

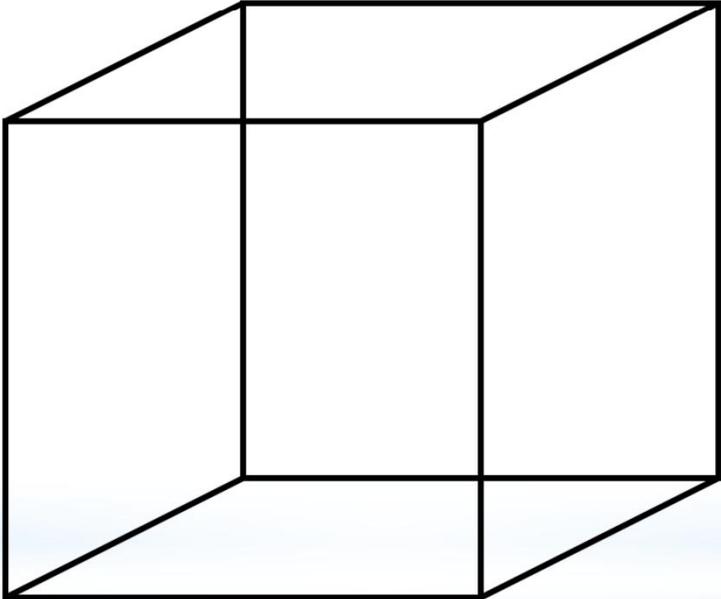
en hydrostatique, que la pression ne dépend pas de la direction.

Les équations de quantité de mouvement sont obtenues par application de la seconde loi de Newton : *Le taux de variation de la quantité de mouvement par rapport au temps d'une particule de fluide est égale à la résultante de toutes les forces qui exercent une influence ou une action sur cette particule.*



$$\begin{aligned}
 F_x = & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \\
 & + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \\
 & + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

$$\therefore F_x = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$



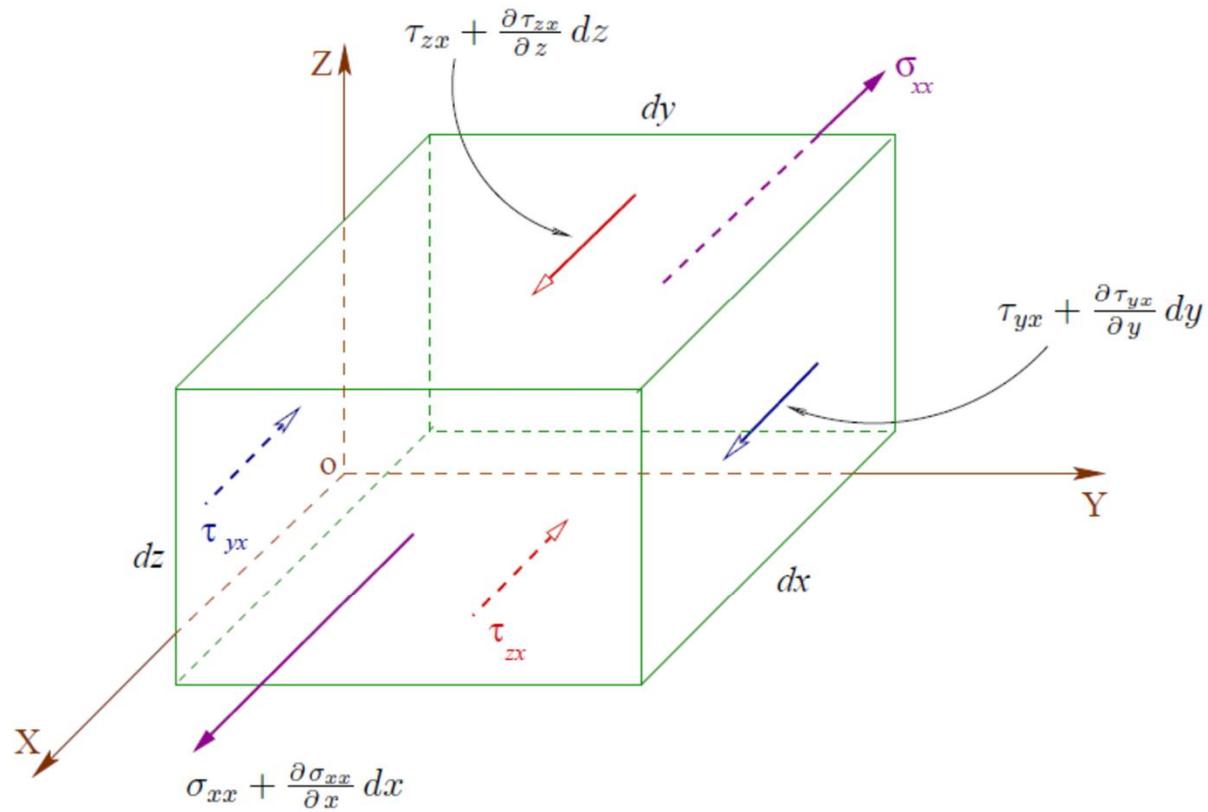


FIGURE 4.3: *Etablissement des équations de Navier-Stokes.*

Appliquons maintenant la loi de Newton :  $\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{\gamma}$

Suivant  $OX$  on a : 
$$\sum F_x = m \gamma_x = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt}$$

avec 
$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_{xx} dy dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho dx dy dz f_x \end{aligned}$$

$f_x$  étant la composante de toutes les forces volumiques par unité de masse suivant l'axe  $X$ .

En simplifiant par  $dx dy dz$  on aura :

$$\rho \frac{D u}{D t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + f_x \quad (4.17)$$

En introduisant les relations (4.12) et (4.13) on aura alors :

$$\rho \gamma_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \operatorname{div} \vec{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho f_x$$

et pour une viscosité dynamique  $\mu$  constante :

$$\rho \frac{D u}{D t} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [(\varepsilon + \mu) \operatorname{div} \vec{q}] + \mu \Delta u \quad (4.18)$$

où  $\Delta u \equiv \nabla^2 u$

Pour le cas d'un fluide incompressible l'équation de Navier-Stokes suivant l'axe  $OX$  se réduit à :

$$\frac{D u}{D t} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (4.19)$$

avec :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Les équations de Navier-Stokes (N-S) s'écrivent donc sous forme vectorielle compacte :

$$\frac{D \vec{q}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{q} \quad (4.20)$$

## Navier-Stokes

- We can write the general (3D) formula in a more compact form given below – the **Navier-Stokes equation**
- The formula is really a *mnemonic* – it contains all the physics you're likely to need in a *single* equation
- The vector form given here is general (not just Cartesian)

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right] = \eta \nabla^2 \underline{u} - \nabla P + \Delta \rho g \hat{y} + F_{1,2 \dots}$$

Inertial term. Source of turbulence. See next slide. Calm to fast part of stream.

Diffusion-like viscosity term. **Warning:**  $\nabla^2 \underline{u}$  is complicated, especially in non-Cartesian geom.

Pressure gradient

Buoyancy force or other body force (e.g. thermal or electromagnetic)  $\hat{y}$  is a unit vector

Zero for steady-state flows. E.g.: calm to fast part of stream stays same one week to the next, unless it rains.

En coordonnées cartésiennes, les projections sur les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  donnent respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Ces équations expriment l'équilibre entre les forces d'inertie d'une part et, d'autre part, les forces de gravité (ou pesanteur) par unité de masse, celles de pression ainsi que celles de viscosité.

## Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

- Suivant la direction radiale ( $r$ ) :

$$\frac{D u_r}{D t} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.22)$$

- Suivant la direction tangentielle ( $\theta$ ) :

$$\frac{D v_\theta}{D t} + \frac{u_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.23)$$

- Suivant la direction verticale ( $z$ ) :

$$\frac{D w_z}{D t} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z \quad (4.24)$$

Avec :

- Composantes du vecteur vitesse :  $\vec{q} = \vec{q}(u_r, v_\theta, w_z)$
- Dérivée particulière d'une fonction  $h$  quelconque :

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.25)$$

- Laplacien d'une fonction  $h$  quelconque :

$$\nabla^2 h \equiv \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (4.26)$$

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.27)$$

## 2.9.2 Forme intégrale

La quantité de mouvement d'un élément de fluide compris dans un volume arbitraire ( $v$ ) est définie par :

$$I_v = \int_v \rho \vec{q} \, dv \quad (2.20)$$

D'après la loi de Newton, nous avons :

$$\frac{D I_v}{D t} = \sum F_{ex} \quad (2.21)$$

d'où en appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradski (Annexe A.9) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho \vec{q} \, dv + \int_s \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_v \rho \vec{f}_v \, dv - \int_s P \cdot \vec{n} \, dS + \vec{R} \quad (2.22)$$

$\vec{R}$  représente, dans l'équation (2.22), la *force de réaction* exercée par la paroi solide sur le fluide.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_S \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}_S) dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho \vec{V}) d\Omega + \int_S (\rho \vec{V})(\vec{V} \cdot \vec{n}_S) dS + \int_S (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) dS = \int_S (-p \vec{n}) dS$$

## 6. Irrotational flow

An *irrotational flow* is defined as a flow for which each and every fluid particle is not rotating. Mathematically speaking, the curl of the velocity is identically zero.

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.38)$$

For 2D flow this reduces to  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$ .

- **Exemple d'application :**

Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans une conduite coudée d'un angle  $\alpha$  (Fig.2.7). On cherche la force exercée par le fluide sur la conduite entre les sections  $S_1$  et  $S_2$ . La masse volumique du fluide est  $\rho$  et on suppose que les variables d'écoulement sont uniformes dans les deux sections et on peut négliger l'effet de la pesanteur.

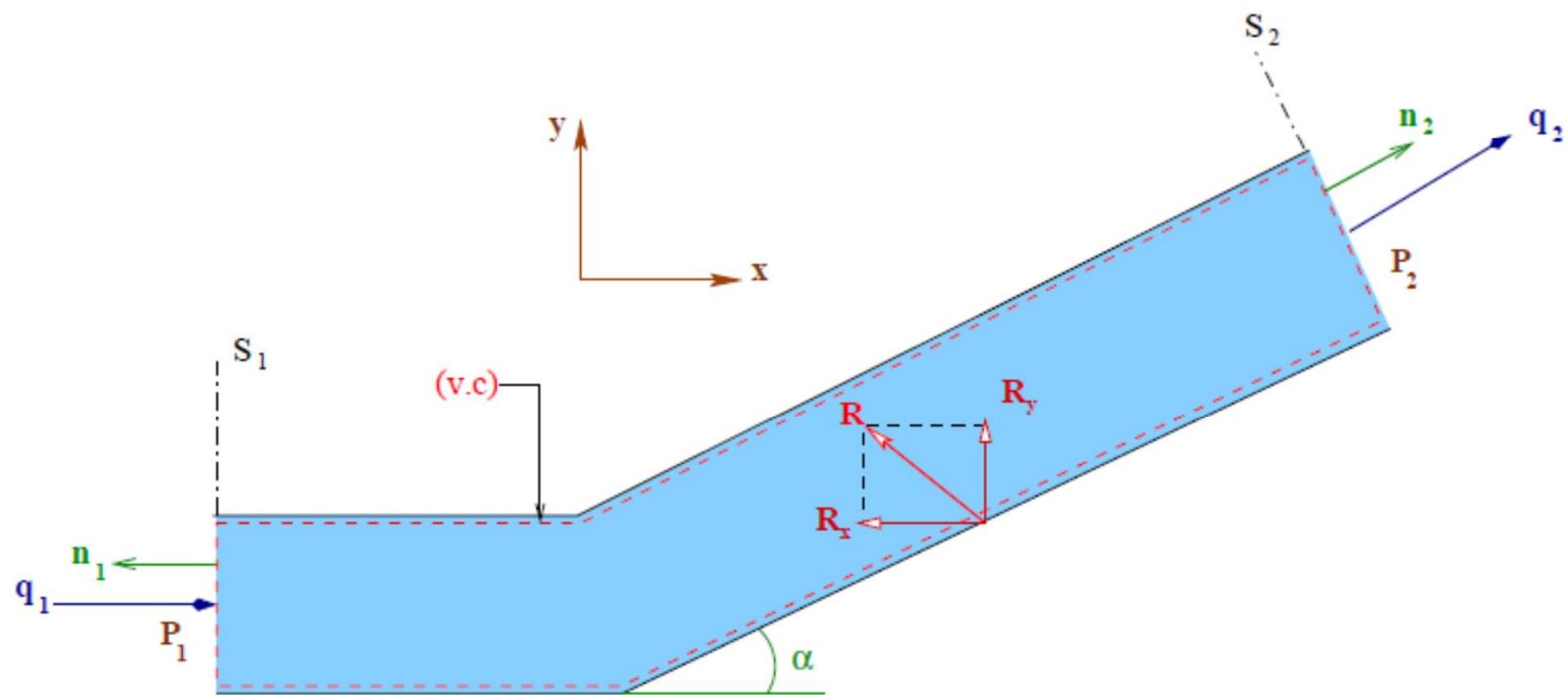


FIGURE 2.7: *Exemple d'application. Force exercée sur un coude.*

Ecoulement permanent  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$  et l'équation (2.22) devient :

$$\int_s \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \sum \vec{F}_{ex} = - \int_s P \cdot \vec{n} dS + \vec{R}$$

\* Décomposition selon l'axe  $X$  :

$$\int_{s_1} \rho \vec{q}_{1x} (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho \vec{q}_{2x} (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = - \int_{s_1} P_1 \cdot \vec{n}_{1x} dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \vec{n}_{2x} dS + \vec{R}_x$$

\* Projection suivant l'axe  $X$  :

$$\int_{s_1} \rho u_1 (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho u_2 (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = \int_{s_1} P_1 dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \cos \alpha dS - R_x$$

$$-\rho q_1^2 S_1 + \rho q_2^2 \cos \alpha S_2 = P_1 S_1 - P_2 \cos \alpha S_2 + F_x$$

car  $F_x = -R_x$  d'où :

$$F_x = S_2 \cos \alpha (P_2 + \rho q_2^2) - S_1 (P_1 + \rho q_1^2)$$

\* Décomposition selon l'axe  $Y$  :

$$\int_{s_1} \rho \vec{q}_{1y} (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho \vec{q}_{2y} (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = - \int_{s_1} P_1 \cdot \vec{n}_{1y} dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \vec{n}_{2y} dS + \vec{R}_y$$

\* Projection suivant l'axe  $Y$  :

$$\int_{s_1} \rho v_1 (\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{s_2} \rho v_2 (\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = - \int_{s_1} P_1 \cdot 0 dS - \int_{s_2} P_2 \cdot \sin \alpha dS + R_y$$

$$\rho q_2^2 \sin \alpha S_2 = -P_2 \sin \alpha S_2 - F_y \quad \text{car} \quad F_y = -R_y \quad \text{et} \quad v_1 = 0$$

d'où :

$$F_y = -S_2 \sin \alpha (P_2 + \rho q_2^2)$$

et enfin la résultante des forces exercées par le fluide sur la conduite :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

# References

Dr. MESSAOUDI Laïd

MCA

Département de Mécanique

Université Batna 2

<http://staff.univ-batna2.dz/messaoudi-laid>

Dr. Mushtaq Al-Ebrahimy

Mechanical Engineering Department, University of Thi-Qar

<https://www.youtube.com/channel/UCu9Puth4dyEiUC6tsIG4P1w>

Thank you

danke 謝謝 ngiyabonga شكراً جزيلاً

спасибо faafetai lava mersi barka welalin tack teşekkür ederim mahalo tapadh leat

Баярлалаа dankie dhanyavadi maururu koszonom vinaka spasia blagodaram dank je misaotra matondo paldies grazzi

enkosi bedankt bayarlalaa nandi kiitos dankie dhanyavadi maururu koszonom hvala maunuru

dziękuje chnorakaloutioun gratias ago gracies sulpay go raibh maith agat mamnun

obrigado sobodi dēkuji sagolun sukriya kop khun krap taiku arigatō takk dakujem trugarez

mesī dīdī madloba najis tuke ahigatō tanemirt rahmet dhanyavadagalu shukriya merce мерси

তোমাকে ধন্যবাদ rahmat terima kasih 감사합니다 xiexie eucharistō diolch dhanyavadagalu shukriya merce

chukrame murakoze tenki asante manana obrigada

hvala mochchakkeram djiere dieuf tau дякую