Correction de la serie 1

(Distributions et Transformée de Fourier 2021/2022)

Exercice 01

1/ Si $f=0 \Rightarrow \{x\in\Omega : f(x)\neq 0\} = \phi$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Supp}\, f = \overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}} = \overline{\phi} = \phi$ (ϕ est fermé)

Soit maintenant $\mathrm{Supp} f = \phi$. Alors

$\overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}} = \phi$

Puisque tout ensemble est inclu dans son adhérence ($A\subset\overline{A}$), alors

$\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\} \subset \phi$

d'où $\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\} = \phi \Leftrightarrow f=0$ dans Ω

2/ $\mathrm{Supp}(f.g) = \overline{\{x\in\Omega : f(x)g(x)\neq 0\}} = \overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}\cap\{x\in\Omega : g(x)\neq 0\}}$

puisque: $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$, on a :

$\mathrm{Supp}(f.g) \subset \overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}} \cap \overline{\{x\in\Omega : g(x)\neq 0\}} = \mathrm{Supp} f\cap\mathrm{Supp} g$

Important : Il est très utile de connaitre la propriété suivante :

Si $f\in C^1(\Omega)$, alors pour tout $i=1,\dots,n$: $\mathrm{Supp}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\subset\mathrm{Supp} f$

Exercice 02

1/ Il est claire que $\varphi \in C^\infty(]-\infty, 1[)$ et $\varphi \in C^\infty(]1, +\infty[)$

et $\forall t > 1$, $\forall n$, $\varphi^{(n)}(t) = 0$.

Il reste à montrer que φ est de classe C^∞ au voisinage de 1. On a:

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 1} \varphi(t) = 0 = \varphi(1) = \lim_{t \overset{<}{\to} 1} \varphi(t)$$

Donc φ est continue en 1 et par suite sur $\mathbb{R}$.

On démontre par récurrence que pour tout n, $\exists P_n$ (polynôme)

tel que: $\forall t<1$: $\varphi^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(1-t)^{2n}} \varphi(t)$ .... $(*)$

En effet, $(*)$ est vrais pour $n=0$ avec $P_0 = 1$ et

$$P_{n+1}(t) = (1-t)^2 P_n'(t) + (2n+1) P_n(t) - 2nt\, P_n(t)$$

La formule $(*)$ montre que (pour $n=1$):

$$\lim_{t \overset{<}{\to} 1} \varphi'(t) = \lim_{t \overset{>}{\to} 1} \varphi'(t) = 0 = \varphi'(1)$$

Donc $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. En appliquant successivement le même raisonement à φ'', $\varphi^{(3)}$, ..., on déduit que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$

2/ Notons que $\psi = \varphi(\|x\|^2)$.

Puisque $x \mapsto \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ est de classe C^∞, d'après 1/, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$

(en tant que composition de deux fonctions de classe C^∞)

Il est claire que

$$\operatorname{Supp}\psi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}} = \overline{B(0,1)}$$

Exercice 03

Soit $\text{Supp} f \subset [-M, M]$, alors

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$: $\text{Supp}\, \varphi_n \subset [-M-1, M+1]$

2/ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, Par le théorème des accroissements finis on a :

$$|\varphi_n^{(k)}(x) - 0| = \left|f^{(k)}\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - f^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1} \left|f^{(k+1)}(\xi)\right| / \xi \in \left]x, \frac{1}{n+1} + x\right[$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \|f^{(k+1)}\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(x) - 0| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Exercice 4

1/ Soit $M > 0$ tq : $\varphi = 0$ si $|x| \geq M$. Si $|x| \geq M + |th| \geq M$

donc $\varphi = 0$ et $|x + th| \geq |x| - |th| \geq M$, donc $\varphi(x + th) = 0$

$\Rightarrow \text{Supp}\, \varphi_t \subset B(0, M + |th|)$

(Il est clair que $\varphi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour $t \neq 0$)

2/ D'après 1/, pour $|t| \leq 1$ (en particulier pour t assez petit) :

$\text{Supp}\, \varphi_t \subset B(0, M + |th|) \subset B(0, M + h)$ (compact fixé)

Soit α un multi-indice. On a :

$$\partial^\alpha \varphi_t(x) = \frac{1}{t} \left[\partial^\alpha \varphi(x + th) - \partial^\alpha \varphi(x)\right]$$

La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à l'ordre 2 à la fonction $\partial^\alpha \varphi$, donne :

$$\partial^\alpha \varphi(x + th) - \partial^\alpha \varphi(x) = t \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\partial^\alpha \varphi(x)) + t^2 \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-u)\, h_i h_j \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) \partial^\alpha \varphi(\lambda)\, du$$

où $z = x + uth$. Par conséquent

$$\left|\partial^\alpha \varphi_t(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\partial^\alpha \varphi(x))\right| \leq C|t|\,|h|^2 \sum_{|\beta| \leq |\alpha|+2} \sup_{y \in K} |\partial^\beta \varphi(y)|$$

et donc lorsque $t \to 0$, $\partial^\alpha \varphi_t$ converge uniformément sur K

vers la fonction $\sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(\partial^\alpha \varphi)(x) := f(x)$

Ceci prouve que φ_t converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers f.

Exercice 05

$\Leftarrow$ claire

$\Rightarrow$??

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq: $\operatorname{Supp} \theta \subset [-1,1]$ et $\theta > 0$ sur $[-1,1]$

(l'existence de θ est justifié dans le cours)

alors $\frac{1}{\theta} \in C^\infty([-1,1])$ et $\frac{1}{\theta} \neq 0$ sur $[-1,1]$.

Notons que $f\theta \in C^\infty$ puisque $f\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donc

$$\frac{1}{\theta} \cdot f\theta \in C^\infty([-1,1])$$

or $\frac{1}{\theta} \cdot f\theta = f$, par suite $f \in C^\infty([-1,1])$.

Un raisonnement analogue montrerait, en prenant des translatées de θ, que f est de classe $C^\infty([n,n+2])$ avec $n \in \mathbb{Z}$, donc $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 06

1/ $\Longrightarrow$

Il est claire que si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi = \theta'$ alors $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

de plus $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x)\,dx = 0$ puisque $\operatorname{Supp} \theta \subset K$ compact

$\overset{??}{\Longleftarrow}$

On pose $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt$ avec $\mathrm{Supp}\,\psi \subset [-M, M]$

Il est claire que $\theta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Si $x < -M$, alors $\psi|_{]-\infty, x[} = 0$, par suite $\theta(x) = 0$

si $x > M$, alors $\int_{x}^{+\infty} \psi(t)\,dt = 0$

Donc :

$$\forall x > M : \theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt + 0 = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} \psi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt = 0$$

Donc $\mathrm{Supp}\,\theta \subset [-M, M]$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\theta' = \psi$.

2/ $\Rightarrow$ claire

$\overset{??}{\Longleftarrow}$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{Supp}\,\psi \subset [-M, M]$ et $\psi(0) = 0$.

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$\psi(x) = \overset{0}{\cancel{\psi(0)}} + x \int_0^1 \psi'(tx)\,dt = x\,\theta(x).$$

avec $\theta(x) = \int_0^1 \psi'(tx)\,dt$.

Il est claire que $\theta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

si $|x| > M$, on a : $\psi(x) = 0$ d'où $\theta(x) = 0$

et par suite $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 07

On raisonne par l'absurde.

On suppose $\exists x_0 \in \Omega$ tq: $f(x_0) \neq 0$

Puisque f est continue, $\exists V_{x_0}$ un voisinage x_0 tel que

$\forall x \in V_{x_0} : f(x) \neq 0$

Donc $\exists \varepsilon > 0$ $(B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega)$, $\forall x \in B(x_0, \varepsilon)$; $f(x) \neq 0$

On suppose que $f(x) > 0$ sur $B(x_0, \varepsilon)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ définie par:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{si } |x - x_0| < \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x - x_0| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$\mathrm{supp}\, \varphi = B(x_0, \varepsilon)$, $\varphi > 0$, donc

$$\int_{\Omega} \varphi(x) f(x)\, dx = \int_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) f(x)\, dx > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse.