

Espaces de Fonctions et Propriétés

Notations

Soient Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-entier.

On appelle longueur de α et on note par $|\alpha|$, l'entier :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Si α et β sont deux multi-entiers, on dit que $\alpha \leq \beta$ si et seulement si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

On pose

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!},$$

où la factorielle de α qu'on note par $\alpha!$ est définie par :

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On note $D^\alpha f$ la dérivée d'ordre α de f définie par :

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} f$$

Les espaces $C^k(\Omega)$ et $C^k(\overline{\Omega})$ ($0 \leq k \leq \infty$)

On note par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k , dont les dérivées d'ordre k sont continues. ç.à.d :

$$f \in C^k(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \text{ existe et est continue}$$

On note par $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continument dérivables. ç.à.d :

$$f \in C^\infty(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha f \text{ existe et est continue.}$$

Formule de Leibniz

Soient $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a

$$D^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} \psi$$

On note par $C^k(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k sur Ω , dont les dérivées d'ordre k sont continues et prolongeables par continuité à $\overline{\Omega}$. ç.à.d :

$$f \in C^k(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \text{ se prolonge continument à } \overline{\Omega}.$$

La topologie de $C^k(\overline{\Omega})$ est définie par la norme :

$$\|f\|_k = \sup_{x \in \overline{\Omega}, |\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|$$

$(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_k)$ est espace de Banach.

La convergence dans $C^\infty(\Omega)$

Soient $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite de $C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. On dit que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers φ dans $C^\infty(\Omega)$, si :

$$\text{Pour tout compact } K \text{ dans } \Omega, \text{ et tout } m \in \mathbb{N}, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| \right\} = 0$$

Les espaces $D^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$)

Définition

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle support de la fonction $f \in C^k(\Omega)$, et on note par $\text{Supp} f$, l'ensemble suivant :

$$\text{Supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Définition

On note par $D^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^k(\Omega)$ à support compact.

Notations et Conséquence

1. Si $k = \infty$, $D^\infty(\Omega)$ est noté par $D(\Omega)$ et on l'appelle espace des fonctions test (ou fonctions d'essai).
2. Soit K une partie compacte de Ω . On note par $D_K(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support dans K :

$$D_K(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{Supp}(f) \subset K\}$$

3. Par conséquent, on a

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \exists K \text{ Compact}, K \subset \Omega, f \in D_K(\Omega)\}$$

Caractérisation

$$\exists \theta \in D(\mathbb{R}) : \psi = \theta' \iff \psi \in D(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

Exemple (Fonction test)

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$, la fonction réelle φ définie sur \mathbb{R}^n par la formule donnée ci-dessous, est une fonction de classe $C^\infty(\Omega)$ avec $Supp(\varphi) = \overline{B(0,1)}$, et par suite $\varphi \in D(\Omega)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

La convergence dans $D(\Omega)$

Définition

On dit que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D^k(\Omega)$ si :

1. Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour tout $m \geq 1$: $Supp(\varphi_n) \subset K$ et $Supp(\varphi) \subset K$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_m$ converge vers $D^\alpha \varphi$ uniformément sur K .

Autrement dit, $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D(\Omega)$ si et seulement si :

1. Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour tout $m \geq 1$: $\varphi_m, \varphi \in D^k(\Omega)$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $m \geq m_0$ on a

$$\sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi_m(x) - D^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon$$

Suites régularisantes

Définition

On appelle suite régularisante dans $D(\mathbb{R}^n)$, toute suite $(f_j)_{j \geq 1} \subset D(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $j \geq 1$: $f_j \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = 1$
3. $Supp(f_j) \subset B(0, \varepsilon_j)$ avec $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$

Exemple

Pour toute fonction $0 \leq \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on peut associé une suite régularisante $(f_j)_{j \geq 1}$ comme suit :

1. On pose : $f = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx} \varphi$. $\left(f \in D(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1 \text{ et } \text{Supp}(f) \subset B(0, 1) \right)$
2. Soit maintenant $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ une suite telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$ $\left(\varepsilon_j = \frac{1}{1+j} \text{ par exemple } \right)$
3. On pose : $f_j = \frac{1}{\varepsilon_j^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right)$

Les espaces $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$)

Définition

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose :

$$L^p(\Omega) = \{ \text{la classe des fonctions } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q } f \text{ est mesurable et } \|f\|_{L^p} < \infty \},$$

avec

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace de Banach.

Définition

Pour le cas $p = \infty$, on pose :

$$L^\infty(\Omega) = \{ \text{la classe des fonctions } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q } f \text{ est mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \},$$

On définit et on note la norme dans $L^\infty(\Omega)$ par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C : |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega \}$$

Remarque

On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées, et on dit que $\|f\|_{L^\infty}$ est le Sup essentiel de f :

$$\text{Supess}(f) = \|f\|_{L^\infty}$$

Théorème

L'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est un espace de Banach.

Soit ($1 \leq p \leq \infty$), on désigne par q le conjuguée de p : c'est à dire q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème (Inégalité de Hölder)

Soient $(1 \leq p \leq \infty)$ et q le conjugué de p .

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Proposition (Comparaison entre les espaces L^p)

Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$, tels que $1 \leq p < q \leq \infty$ et E un sous ensemble de \mathbb{R}^n , mesurable et de mesure fini. ($m(E) < \infty$, m est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n).

Alors :

$$L^q(E) \subset L^p(E)$$

De plus, cette injection est continue :

$$\exists C_{p,q,m(E)} : \|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^q} \quad \forall f \in L^q(E)$$

Définition (L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$)

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction réelle définie sur Ω . f est dite localement intégrable, et on note $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, si elle est intégrable sur tout sous-ensemble borné et mesurable de Ω .

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall K \subset \Omega \text{ avec } K \text{ borné et mesurable} : \int_K |f(x)| dx < \infty\}$$

Remarque

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors pour tout compact K dans Ω (K est fermé et borné, donc mesurable et borné) :

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

Lemme (de Dubois-Reymond)

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si pour tout $\varphi \in D(\Omega) : \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$, alors $f = 0$ presque partout sur Ω .

La proposition suivante est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p .

Proposition

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a :

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

Définition (Produit de convolution)

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle produit de convolution de f et g et on note par $(f * g)$, l'application donnée par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

Proposition

Soient $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ une suite régularisante et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors la suite $(f_j)_{j \geq 1}$ définie par :

$$f_j = (\varphi_j * f) \quad \forall j \geq 1$$

vérifie les assertions suivantes :

1. $\forall j \geq 1 : f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. Si $f \in D(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $D(\mathbb{R}^n)$.
4. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
5. S'il existe $a > 0$ tel que $f = 0$ presque partout sur $\left(\overline{B(0, a)}\right)^C$, alors $f_j = 0$ presque partout sur $\left(\overline{B(0, a + \frac{1}{j})}\right)^C$ (Donc f_j est à support compact et par suite $f_j \in D(\mathbb{R}^n)$).

Théorème

Pour $n \geq 1$ et $p \in [1, \infty[$, $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

La démonstration utilise une méthode dite de "troncature et régularisation"

On pose

$$A = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n), \exists K \text{ compact de } \mathbb{R}^n : f = 0 \text{ presque partout sur } K^C\}$$

Notons que les éléments de A sont à support compact.

1^{ère} étape :

Nous allons montrer que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, en effet :

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $f_j = f \cdot \chi_{\overline{B(0, j)}}$, on a :

1. $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ presque partout (convergence simple).
2. $|f_j| \leq |f|$ presque partout $\forall j \in \mathbb{N}$

Ainsi, d'après le théorème de la convergence dominée dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, la suite $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $(f_j)_{j \geq 1} \subset A$, on a bien montré que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2^{ème} étape :

Soit maintenant $f \in A$. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe une suite $(f_j)_{j \geq 1} \subset D(\mathbb{R}^n)$ telle que $(f_j)_{j \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Or cette suite est donnée par $f_j = (\varphi_j * f)$ où $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ est une suite régularisante.

Le résultat découle immédiatement de la proposition précédente (précisément, d'après 1., 4. et 5.).