جامعة الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

محاضرات في ميكانيك النقطة المادية

محاضرة 1+محاضرة 2

موجه لطلبة السنة الاولى الرياضيات والاعلام الآلي

للأستاذة: حنان الارقط

استاذة محاضرة - ب -

الفصل الاول : الاشعة

الفصل الثاني: حركية النقطة المادية

الفصل الاول: الأشعة

تمهيد:

تهدف هذه الفقرة الى تزويد الطالب بما يحتاجه من القواعد الاساسية التي تدير وتتحكم في الاشعة وهذا مهم في الفيزياء لأننا نعبر عن المعاني الفيزيائية بأدوات رياضية فمثلا : نرفق الحركة بشعاع موضع ،انتقال، سرعة تسارع.....

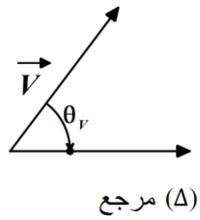
1- الاشعة

أ- **تعريف الاشعة:** الشعاع هو كائن فيزيائي – رياضي يتعين بعددين في حين يتعين الكائن السلمي بعدد واحد ويرمز له بالرمز : $\vec{V}, \vec{A}, \vec{B}$..........

حيث يرمز الحرف: V الى طويلته: $\|V\| \equiv \|\vec{V}\| \equiv |V| \equiv V$

او القيمة العددية (المقدار) اما السهم فيرمز الى اتجاهه ويتحدد بزاوية θ_v بالنسبة لمحور محدد مسبقا وتسمى عمدته.

فيكتب الشعاع $\vec{V}$ هندسيا كالتالي:

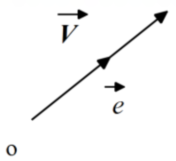


$$\vec{V} = (|\vec{V}|, \theta_V) = (V, \theta_V)$$

ب- شعاع الوحدة:

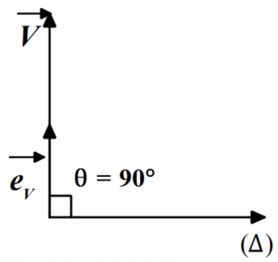
هو ذلك الشعاع الذي طويلته تساوي وحدة الاطوال اي $|\vec{e}| = 1$ ويكتب هندسيا $\vec{e_v}(1,\theta_v)$

كما انه يمكن تعريف شعاع وحدة لكل شعاع $\vec{V}$ حيث يكتب:



$$\vec{V} = |V|\,\vec{e_v} = V\,\vec{e}$$

مثال: علم الشعاع $\vec{V}(3,90^0)$ على تخطيط حيث يظهر فيه شعاع وحدته.



$$\vec{V} = 3\,\vec{e_y}\,,\ |V| = 3$$

$$\frac{\vec{V}}{V} = \vec{e_y} \Rightarrow \left|\vec{e_V}\right| = 1$$

$\vec{e_V}$ هو كذلك شعاع الوحدة وفق الشعاع $\vec{V}$

ج- خواص الاشعة:

1- نقول عن الشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ انهما متساويين إذا تساوت عمدتيهما وطوليتهما في ان واحد بالنسبة لنفس المرجع.

$$\left|\left|\vec{V_1}\right|\right| = \left|\left|\vec{V_2}\right|\right|, \theta_{V_1} = \theta_{V_2}$$

2-نقول عن شعاعين انهما متوازيين اذا تساوت عمدتيهما واختلفت طوليتيهما اي:

$$\theta_{V_1} = \theta_{V_2}, |V_1| \neq |V_2|$$

$$\vec{V_1} = \alpha \vec{V_2}, |V_1| \neq \alpha |V_2|$$

2- العمليات على الاشعة:

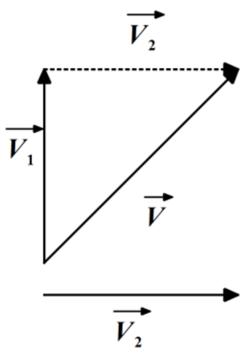
تدير الاشعة ثلاث عمليات وهي: الجمع، الجداء السلمي والجداء الشعاعي وتجرى العمليات بطريقتين هندسيا وتحليليا (حسابيا).

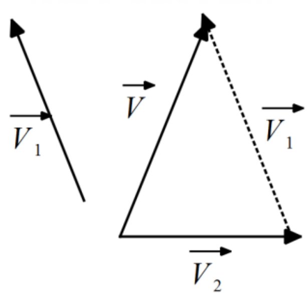
تعتمد الطريقة الهندسية على القياس المباشر بالأدوات كالمساطر، المناقل، الاوراق وتعتمد الطريقة التحليلية على تحليل الاشعة.

1- جمع الاشعة:

أ-جمع شعاعين: ليكن الشعاعان $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ وليكونا من جنس واحد اي لهما نفس الوحدة نشكل منهما شعاعا ثالثا $\vec{V}$

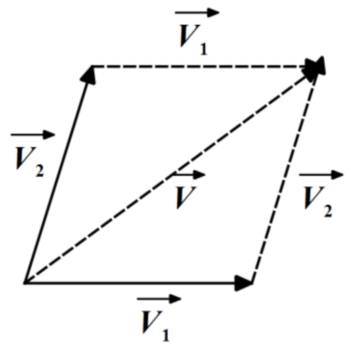
$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$





$\vec{V}$

نحصل على الشعاع $\vec{V}$ هندسيا بنقل الشعاع $\vec{V}_2$ موازيا لنفسه حتى يلتقي ذيله برأس الشعاع $\vec{V}_1$ فالشعاع $\vec{V}$ هو الشعاع الذي ذيله ذيل الشعاع $\vec{V}_2$ ورأسه رأس الشعاع $\vec{V}_1$ أو بالعكس اي ان عملية جمع الاشعة عملية بديلية.



$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

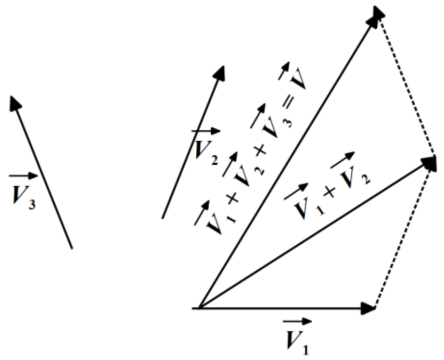
نحصل على شدة شعاع بواسطة العلاقة التالية والتي تسمى بقانون جيوب التمام والتي سنبرهن عنها لاحقا.

$$V = \sqrt{V_1^{\,2} + V_2^{\,2} + 2V_1V_2\cos\left(\vec{V}_1 , \vec{V}_2\right)} \qquad (\Delta)$$

ب- جمع ثلاثة اشعة: لنعتبر ثلاثة اشعة من جنس واحد: $\vec{V}_3 , \vec{V}_2 , \vec{V}_1$ فمحصلتهما هي شعاع رابع $\vec{V'}$ يكتب على الصورة التالية :

$$\vec{V'} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

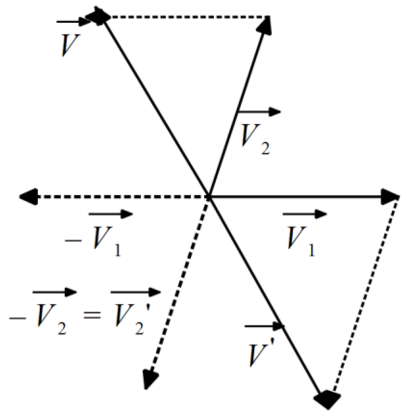
تجرى عملية جمع هذه الأشعة هندسيا على النحو الذي أجرينا به جمع شعاعين، فنجمع أولا شعاعين منهما ثم نجمع الناتج مع الشعاع الباقي ويمكن تعميم هذه الطريقة لجمع عدد من الأشعة مهما بلغ عددها.



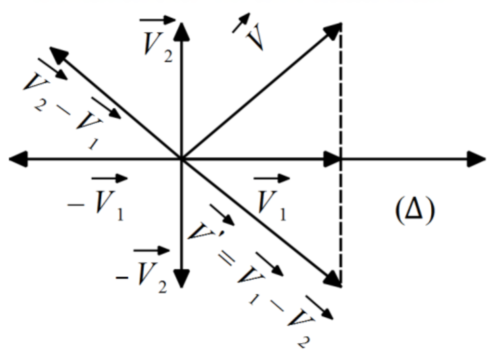
ج- الطرح بين الأشعة: إن عملية طرح شعاع من شعاع تعود الى جمع شعاعين، فمحصلة طرح شعاع $\vec{V}_1$ من الشعاع $\vec{V}_2$ هو $\vec{V'}$ نكتبه على الصورة التالية:

$$\vec{V'} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \left(-\vec{V}_2\right) = \vec{V}_1 + \vec{V'}_2 \ , \vec{V'}_2 = -\vec{V}_2$$

عملية طرح الاشعة ليست تبديلية وهذا ما نلاحظه على الشكل:



مثال: ليكن لدينا محورا مرجعيا (Δ) ، قم بتعيين الشعاعين $\vec{V}_1(3,0°)$ و $\vec{V}_2(2,90°)$ هندسيا ثم عين محصلتهما – عين محصلة جمع الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$



- طويلة الشعاع في هذه الحالة تكتب كالتالي:

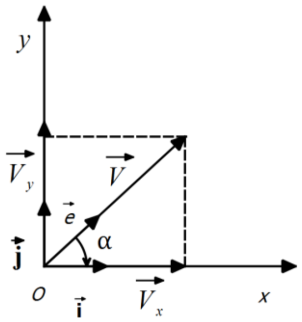
$$|\vec{V'}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - V_1V_2\cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)}$$

$$= \sqrt{9 + 4 - 12\cos(90)}$$

$$= \sqrt{13}$$

د-مركبات الشعاع: يمكن اعتبار كل شعار على انه مجموع شعاعين او اكثر..........

-في المستوي : في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ (معلم متعامد ومتجانس)



حيث:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$$V_x = V\cos\alpha$$

$$V_y = V\sin\alpha$$

بتحديد شعاعي الوحدة $\vec{i}, \vec{j}$ في اتجاه كل من المحورين (Ox) و (Oy) نلاحظ ان:

$$\vec{V}_x = V_x\vec{i}$$

$$\vec{V}_y = V_y\vec{j}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$$

$$\vec{V} = V\cos\alpha\,\vec{i} + V\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{V} = V(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$

وفي الاخير وبما ان: $\vec{V} = V\vec{e}$ فإن $\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$

أما طويلة الشعاع $\vec{V}$ فهي: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

ويمكن استعمال رموز أخرى مثل: $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال: أوجد محصلة الشعاعين $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

- أوجد الفرق بين الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$

الحل

$$1- \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$$

$$|V| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

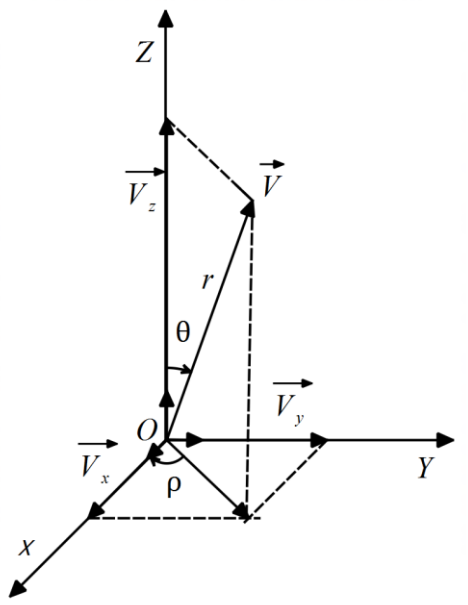
$$2- \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$$

$$|V| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

-في الفضاء: في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس)

نلاحظ انه: $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$

يمكن التحقق هندسيا من ان:



$$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \Rightarrow V_z = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \rho = r\sin\theta$$

$$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x = \rho\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y = \rho\sin\varphi$$

$$V_x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$V_y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$V_z = r\cos\theta$$

اما طويلة الشعاع فهي: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

او بالإحداثيات الكارتيزية : $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

مثال: اوجد المسافة الفاصلة بين النقطتين $A(10,-4,4)$ و $B(10,6,8)$ الممثلتين في معلم متعامد ومتجانس $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

الحل: المسافة المطلوب حسابها

$$\vec{D} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{D} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\vec{D} = 10\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$|D| = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 10.77$$

مثال: اوجد محصلة الاشعة التالية:

$$\overrightarrow{V_1} = 4\,\vec{\mathbf{i}} - 3\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\overrightarrow{V_2} = -3\,\vec{\mathbf{i}} + 2\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\overrightarrow{V_3} = 2\,i - 6\,j \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = 7\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{V_4} = 7\,i - 8\,j \qquad |V| = 23.60\,u$$

$$\overrightarrow{V_5} = 9\,\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$$

لإيجاد منحى او حامل الشعاع $\vec{V}$ حسب الزاوية α :

$$V_x = V\cos\alpha$$
$$V_Y = V\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = -\frac{14}{19} \approx 0.737$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = 36.38°$$

وهي تمثل الزاوية التي يضعها $\vec{V}$ مع المحور (Ox)

2-الجداء السلمي:

تعريف: نسمي الجداء السلمي لشعاعين $\overrightarrow{V_1}$ و$\overrightarrow{V_2}$ العدد الحقيقي $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ حيث:

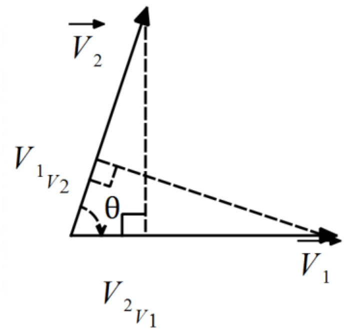
$$\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2} = V_1\,V_1\cos\left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right)$$

$$\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2} = V_1\,V_1\cos\left(\theta_{V_1V_2}\right)$$

حيث:

$\theta_{V_1V_2}$: تمثل اصغر زاوية محصورة بين الشعاعين $\vec{V_1}$ و$\vec{V_2}$ كما يمكن كتابة الجداء السلمي على احد الصور المكافئة التالية:

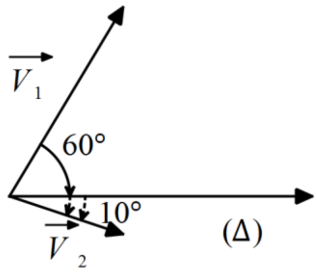
$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = V_{1_{V_2}}.||V_2|| = ||V_1||.V_{2_{V_1}}$$



حيث: نسمي $V_{1_{V_2}} = V_1\cos\theta_{V_1V_2}$ مسقط $\vec{V_1}$ ى $\vec{V_2}$

ونسمي: $V_{2_{V_1}} = V_2\cos\theta_{V_1V_2}$ مسقط $\vec{V_2}$ ى $\vec{V_1}$

مثال: عين الجداء السلمي للشعاعين $\vec{V_1}(5,60°)$ و$\vec{V_2}(3,-10°)$ ومسقط كلا منهما على الاخر.



$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = V_1\, V_1 \cos\left(\theta_{V_1V_2}\right) = 5.3.\cos(70)$$

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = 5.13$$

$$V_{1_{V_2}} = 5\cos(70) = 1.71$$

$$V_{2_{V_1}} = 3\cos(70) = 1.02$$

حالات خاصة: اذا كان: $\overrightarrow{V}_2 = \vec{0}$ و فإن $\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2 = 0$

اذا كان $\overrightarrow{V}_1 \neq \vec{0}$ و $\overrightarrow{V}_1 \neq \vec{0}$ فإن:

$$\overrightarrow{V}_1 \perp \overrightarrow{V}_2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{V}_1 , \overrightarrow{V}_2\right) = \frac{\pi}{2} , \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2 = 0$$

$$\overrightarrow{V}_1 \,\|\, \overrightarrow{V}_2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{V}_1 , \overrightarrow{V}_2\right) = 0 , \cos 0 = 1$$

$$\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2 = V_1 V_2$$

لنبرهن الان على المعادلة (Δ) كما وعدنا

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2 \ , \ \overrightarrow{V}^2 = \left(\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2\right)^2$$

$$\overrightarrow{V}^2 = \overrightarrow{V}_1^2 + \overrightarrow{V}_2^2 + 2\,\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2$$

$$\overrightarrow{V}_1^2 = \overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_1 = V_1^2$$

$$\overrightarrow{V}_2^2 = \overrightarrow{V}_2 \cdot \overrightarrow{V}_2 = V_2^2$$

$$\overrightarrow{V}^2 = V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1\,V_2 \cos\left(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2\right)$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1\,V_2 \cos\left(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2\right)}$$

-خواص الجداء السلمي:

ليكن ثلاثة أشعة غير معدومة

أ- تبديلي: $\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{V}_2 \cdot \overrightarrow{V}_1$

ب- توزيعي:

$$\overrightarrow{V}_1 \cdot \left(\overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{V}_3\right) = \overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_3$$

$$\left(\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2\right) \cdot \overrightarrow{V}_3 = \overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_3 + \overrightarrow{V}_2 \cdot \overrightarrow{V}_3$$

ج- $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$

د- يعبر الجداء $\left(\vec{V} \cdot \vec{e}_V\right)$ عن مسقط (مركبة) الشعاع $\vec{V}$ على المحور $\vec{e}_V$ حيث : (Δ) هو شعاع توجيهه

$$V_\Delta = \vec{V} \cdot \vec{e}_V = |V| \cos\theta_{\Delta V}$$

-العبارة التحليلية للجداء السلمي:

ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعين في المستوي حيث: $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}\right) \cdot \left(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}\right)$$

$$= x_1 x_2 \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j}$$

$$i \perp i \Rightarrow i \cdot j = j \cdot i = 0$$

$$i \cdot i = j \cdot j = i^2 = j^2 = 1$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

أما في الفضاء:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

مثال: أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$

$$\vec{V}_1 = 3\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{V}_2 = -\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$$

$$\cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|V_1| . |V_1|}$$

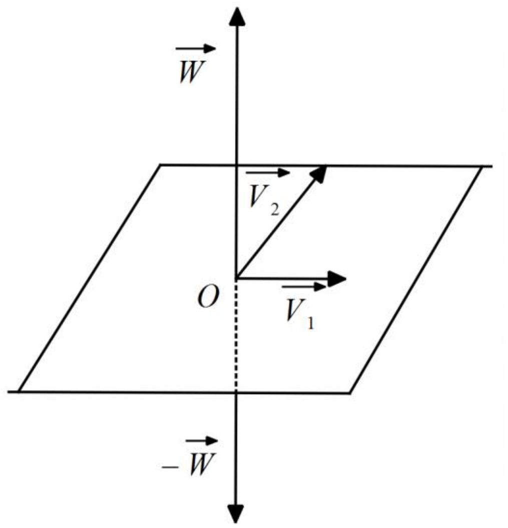
$$|V_1| = 3.74$$

$$|V_1| = 3.74 \qquad \cos\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) = \frac{-3 + 4 - 3}{3.74^2}$$

$$\theta_{V_1 V_2} = 96.2°$$

3- الجداء لشعاعي:

تعريف: نسمي الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ بالشعاع $\vec{W}$ العمودي على المستوي المكون لهما في ان واحد



$$\vec{W} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$$

علما ان اتجاه الشعاع يحدد بقاعدة اليد اليمنى او قاعدة اللولب وشدته تحسب بالقانون:

$$W = \left|\vec{W}\right| = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = V_1.V_2 \sin\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$$

-خواص الجداء الشعاعي:

أ-ليس تبديلي (تبديلي مضاد): $\vec{W} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \neq \vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$

ب--توزيعي:

$$\vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right) = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V}_3$$

$$\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right) \times \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \times \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \times \vec{V}_3$$

ج-الجداء الشعاعي لشعاعين متوازيين معدوم

فاذا كانت $\theta_{V_1V_2} = 0$ فإن: $|\vec{W}| = V_1 V_2 \sin\theta_{V_1V_2} = 0$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_1 \| \vec{V}_2$$

3- تحليل الاشعة: ان اجراء العمليات على الاشعة بالطريقة الحسابية (التحليلية) امر ممكن وهو الاكثر دقة وتداولا من الطريقة الهندسية.

سنعرض فيما يلي كيفية تحليل الاشعة على أساس وإجراء العمليات على الاشعة بالطريقة التحليلية.

لقد رأينا فيما سبق ان جمع عدد ما من الاشعة ينتج عنه شعاع واحد ولهذا يمكن ان تجرى الطريقة العكسية وهي ان نحلل شعاعا على عدة اشعة اخرى محددة مسبقا كالاتي:

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

-اذا وجهنا المحورين الغير متوازيين Δ_x و Δ_y بالشعاعين $\vec{\mathbf{i}}$ و $\vec{\mathbf{j}}$ يصبح :

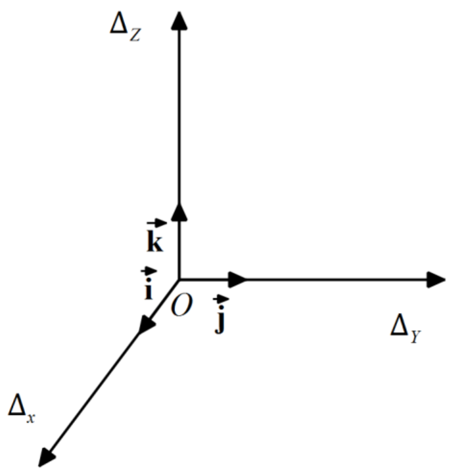
$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 = C_x\vec{i} + C_y\vec{j}\ C_z\vec{k}$$

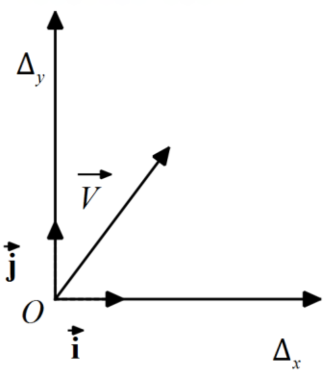
وهو ما يسمى بمعلم المستوي وهو جملة مرجعية تحلل على اساسها الاشعة.

-إذا وجهنا المحاور الغير متوازية Δ_x, Δ_y و Δ_z بالأشعة $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ فانه يمكن كتابة $\vec{C}$ على الشكل:

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 = C_x\vec{i} + C_y\vec{j}$$

وهو يسمى بالمعلم الفضائي الذي يعتبر المعلم المستوي حالة خاصة منه.





وينتج عن الجداء السلمي للشعاع $\vec{C}$ وأشعة الوحدة $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ العلاقات التالية:

$$\vec{C}\cdot\vec{i} = C_x + C_y\vec{i}\cdot\vec{j} + C_z\vec{i}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{j} = C_x\vec{j}\cdot\vec{i} + C_y + C_z\vec{j}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{k} = C_x\vec{k}\cdot\vec{i} + C_y\vec{k}\cdot\vec{j} + C_z$$

حيث $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$,

ونسمي C_x, C_y, C_z مركبات الشعاع $\vec{C}$ على المحاور Δ_x , Δ_y وΔ_z

وبما ان مركبات الشعاع $\vec{C}$ تتعلق بالزوايا المحصورة بين كل محورين فانه يختار عادة المحاور متعامدة فيصبح: $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

ومنه:

$$\vec{C}\cdot\vec{i}=C_x$$

$$\vec{C}\cdot\vec{j}=C_y$$

$$\vec{C}\cdot\vec{k}=C_z$$

لهذا السبب نصطلح على ان نحلل الاشعة على جملة محاور متعامدة ومتجانسة وطردية مباشرة نعبر رياضيا عن هذه الخصائص كما يلي:

التعامد: $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

طردية الاساس: $\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}$

خاصية تجانس الاساس: $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

نرمز للأساس الثنائي البعد: ب $\{\vec{e}\}_2=\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$

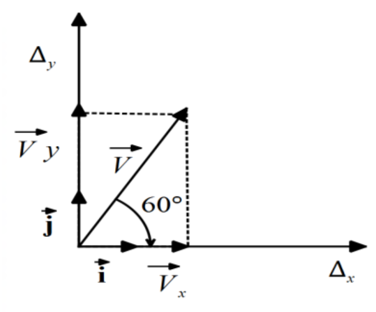
والثلاثي البعد ب $\{\vec{e}\}_3=\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$

فعلى الاساس التحليلي يمكن تمثيل الشعاع $\vec{A}$ بصورة مختلفة:

$$\vec{A}\begin{pmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{pmatrix} \quad ,\vec{A}(A_x, A_y, A_z) \quad , \vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

مثال ليكن $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ معلم تعامد ومتجانس

جد مركبات الشعاع $\vec{V}(3,60°)$ ثم اكتب الشعاع $\vec{V}$ بالصيغ التحليلية المختلفة.



$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = |V_x|\,\vec{i} + |V_y|\,\vec{j}$$

$$|V_x| = |V|\cos\theta = 3.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$|V_y| = |V|\sin\theta = 3.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{V} = \frac{3}{2}\vec{i} + 3.\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{V}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{V}\left(\frac{3}{2}, 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

4- الصورة التحليلية لعمليات الاشعة:

أ-الصورة التحليلية للجمع: ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعان نرفق لهما الشعاع $\vec{V}$ بواسطة عملية الجمع كالاتي:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$= = \left(V_{1x}\vec{i} + V_{1y}\vec{j} + V_{1z}\vec{k}\right) + \left(V_{2x}\vec{i} + V_{2y}\vec{j} + V_{2z}\vec{k}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$V_x = V_{1x} + V_{2x}$$

$$V_y = V_{1y} + V_{2y}$$

$$V_z = V_{1z} + V_{2z}$$

-مثال: قم بجمع ثم طرح الشعاعان $\vec{V}_1(1,0,4)$ و $\vec{V}_2(-3,2,1)$ تحليليا واكتبها على الصيغ التحليلية الممكنة؟.

الحل:

$$\vec{V}_1 = \vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{V}_2 = -3\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$$
$$\cdot\ \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{V}\begin{pmatrix} -2 \\ +2 \\ +5 \end{pmatrix},\ \vec{V}(-2, 2, +5)$$

$$\cdot\ \vec{V'} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}\ \ 3\vec{k}$$

$$\vec{V'}\begin{pmatrix} +4 \\ -2 \\ +3 \end{pmatrix},\ \vec{V'}(+4, -2, +3)$$

تعميم: نرفق الاشعة $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ شعاعا $\vec{U}$ بواسطة عملية الجمع نحصل على:

$$\vec{U} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_x = A_x + B_x + C_x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_y = A_y + B_y + C_y + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_z = A_z + B_z + C_z + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ب- الصورة التحليلية للجداء الشعاعي:

ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعان نرفق لهما $\vec{C}$ بواسطة الجداء الشعاعي:

$$\vec{C} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \times \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

ويتم حساب الجداء الشعاعي كالتالي:

$$\vec{C} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

وبالتالي: فان الطويلة تحسب بالعبارة التالية:

$$\vec{C} = \sqrt{((y_1z_2 - z_1y_2))^2 + ((x_1z_2 - z_1x_2))^2 + ((x_1y_2 - y_1x_2))^2} = V_1V_2\sin\theta_{V_1V_2}$$

مثال: احسب الشعاع $\vec{C}$ بداء الشعاعين $\vec{V}_1(2,1,-1)$ و $\vec{V}_2(1,0,-2)$ ثم استنتج الزاوية θ بينهما؟

الحل

$$\vec{C}=\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{C}=(1\times(-2)-0\times(-1))\,\vec{\mathbf{i}}-(2\times(-2)-1\times(-1))\,\vec{\mathbf{j}}+(2\times 0-1\times 1)\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{C}=-2\,\vec{\mathbf{i}}+3\vec{\mathbf{j}}\ \text{-k}$$

$$|C|=\sqrt{14}=3.74\ u$$

$$|C|=|V_1||V_2|\sin\theta_{V_1V_2}=\sqrt{6}.\sqrt{5}\sin\theta_{V_1V_2}$$

$$\Rightarrow\ \sin\theta_{V_1V_2}=\frac{C}{\sqrt{6}.\sqrt{5}}=\frac{3.74}{\sqrt{30}}=0.683$$

$$\theta_{V_1V_2}=43.06°$$

5- الجداء الثلاثي:

أ-الجداء الثلاثي السلمي:

الجداء الثلاثي السلمي هو جداء سلمي للشعاعين $\vec{V}_1$ و $\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)$ كالاتي:

$$\vec{V}_1\cdot\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)=x_1\cdot\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)+y_1\cdot\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)+z_1\cdot\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$=x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_2\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

خاصية مهمة: يمكن اثبات ان:

$$\vec{V}_1\cdot\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)=\vec{V}_3\cdot\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)=\vec{V}_2\cdot\left(\vec{V}_3\times\vec{V}_1\right)$$

اي ان مواضع الاشعة تتغير ولكن لا تتغير معها قيمة الجداء السلمي وتستعمل هذه الخاصية بكثرة

ب- الجداء الثلاثي الشعاعي:

ان الجداء الثلاثي الشعاعي ما هو الا جداء شعاعي $\overrightarrow{V_1}$ و $\left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right)$

$$\overrightarrow{V_1}.\left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V'} \quad , \overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}$$

$$= (y_1 V_z' - V_y' z_1)\vec{i} - (x_1 V_z' - V_x' z_1)\vec{j} + (x_1 V_y' - V_x' y_1)\vec{k}$$

خصائص:

1-يمكن تحليل الجداء الشعاعي الثلاثي كالتالي:

$$\overrightarrow{V_1} \times \left(\overrightarrow{V_2} \times \overrightarrow{V_3}\right) = \left(\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_3}\right) \cdot \overrightarrow{V_2} - \left(\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}\right) \cdot \overrightarrow{V_3}$$

2-حاصل الجداء الثلاثي الشعاعي هو شعاع في مستوي $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$

6-بعض الاشعة المتداولة:

انه من المفيد التعبير عن بعض الاشعة: كشعاع الموضع، الانتقال والتغير والتدرج ... وذلك لكثرة تداولها واهميتها.

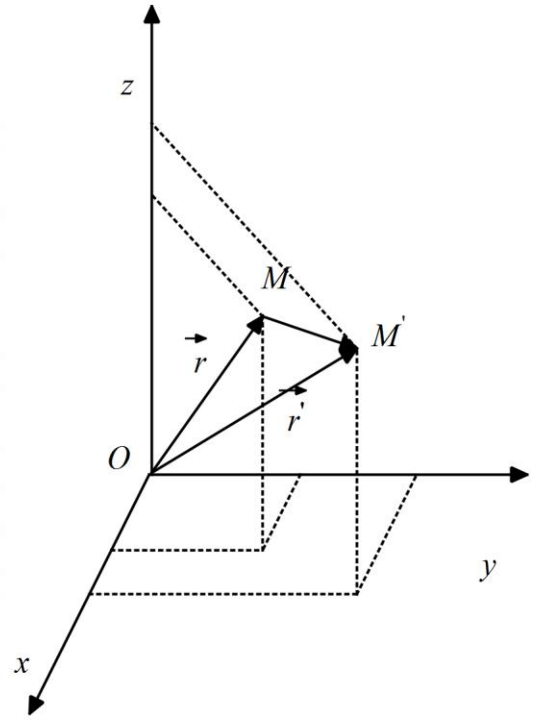
1-شعاع الموضع: ليكن لدينا جسما متحركا في الفضاء نمثله بنقطة مادية $M(x, y, z)$ بالنسبة لمعلم فضائي ونعرف شعاع موضعه في كل لحظة كالتالي:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

واذا كان الجسم في اللحظة t عند $M(x, y, z)$ وانتقل حتى صار في اللحظة t' عند النقطة $M'(x', y', z')$ حيث $(t' > t)$ يصبح لدينا :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{r'} - \vec{r}$$

وهو شعاع الانتقال في المدة $(\Delta t = t' - t)$



2-مؤثر التدرج: ان مؤثر التدرج له اهمية بالغة فمن المعلوم ان التفاضل التام لدالة ذات عدة متغيرات يكتب ب:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \vec{dr} \cdot \vec{\nabla} f(x , y , z)$$

حيث :

$$\vec{dr} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

مثال: احسب تدرج الدالة:

$$f(x , y , z) = 3x^2y^3z$$

الحل

$$f(x , y , z) = 3x^2y^3z$$

$$\overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$.\ \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3z$$

$$.\ \frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2z$$

$$.\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y^3$$

$$\vec{\nabla} f = 6xy^3z\,\vec{i} + 9x^2y^2z\,\vec{j} + 3x^2y^3\,\vec{k}$$

الفصل الثاني: حركيات نقطة مادية

تمهيد: نسمي العلم الذي يدير شؤون الحركات بعلم الحركة فيدرس انواعها وعددها وكيفيتها....... وقد عرف هذا العلم منذ القدم فلقد بذل الانسان جهدا باحثا عن ماهية الحركات وكيفية التحكم فيها حتى توصل الى نموذج متكامل تخضع له سائر الحركات معروفة الان باسم "المفهوم التقليدي للحركة" وهو عبارة عن جملة من القواعد والمفاهيم والعلاقات تعتمد على ما يلي:

أ- تحديد جملة اسناد تستند اليها الحركات

ب- تحديد أدوات رياضية ذات معاني فيزيائية.

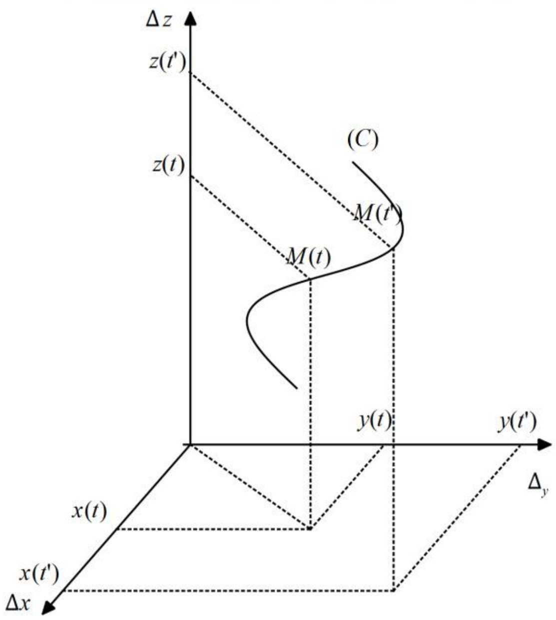
ج- تحديد العلاقة بين الحركة ومسبباتها.

1- حركة نقطة مادية:

النقطة المادية هي عبارة عن جسم مادي يمكن اعتبار ابعاده معدومة نظريا ومهملة عمليا مقارنة بالمسافة المقطوعة فدراسة حركة جسم انما تعود الى دراسة حركة النقطة المادية.

1- انتقال نقطة مادية: لنعتبر M نقطة مادية تتحرك وفق مسار (C) ونفرض انها كانت في نقطة $M(t')$ في اللحظة (t') وانتقلت الى النقطة عند اللحظة (t) .

فشعاع موضعها في اللحظتين (t) و (t') هما:



$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

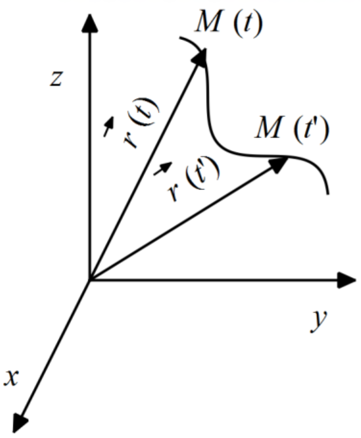
$$\overrightarrow{OM}(t') = \vec{r}(t') = x(t')\,\vec{i} + y(t')\,\vec{j} + z(t')\,\vec{k}$$

اذن يعرف شعاع انتقالها بين اللحظتين t و t' كالاتي:

$$\overrightarrow{OM}(t') - \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = (x(t') - x(t))\,\vec{i} + (y(t') - y(t))\,\vec{j} + (z(t') - z(t))\,\vec{k}$$
$$= \Delta x(t',t)\,\vec{i} + \Delta y(t',t)\,\vec{j} + \Delta z(t',t)\,\vec{k}$$

وهي على الترتيب تغير الاحداثيات x , y و z خلال المدة $(\Delta t = t' - t)$

2-السرعة المتوسطة للنقطة المادية: من بين الادوات الرياضية التي تحمل معنى الحركة، السرعة المتوسطة للنقطة المادية ، فهي تعبر عن تغير شعاع موضع النقطة المادية في الزمن وذلك هو المعنى الفيزيائي للسرعة فنعرفها اذن كالاتي:



$$\vec{V}_M(t',t) = \frac{\Delta \vec{r}(t',t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}$$

وصورتها التحليلية هي :

$$\vec{V}_M(t',t) = V_{Mx}(t',t)\,\vec{i} + V_{My}(t',t)\,\vec{j} + V_{Mz}(t',t)\,\vec{k}$$

حيث ان مركباتها هي:

$$V_{Mx}(t',t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$

$$V_{My}(t',t) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t') - y(t)}{t' - t}$$

$$V_{Mz}(t',t) = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t') - z(t)}{t' - t}$$

خصائص:

1- السرعة المتوسطة للمتحرك تكون ثابتة خلال الفترة $(\Delta t = t' - t)$

2- السرعة المتوسطة للمتحرك موازية لشعاع الانتقال (ولا تتعلق بالمسار)

3- قياسها مباشرة ومتيسرفي المخبر .

مثال: ليكن متحرك يتحرك وفق مسار (C) ومعرف بالإحداثيات كالاتي:

$$x(t) = 2t$$
$$y(t) = t^2 - 4$$

1-عين مسار المتحرك وارسمه؟.

2-عين مواضعها في اللحظات التالية $t_3 = 3s\ , t_2 = 2s\ , t_1 = 1s\ , t_0 = 0s$ ؟

3-عين انتقالاتها في المدة $\Delta\, t$ ؟

4-عين السرعة المتوسطة مدة كل انتقال؟ ماذا تلاحظ؟

الحل:

$$x(t) = 2t \quad \Rightarrow \; t = \frac{x}{2}$$

$$y(t) = t^2 - 4 \;\Rightarrow \quad y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4$$

$$y = \frac{x^2}{4} - 4$$

وهي تمثل معادلة المسار لرسمه ندرس الدالة $y = \frac{x^2}{4} - 4$

$$\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + (t^2 - 1)\,\vec{j}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(0) = \text{-}4\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}(1) = 2\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}\,(2) = 4\vec{\mathbf{i}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}\,(3) = 6\vec{\mathbf{i}} + 5\vec{\mathbf{j}}$$

$$\Delta\,\vec{\mathbf{r}}_1(\Delta\vec{\mathbf{t}}) = \text{-}2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$$

$$\Delta\,\vec{\mathbf{r}}_2(\Delta\vec{\mathbf{t}}) = 2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}$$

$$\Delta\,\vec{\mathbf{r}}_3(\Delta\vec{\mathbf{t}}) = 2\vec{\mathbf{i}} + 5\vec{\mathbf{j}}$$

$$V_{M\,1}(\Delta t) = \frac{\Delta r_1(\Delta t)}{\Delta t} = 2\,\vec{i} + \vec{j}$$

$$V_{M\,2}(\Delta t) = \frac{\Delta r_2(\Delta t)}{\Delta t} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$$

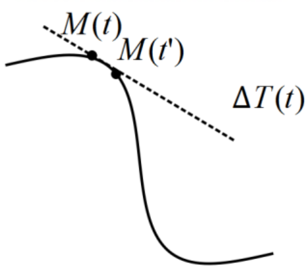
$$V_{M\,3}(\Delta t) = \frac{\Delta r_3(\Delta t)}{\Delta t} = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$$

نلاحظ ان السرعة المتوسطة غير ثابتة خلال الفترة $\Delta\, t$

3- السرعة اللحظية:

رأينا من خلال صياغة السرعة المتوسطة انها لا تتعلق بمسار المتحرك ولا تعطينا معلومات لحظية عن تغير شعاع الموضع مع الزمن لذلك سنبحث عن سرعة للمتحرك تتعلق بنقطة واحدة بدلا من تعلقها بنقطتين مما يعني تعلقها بلحظة واحدة، وللحصول على هذه الغاية نجعل $M(t')$ يقترب اقترابا مفرطا من مما يعني ان t' يؤول الى t .

ويؤول شعاع الانتقال عندئذ من المماس $\Delta T(t)$ في اللحظة t فنتحصل عندئذ على سرعة المتحرك في اللحظة كالآتي : $(t \to t', \Delta t \to 0)$



$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}(t',t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)\vec{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right)\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

نتيجة:

- السرعة اللحظية تكون دائما موازية لممارس المسار في اللحظة التي عينت فيها .
- السرعة اللحظية تتعلق بشكل المسار فهي السرعة الحقيقية.

4- علاقة السرعة اللحظية بالمسار:

سنبحث في هذه الفقرة الى العلاقة الرابطة بين السرعة اللحظية لمتحرك ومساره:

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta l} \right)$$

Δl : يرمز الى طول القوس الذي وتره شعاع الانتقال. اذن عندما يؤول $(\Delta t \to 0)$ فإن $M(t')$ تؤول الى $M(t)$ يؤول الطول $|\Delta \vec{r}|$ الى طول القوس (Δl) ويؤول اتجاه $\Delta \vec{r}$ الى نحوا اتجاه ماس للمسار $\Delta \vec{T}(t)$ عندئذ يكتب شعاع الانتقال كالآتي:

$$\Delta\vec{r} = \|\Delta\vec{r}\|.\vec{e}_T$$

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta l}{\Delta t}.\frac{\|\Delta\vec{r}\|.\vec{e}_T}{\Delta l}\right) = \frac{dl}{dt}.\vec{e}_T$$

$$\vec{V}(t) = V(t)\,\vec{e}_T$$

ومنه طويلة السرعة تساوي الى مشتق طول القوس $V(t) = \text{dl/dt} \Rightarrow dl = V(t).dt$

فطول المسار الذي يقطعه المتحرك من لحظة t_0 الى لحظة t يكون: $l = \int_{t_0,t} V(t).dt$

مثال: عين المسار والسرعة اللحظية وطول المسار للمتحرك الذي شعاع موضعه: $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j}$

مساره: $x(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{2}$

السرعة اللحظية و طول المسار: $y(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 2t\vec{j}$$

$$|V| = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$l(t) = \int_{,} 2\sqrt{1 + t^2}dt$$

5- التسارع المتوسط:

من الادوات الرياضية التي تحمل معاني فيزيائية تسارع المتحرك والذي هو مقياس لتغير شعاع السرعة اللحظية مع الزمن.

ليكن (C) مسار نقطة مادية ما، فمعدل تغير سرعتها اللحظية هو:

$$\vec{a}_M(t',t) = \frac{\vec{V}(t') - \vec{V}(t')}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{V}(t',t)}{\Delta t}$$

6- التسارع اللحظي:

نجري خطوات مماثلة لتلك التي اجريت للحصول على السرعة اللحظية من المتوسطة وذلك قصد ايجاد عبارة التسارع اللحظي:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_M(t',t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}(t',t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t') - \vec{V}(t')}{t' - t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

مثال: عين تسارع النقطة المادية التي شعاع موضعها يعطي بالعلاقة:

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 3t^2\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = 6t\,\vec{j}$$

2- انواع الحركات:

1-الحركة المنتظمة: إذا كان تسارع جسم متحرك معدوم، فإن حركته تدعى بالحركة المنتظمة.

تسارعه في كل لحظة هو: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$

سرعته في كل لحظة هو: $\vec{r}(t) = \vec{V}(0)t + \vec{r}(0)$

موضعه في كل لحظة هو: $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(0) =$ ثابت

حيث ان: $\vec{V}(0)$ و $\vec{r}(0)$ هما على الترتيب موضع وسرعة المتحرك عند البداية كما ان هذه الحركة يكون مسارها مستقيما ، اذا معرفة معلومات ابتدائية تكفي معلومات في لحظات تالية.

2- الحركة المتغيرة بانتظام: اذا كان تسارع جسم ثابت مع الزمن فان حركته تدعى بالحركة المتغيرة بإنتظام.

تسارعه في كل لحظة هو: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}(0) =$ ثابت

سرعته في كل لحظة هو: $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}(0)t + \vec{V}(0)$

موضعه في كل لحظة هو: $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}(0)\,t^2 + \vec{V}(0)t + \vec{r}(0)$

حيث: $\vec{a}(0)$ و $\vec{V}(0)$ و $\vec{r}(0)$ هي على الترتيب تسارع وسرعة وموضع المتحرك عند لحظة البداية.

3- القذائف: اذا كان تسارع الجسم يساوي تسارع حقل الجاذبية فإن الجسم يدعى قذيفة وحركته تدعى بالقذيفة.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}(0) = \vec{g}$$

4- الحركة المواريه: اذا كان تسارع الجسم غير معدوم وغير ثابت فان الحركة تدعى بالموارية ويكن تسارعه:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f}(t)$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \int \vec{f}(t')\, dt' + \vec{V}(0)$$

3- حركيات نقطة مادية بإحداثيات غير كارتيزية:

ان دراسة الحركات المختلفة يتطلب اختيار نوع مناسب من الاحداثيات لهذا سنعرض حركات نقطة مادية بإحداثيات مختلفة كالإحداثيات القطبية، الاسطوانية والمنحنية...........

1-الاحداثيات القطبية:

في المعلم الكارتيزي يتعين موضع نقطة مادية $M(x, y)$ بالإحداثيتين الكارتزيتين x و y في حين انه يمكن اختيار احداثيتين غير كارتزيتين بحيث تمثل الاولى بعد النقطة عن المبدأ وترمز لها بالرمز وتمثل الثانية الزاوية المحصورة بين Δx وشعاع موضعها ونرمز لها بالرمز r ان هذه الاحداثيات تسمى بالإحداثيات القطبية وتكتب: $M(r, \theta)$

ان العلاقة بين الاحداثيات القطبية والكارتيزية تكون:

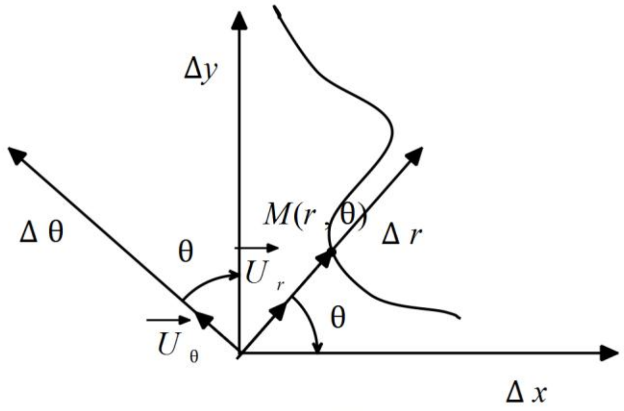
$$\vec{r} \cdot \vec{i} = x(r, \theta) = r\cos\theta$$

$$\vec{r} \cdot \vec{j} = x(r, \theta) = r\sin\theta$$

أ-الاساس القطبي: كل جملة احداثيات نرفق لها اساسا، لذلك سنرفق الاحداثيات القطبية بالأساس القطبي المكون من المحور Δr المرافق للإحداثية r والحامل لشعاع موضع النقطة M في كل لحظة والمحور $\Delta \theta$ المرافق للإحداثية θ والقائم على Δr حسب القاعدة المباشرة.

نرمز للأساس القطبي ب $(O, \vec{U_r}, \vec{U_\theta})$ ونكتب شعاع موضع النقطة M على الصورة: $\vec{r}(t) = r(t)\vec{U_r}$

إن الاساس القطبي يدور حول المحور Δz لذلك يتعلق شعاع توجيهي بالزمن، فيحلل على الأساس الكارتيزي كالاتي:



$$\vec{U}_r = \cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j}$$
$$\vec{U}_\theta = -\sin\theta(t)\,\vec{i} + \cos\theta(t)\,\vec{j}$$

نتيجة: يلاحظ أن:

$$\frac{d\vec{U}(r)}{d\theta} = -\sin\theta(t)\,\vec{i} + \cos\theta(t)\,\vec{j} = \vec{U}_\theta$$

$$\frac{d\vec{U}(\theta)}{d\theta} = \cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j} = -\vec{U}_r$$

ب- سرعة نقطة مادية بالإحداثيات القطبية:

تحسب سرعة نقطة مادية بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(r(t)\,\vec{U}_r(t)\Big) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{U}_r(t) + r(t)\frac{d\vec{U}_r(t)}{dt}$$

لدينا
$$\vec{V}(t) = \dot{r}\,\vec{U}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta(t) = V_r\vec{U}_r + V_\theta\vec{U}_\theta$$

إذن
$$\frac{d\vec{U}_r(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\vec{U}_r(t)}{d\theta} = \dot{\theta}\,\vec{U}_\theta$$

ومنه مركبات السرعة بالإحداثيات القطبية هي:
$$V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad , V_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

ج- تسارع نقطة مادية بالإحداثيات القطبية:

يحسب تسارع نقطة مادية بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{U}_r + r\,\dot{\theta}\vec{U}_\theta\right)$$

$$= \ddot{r}\,\vec{U}_r + \dot{r}\,\frac{d\vec{U}_r}{dt} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta + r\,\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}$$

$$= \ddot{r}\,\vec{U}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{U}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\vec{U}_r$$

$$= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{U}_r + \left(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{U}_\theta$$

$$= a_r\vec{U}_r + a_\theta\vec{U}_\theta$$

بالمطابقة نجد :

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^{\,2} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}2 = 2\,\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}.\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

ان شعاع توجيه $\left(\overrightarrow{U_\theta}\right)\Delta_\theta$ يمكن كتابته على الصورة: $\overrightarrow{U_\theta} = \overrightarrow{U_z} \times \overrightarrow{U_r}$

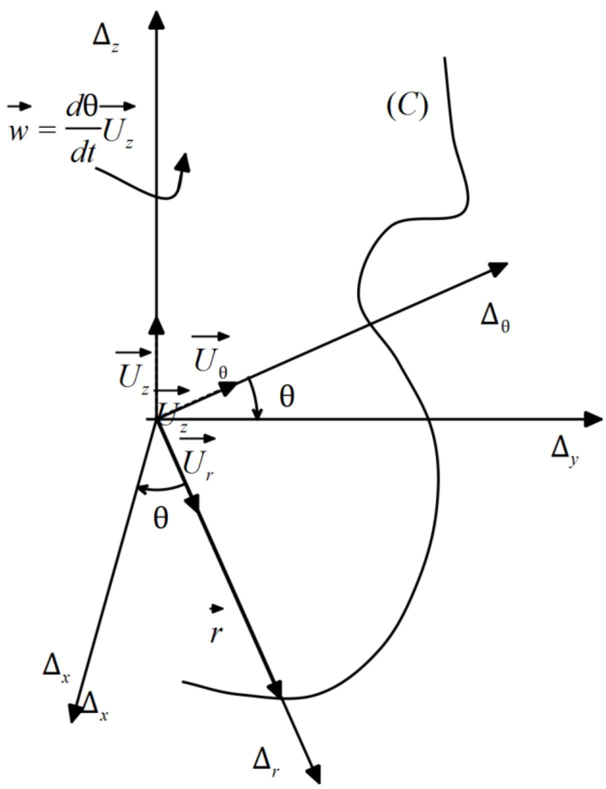
وبتعويض في عبارة السرعة نجد: $\vec{V} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\left(\overrightarrow{U_z} \times \overrightarrow{U_\theta}\right)$

$$= \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_z} \times r\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$= \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + \vec{w} \times \vec{r}$$

حيث: $\vec{r} = r\,\overrightarrow{U_\theta}\ ,\ \vec{w} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_z}$

الشعاع $\vec{w}$ هو السرعة الزاوية لدوران النقطة المادية M حول محور دورانها Δ_z ويرمز الشعاع $\vec{w} \times \vec{r}$ الى السرعة الخطية المتعلقة بدوران محض.

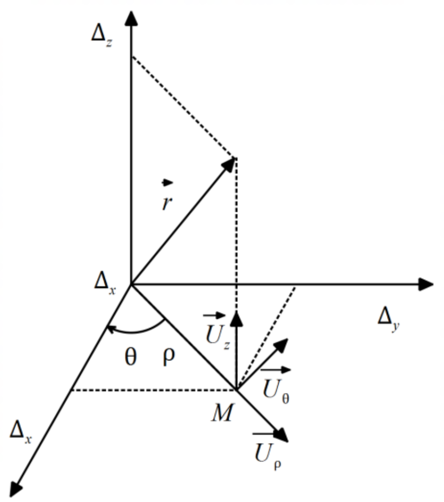


2- الاحداثيات الأسطوانية:

يتعين موضع نقطة M في الفضاء بثلاث احداثيات كارتيزية y, x و z كما انه يمكن تعينها بإحداثيات ثالثة اخرى تتمثل في إحداثيتان قطبيتان زائد احداثية ثالثة كارتيزية z تعين بعد النقطة M عن المستوى القطبي وتسمى بالإحداثيات الاسطوانية وتكتب: $M(\rho , \theta , z)$

أ-الاساس الاسطواني:

يضاف الى الاساس القطبي محورا كارتيزيا Δ_z عمودي على المستوي $\left(O, \overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}\right)$ فنحصل على الاساس الاسطواني الذي يرمز له بالرمز $\left(O, \overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_z}\right)$ ويكتب شعاع موضع النقطة $M(\rho , \theta , z)$ فيه على فيه على الصورة التالية: $\overrightarrow{r(t)} = \rho(t)\overrightarrow{U_\rho} + z\overrightarrow{U_z}$



ب- سرعة النقطة مادية بالإحداثيات الاسطوانية:

سرعة نقطة مادية بالإحداثيات الاسطوانية تحسب كما يلي :

$$\overrightarrow{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\overrightarrow{U_\rho} + z\overrightarrow{U_z}\right)$$

$$= \dot{\rho}\ \overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{U_z}$$

$$= V_\rho\overrightarrow{U_\rho} + V_\theta\overrightarrow{U_\theta} + V_z\overrightarrow{U_z}$$

حيث: $V_\rho = \dot{\rho} = \dfrac{d\rho}{dt}\ , V_\theta = \rho\dot{\theta} = \rho.\dfrac{d\theta}{dt}, V_z = \dot{z}\ = \dfrac{dz}{dt}$

3- تسارع نقطة مادية في الاحداثيات الاسطوانية:

يعبر عن تسارع نقطة مادية في الاحداثيات الاسطوانية كالتالي:

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\overrightarrow{U\rho} + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{U\rho} + \ddot{z}\overrightarrow{Uz}$$

$$= a_\rho\overrightarrow{U\rho} + a_\theta\overrightarrow{U\theta} + a_z\overrightarrow{U\rho}$$

حيث:
$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta} \quad , \quad a_\theta = 2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\ , a_z = \ddot{z}$$

اما العلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية والاسطوانية فهي كالتالي:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \left\{ \rho = \sqrt{x^2+y^2}\ , \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{x}{\rho}\right) = \arctan\left(\frac{y}{\rho}\right) \right.$$

4-الاحداثيات المنحنية:

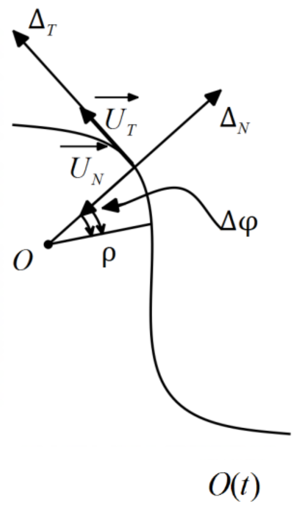
لنعبر نقطة مادية تتحرك على مسارها (C) نعرف المحورين Δ_T و Δ_N المتعامدين اللذان يشكلان الاساس المرتبط بالمتحرك في كل لحظة.

- سرعتها تكتب على الصورة التالية: $\vec{V}(t) = |V|\overrightarrow{U_T}(t) = V(t)\,\overrightarrow{U_T}(t)$

حيث: $V(t) = \frac{dl}{dt}$

و l هو طول المسار وهو احد الاحداثيات المنحنية (الإحداثي الأول)

- التسارع اللحظي بالإحداثيات المنحنية هو:



$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V\overrightarrow{U_T}(t)\right) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{U_T} + V\frac{d\overrightarrow{U_T}(t)}{dt}$$

لدينا:
$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{U_N}$$

ان القوس المقابل للزاوية $\Delta\varphi$ هو عبارة عن قوس من دائرة نصف قطرها ρ ومركزها اللحظي وعليه تكون طول القوس المقابل للزاوية $d\varphi$ هو $dl = \rho\, d\varphi$ كذلك نكتب: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dl}{dt} = \frac{V}{\rho}$

$$\vec{a}(t) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{U_t} + \frac{V^2}{\rho}\overrightarrow{U_\theta}$$

حيث:

a_T : المركبة المماسية للتسارع

a_N : المركبة الناظمية للتسارع .

$\rho(t)$: هو نصف قطر الانحناء للمسار في اللحظة t وهو الاحداثي الثاني.

ومنه :

$$a_T = \frac{dV}{dt} \ , a_N = \frac{V^2}{\rho}$$

ونكتب كذلك:

$$\vec{a}(t) = \vec{a_N} + \vec{a_T}$$

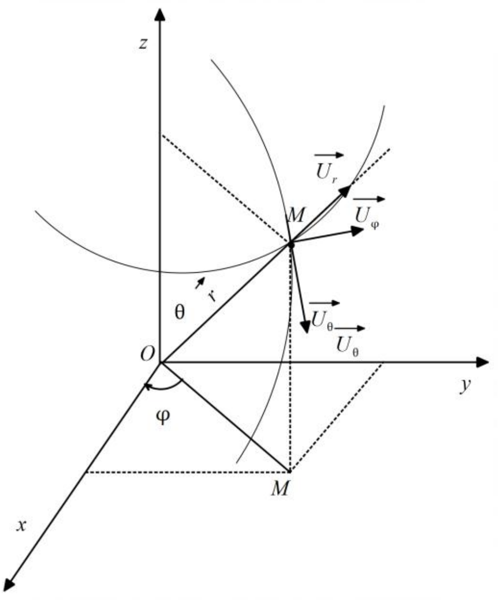
$$a^2 = a_N{}^2 + a_T{}^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 + a_T{}^2}$$

ونحصل على نصف قطر انحناء المسار ρ من خلال العبارة التالية: $\rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - a_T{}^2}}$

4-الاحداثيات الكروية:

يمكن تحديد حركة نقطة مادية في الاحداثيات الكروية (r , θ , φ) بالشكل التالي:

$$r = r(t) \ , \theta = \theta(t) , \varphi = \varphi(t)$$



حيث:

$r(t)$: نصف القطر القطبي وهو عبارة عن طويلة شعاع الموضع.

$\theta(t)$: الزاوية القطبية المحصورة بين $\vec{r}$ و (O_z)

(xOy)

$\varphi(t)$: الزاوية المحصورة بين (O_x) و (OM') حيث M' مسقط النقطة M في المستوي

وتسمى زاوية تمام العرض. $\vec{U}_r$

نعرف اشعة الوحدة المرفقة بالمعلم الكروي كما هو موضح في الرسم حيث:

شعاع الوحدة $\vec{U}_r$ في اتجاه تزايد نصف القطر.

شعاع الوحدة $\vec{U}_\varphi$ مماسي للدائرة العرضية التي تشمل النقطة M.

شعاع الوحدة $\vec{U}_\theta$ مماسي للدائرة الطولية التي تشمل النقطة M ونصف قطرها r.

ملاحظة: كي نحصل على جميع نقاط الفضاء فإن: $0 \le \theta \le \pi \,,\, 0 \le \varphi \le 2\pi \,,\, 0 \le r \le \infty$

أما العلاقات بين الاحداثيات الكارتيزية والكروية هي:

$$x = r\cos\varphi \sin\theta$$

$$y = r\sin\varphi \sin\theta$$

$$z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \,,\, \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \,,\, \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

4- الحركة الدائرية:

اذا كان مسار نقطة مادية $M(r,\theta)$ دائري فان حركتها توصف بالدائرية: $\|\vec{r}(t)\| = R =$ ثابت

فيصبح شعاع موضعها: $\vec{r}(t) = R\,\vec{U}_r(t)$

سرعتها:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta(t)$$

$$\vec{V}(t) = R\frac{d\theta}{dt}\left(\vec{U}_z \times \vec{U}_r\right) = \vec{w} \times \vec{r}$$

والتسارع اللحظي هو:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta\right) = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{U}_\theta - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{U}_r$$

$$= a_r\vec{U}_r + a_\theta\vec{U}_\theta$$

$$\begin{cases} -R\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

نحصل عندئذ عن العلاقات بين مركبتي التسارع والسرعتان الخطية والزاوية $(V = R\,w)$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}\right) = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{U_\theta} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{U_r}$$

$$= a_r\overrightarrow{U_r} + a_\theta\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\begin{cases} -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -Rw^2 = -\frac{(Rw)^2}{R} = -\frac{V^2}{R} \\ R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\frac{dw}{dt} = R\alpha = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{dV}{dt} \end{cases}$$

1- انواع الحركة الدائرية:

تكون حركة نقطة مادية دائرية منتظمة إذا كان مسارها دائري وتسارعها الزاوي معدوم. $\alpha(t) = \frac{dw}{dt} = 0$

وسرعتها الزاوية هي: $w(t) = \frac{d\theta}{dt} = w(t_0) =$ ثابت

وعمدتها: $\theta(t) = w(t_0)t + \theta(t_0)$

حيث ان: $w(t_0)$ و $\theta(t_0)$ هما على الترتيب السرعة الزاوية والزاوية الابتدائية.

نتائج: $\theta(t) = w(t_0)t + \theta(t_0)$

أ- التسارع مركزي (متجه نحو المركز) وطورة ثابت

$$l = \int_0^T V(t)\,dt = \int_0^{2\pi} R\,\frac{d\theta}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} Rd\theta$$

$$= R\,2\pi = \text{RwT}$$

$$\Rightarrow w = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w}$$

2-الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام:

إذا كان مسارها دائري وتسارعها الزاوي ثابت فان حركتها توصف بالدائرية المتغيرة بإنتظام.

$\alpha(t) = \frac{dw}{dt} = \alpha(t_0) =$ ثابت

وسرعتها الزاوية هي: $w(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha(t_0)t + w(t_0)$

وعمدتها: $\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha(t_0)\,t^2 + w(t_0)\,t + \theta(t_0)$

حيث: $\alpha(t_0)$ و $w(t_0)$ و $\theta(t_0)$ هي على الترتيب التسارع والسرعة الزاوية والعمدة عند بداية الحركة.