الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمّه لخضر - الوادي

ميكانيــك النقطــة المــادية

دروس وتمارين تطبيقية

للسنة أولى (SM , MI , ST)

من تحضير الدكتور: بن حــوه عثمــان

السنـــة : 2019

الفهرس

الفصل VI الديناميك

الفصل V العمل والطاقة

مقدمة

هذا العمل هو دروس وتمارين في ميكانيك النقطة المادية وهو وسيلة بداغوجية موجهة إلى طلبة السنة الأولى علوم وتكنولوجيا (ST) وعلوم المادة (MI) و (SM) لبرنامج ليسانس، ماستر، دكتوراء (LMD).

نقتصر في هذا الكتاب على دراسة الميكانيك التقليدي (ميكانيك نيوتن) ، وذلك في خمسة فصول

- الفصل الأول نتعرض فيه لـوحدات القياس والأبعاد نبين فيه كيفية التعبير عن مقـدار فيزيائي

(خاصة في الميكانيك مثل القوة والطاقة ....) اعتمادا على المقـادير ألفيزيائه السبعة والوحـدات الأساسية السبعة في الجملة الدولية . ثم نوضح طريقة التحقق من صحة القوانين والعلاقات في الفيزياء باستخدام معادلة الأبعاد .

- الفصل الثاني مراجعه رياضية

ندرس في هذا الفصل الأشعة و العلاقات الرياضية التي نحتاج اليها في دراسة ديناميك النقطة المادية.

- الفصل الثالث ندرس فيه الحركيات فنعرف الموضع والسرعة والتسارع لجسم يتحرك بالنسبة لجملة مرجعية محددة . ونبين متى يمكننا اعتبار هذا الجسم نقطه مادية. نمهد في هذا الفصل لدراسة الحركة و ننتقل فيه إلى دراسة أحد أبسط أنواع الحركات وهي الحركة المستقيمة و ندرس فيه الحركة في المستوي والحركة في الفضاء و ندرس فيه الحركة المركبة حيث نتطرق لتركيب السرعات وتركيب التسارعات بين جملتين مرجعيتين مختلفتين.

- الفصل الرابع ندرس الديناميك أي دراسة مسببات الحركة . وندرس التأثيرات الأساسية الأربعةفي الطبيعة و قوانين نيوتن الثلاثة في الميكانيك التقليدي, وأهمها القانون الثاني

(المبدأ الأساسي في التحريك). نعرف في هذا الفصل الجملة الغاليلية, ثم نعرج على أمثلة لأكثر القوى شيوعا في حياتنا اليومية. و نعرض في هذا الفصل العزم الحركي والعزم الديناميكي.

- الفصل الخامس نتصدى للطاقة والعمل منها الطاقة الكامنة والميكانيكية , ونعرف بوجه خاص القوى المحافظة .

الفصل الأول (I) وحدات القياس والابعاد

I -1 القياس

I-1 -1 تعريف القياس

لقد حقق قياس المقادير الفيزيائية تقدما جبارا في هذا العصر نتيجة مستوى عال من الخبرة التجريبية الطويلة , وبنتيجة التقدم الهائل في الدارات المتكاملة والحساسة. وعندما نتحدث عن قياس مقدار ما,فإننا نشير إلى عمليتين مستقلتين اعتماد وحدة معيارية, لها طبيعة مقدار . المقارنة بين هذه الوحدات المعيارية والمقدار المقيس. نكتب نتيجة قياس المقدارالفيزيا ئي على الشكل التالي.

$$\mathbf{X} = (n \pm \Delta n)U$$

حيث (n) عدد حقيقي يعبر عن قيمة المقدا ر $\mathbf{X}$ التي نحصل عليها بنتيجة القياس , و(U) وحدة القياس المعتمدة,و (Δn) الارتياب في قياس هذا المقدار .ينجم هذا الارتياب عن أسباب متعددة مثل خطأ أجهزة القياس التي أصبحت اصغر فأصغر مع تطور الوسا ئل المخبرية والأجهزة الإلكترونية,والأخطاء الناجمة عن المجرب نفسه, والأخطاء الناجمة عن إهمال بعض الظواهر التي تؤثر ولو بنسبة قليلة في النتائج.

I-1 -2 وحدات القياس الأساسية – جملة الوحدات الدولية (SI)

لقد تبين أن كل ما هو قابل للقياس يمكن التعبير عنه بدلالة سبع وحدات معيارية معروفة ومقبولة عالميا اليوم. تدعى الوحدات الأساسية وهي وحدات قياس المقادير السبع التالية: الطول والكتلة والزمن والتيار الكهربائي وكمية المادة ودرجة الحرارة وشدة الإضاءة. ندعو هذه المقادير بالمقادير الأساسية , وكل المقادير الأخرى هي مقادير مشتقة من هذه المقادير السبعة .

اعتمد العالم على مر السنين على تعريف عدة جمل وحدات قياس : مثل جملة الوحدات السغثية (CGS) التي اعتمدت السنتيمتر (cm) والغرام (g) والثانية (s) وحدات أساسية , وجملة الوحدات (MKSA) التي اعتمد ت المتر (m) والكيلوغرام (kg) والثانية (s) والأمبير

(A) وحدات أساسية فيها يختلف تعريف هذه الوحدات الأساسية من جملة إلى أخرى. نعتمد في هذا الكتاب . كما هو متعارف عالميا اليوم , جملة الوحدات الدولية (SI) .

I -2 الجملة الدولية (SI) (Système Internasional)

لقد أسس لقاء دولي في العام (1960) قواعد لتحديد مجموعة من الوحدات القياس للمقادير الأساسية, وقد دعيت تلك المجموعة جملة الوحدات الدولية . يرمز لها اختصارا ب (SI) وهو اختصار لترجمة (système International). تتكون هذه الجملة (SI) من سبع وحدات أساسية , إضافة إلى وحدات مشتقة .

الوحدات الأساسية في الجملة (SI)

الوحدات الأساسية في الجملة (SI) سبع وحدات هي .. المتر والكيلو غرام , الثانية ;الأمبير , الكالفن , ألمول و القنديلة . نعرض هذه الوحدات ورموزها في الجدول (I-1) كما جاءت في تقارير المكتب العالمي للأوزان والقياسات وفيما يلي تعريف كل منها.

الجدول (1.I) الوحدات الأساسية السبع في جملة الوحدات الدولية (SI) ورمز كل منها بالإضافة إلى الأبعاد الأساسية السبعة ورمز كل منها .

اسم وحدة القياس	رمز وحدة القياس	البعد الفيزيائي	رمز البعد الفيزيائي
1- المتر mètre	m	طول	L
2- الكيلوغرام Kilogram	kg	كتلة	M
3- الثانية Second	s	زمن	T
4- الأمبير Ampère	A	شدة تيار كهربائي	I
5- الكلفن Kelvin	k	درجة حرارة	o
6- ألمول Mole	mol	كمية مادة	N
7- القنديلة Candela	cd	شدة الإضاءة	J

المتر mètre

وحدة قياس الطول رمزه m وهو طول المسار الذي يقطعه الضوء في الخلاء خلال 1/299792458 ثانية

يعود أصل المتر إلى القرن الثامن عشر على الأكثر. ففي ذلك الوقت, ظهر تنافس بين مقاربتين لتعريف الوحدة القياسية للطول. فقد اقترح بعضهم تعريف المتر بأنه طول نواس بسيط ذي نصف دور قدره ثانية واحدة ؛ واقترح أخرون تعريف المتر كجزء من عشرة ملايين جزء من ربع طول الأرض(أي جزء من عشرة ملايين جزء من مربع محيط الأرض) . في العام 1792 ، اختارت أكاديمية العلوم الفرنسية ، مباشرة بعد الثورة الفرنسية ، التعريف المعتمد على خط الطول ، ذلك لأن قوة الجاذبية تختلف قليلا من منطقة لآخرة على سطح الأرض ، مما يؤدي إلى تغيير دورا لنواس .

الكيلوغرام kilogramme

وحدة قياس الكتلة ، رمزه kg وهو كتلة النموذج الدولي المحفوظ في المكتب العالمي للأوزان والقياسات الكائن في منطقة sèvre بفرنسا .

في نهاية القرن الثامن عشر ، كان الكيلو غرام كتلة د يسيمتر مكعبة واحد من الماء . وفي العام 1889 اعتمد المؤتمر الأول لل CGPM أول نموذج للكيلوغرام ، وهو مصنوع من خليط البلاتين والإيرديوم ، وأعلن عندئذ انه يعد هذا النموذج من الآن فصاعدا وحدة قياس الكتلة .

الثانية seconde

وحدة قياس الزمن,رمزها s وهي : المدة اللازمة لحصول 9192631770 اهتزاز بين مستويي الطاقة الدقيقين للحالة الأساسية لذرة السيزيوم CS 132 .

عرفت الثانية في البداية كجزء من86400 جزء من اليوم الشمسي الوسطي، على حين ترك تعريف " اليوم الشمسي الوسطي " للنظريات الفلكية . لكن القياسات أثبتت عدم وجود انتظام

في دوران الأرض لا يمكن أخذه بالحسبان في الدر اسه النظرية ، وهو يؤثر في هذا التعريف بحيث يصبح غير موثوق به . ولكي نعرف وحدة القياس بدقة أعلى اعتمد المؤتمر الحادي عشر ل CGPM (1990) تعريفا قدمه الإتحاد الفلكي الدولي مبنيا على السنة المدارية . ثم بينة أعمال تجريبية حديثة، إمكان بنا تعريف وحدة قياسية ذرية للزمن اعتمادا على الانتقال بين مستويين طاقيتين لذرة أو جزيء ، وأن هذا العمل التجريبي قابل للإعادة بدقة أكبر . ولذالك قرر المؤتمر الثالث عشر ل CGPM (1967) تغيير تعريف الثانية بالتعريف المذكور آنفا .

الأمبير Ampère

وحدة قياس شدة التيار الكهربائي ، ورمزه A وهو: شدة التيار الكهربائي المستمر الذي إذا مررناه في ناقلين مستقيمين متوازيين لا نهائيا الطول ، ذوي مقطعين دائريين مهملين البعد بينهما 1 m ،فإنه يتولد قوة متبادلة بين هذين الناقلين قدرها 2×10^{-7} N في المتر الواحد من كل منها . (N رمز وحدة قياس القوة وهي النيوتن) .

الكالفن kelvin

وحدة قياس درجة الحرارة الميترو ديناميكية ، رمزها k وهي تساوي 1/273,16 من درجة الحرارة الموافقة للنقطة الثلاثية للماء . درجة الحرارة هذه هي 273,16k اصطلاحا ، والضغط هو 611,73Pa .

ألمول mole

وحدة قياس كمية المادة، رمزه mol وهو كمية المادة الموجودة في جملة تحتوي عدد من المكونات الأولية مساويا لعدد الذرات الموجود في 0,012Kg من الكربون C12 . يسمى بعدد افوقادرو رمزه N حيث $N = 6.023 * 10^{23}$

القنديلة candela

القنديلة هي وحدة قياس شدة الإضاءة , رمزها Cd وهي الشدة الضوئية في اتجاه ما , لمنبع ضوئي يصدر إشعاعا وحيد الموجة تواتره 0(تردده) $540*10^{12}$ Hz واستطاعته في وحدة الزاوية المجسمة $1/683\ W.Sr^{-2}$.

وحدات مشتقه في الوحدة الدولية (SI)

لقد أعطت الجملة الدولية .S.I تسميات أخرى خاصة لوحدات مشتقة من الوحدات ألأساسية. هذه الوحدات المشتقة عددها 22 وحدة, نعرض بعض منها في الجدول التالي (I-2) , نلاحظ مثلا أننا نحصل شدة القوة من جداء الكتلة في التسارع, لكننا لا نقيس القوة ب $kg.m/s^2$ بل نقدر شدة القوة في الجملة الدولية ب نيوتن N , وهي وحدة مشتقة من الوحدات الأساسية حيث $N= kg.m/s^2$

جدول (I-2) بعض الوحدات المشتقة في الجملة الدولية S.I.

المقدار المشتق	اسم الوحدة	رمز الوحدة	بدلالة الوحدات الأساسية
الزاوية في المستوي	radian راديـــان	Rad	m/m
الزاوية في الفضاء	stéradian ستيراديان	Sr	m2 / m2
التردد	hertz هرتز	Hz	s^{-1}
القوة	newton نيوتن	N	$m.\ kg.\ s^{-1}$
الضغط	pascal باسكال	Pa	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
الطاقة أو العمل	Joule جول	J	$m^{2}.kg.s^{-2}$
الإستطاعة	watt واط	W	$m^{2}.kg.s^{-3}$
الشحنة الكهربائية	coulomb كولون	C	s .A
فرق الكمون الكهربائي	volt فولط	V	$m^{2}.kg.s^{-3}.A^{-1}$
السعة	farad فاراد	F	$m^{2}.kg^{-1}.s^{4}.A^{2}$
المقاومة الكهربائية	ohm أوم	Ω	$m^{2}.kg.s^{-3}.A^{-2}$
التدفق المغناطيسي	weber ويبر	Wb	$m^{2}.kg.s^{-2}.A^{-1}$
التدفق المغناطيسي	tesla تسلا	T	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
التحريضية	henry هنري	H	$m^{2}.kg.s^{-2}.A^{-2}$
درجة مئوية	dégrée درجة مئوي	C°	K

الفصل(II) مراجعة ريــاضية

II -1 الأشعة

المقــادير الفيــزيائية توجد دوما , إمــا كقيم سلمية او شعاعـية.

تمثيل الشعـاع.

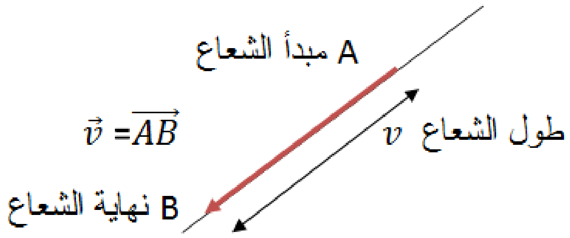
يمثـل الشعـاع بقطعة مستقيمة مـوجة بسهـم أنظـر الشكـل (II-1) للشعـاع أربعة خصـا ئص. الحـامل , ألإتجـاه , الشـدة , نقطـة التـأثير.

الحـامل: هو المستقيم الذي يحمـل الشعـاع.

ألإتجـاه: يمثـل بسـهم يبين إتجـاه الشعـاع.

الشـدة: تمثـل قيمة المقـدار المقـاس للشعـاع و هنـدسيا تمثـل طـول الشعـاع.

نقطـة التـأثير: تمثـل نقطـة البـداية للشعاع

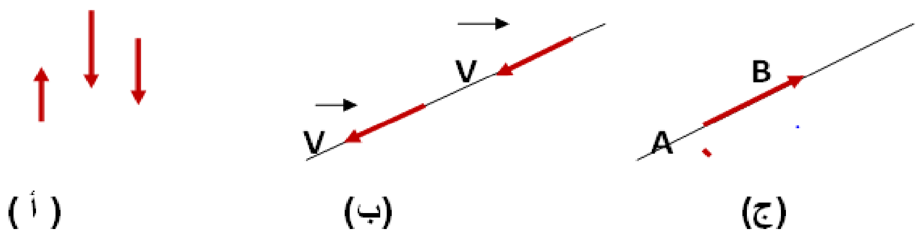


الشكل (II-1) التمثيل البياني للشعاع

الشعاع الحر: هو كل شعاع نهايته تكون حره أي غيـر مقيـده أنظـر الشكل (II-2 آ).

الشعاع الإنزلاقي: هو كل شعاع على مستقيم يحمله نستطيع تحويله في نفس المستقيم وتكون نهايتــه غير مقيــده أنظـر الشكل (II-2 ب).

الشعاع المرتبط : هو كل شعاع نهايته تكون مقيـده أنظـر الشكل (II-2 ج).



الشكل (II-2) الرسم (أ)الشعاع الحر الرسم (ب)الشعاع الإنزلاقي الرسم (ج)الشعاع المقيد.

علاقة شـا ل في الأشعـة :

عندما يكون لدينا شعاع $\overrightarrow{AB}$ فإننا نستطيع إدخـال نقطة ثالثة **O** بحيث

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

ملاحظة

عندما تكون لدينا نقطتان B و A حيث إحداثياتهما x_B و y_B ثم x_A و y_A. فإن إحداثيـات الشعاع $\overrightarrow{AB}$

تعطـى بالعلاقة التالي هي
$$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{cases}$$

عندما تكون لدينا نقطتان B و A حيث إحداثياتهما $A(x_A . y_A . z_A)$: $B(x_B . y_B . z_B)$:

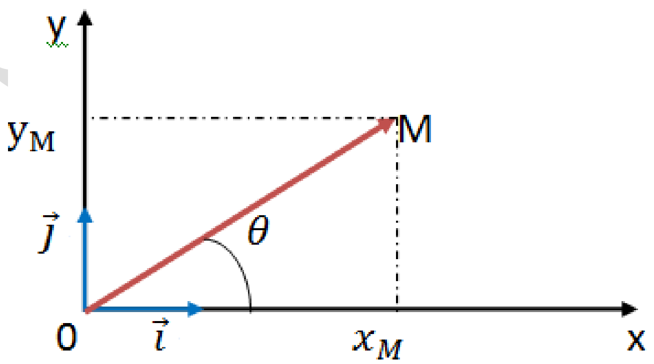
مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$
$$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{cases}$$

طويلة هذا الشعاع هي

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

تمثيل شعاع في المستوي $(o. x. y.)$

- موضع نقطة مادية **M** في معلم مستوى $(o. x. y.)$ حيث الشعاع يعطى بالعلاقة التالية أنظر الشكل (3 -II)
$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$



الشكل (3 -II) يمثل مركبات شعاع في المستوي

طويلة الشعاع $\vec{a}$ يعطى بالعلاقة التالية

$$\mathrm{OM} = \sqrt{(x_M)^2 + (y_M)^2}$$

ميل هذا الشعاع $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة ل ox تعطى بالعلاقة التالية

$$\tan(\theta) = \frac{x}{y}$$

مركبات هذا الشعاع x و y لهما علاقة بطويلة الشعاع OM والزاوية θ حيث

$$\begin{cases} x = \mathrm{OM}\cos(\theta) \\ y = \mathrm{OM}\sin(\theta) \end{cases}$$

تمثيل شعاع في الفضاء

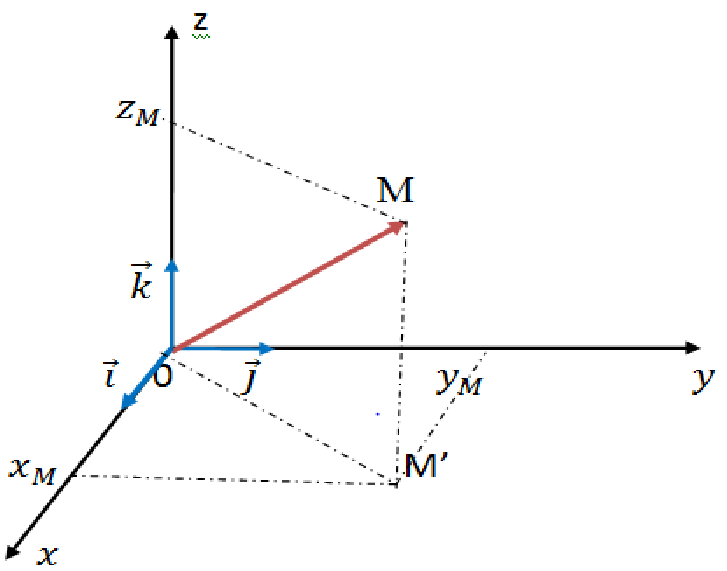
موضع نقطة مادية **M** في معلم فضائي $(o.\,x.\,y.\,z)$

حيث الشعاع يعطى بالعلاقة التالية $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

علما أن y. z **.** تمثل إسقاطات النقطة **M** على المحاور الثلا ثة **o** x , **o** y , **o** z وتسمى

إحداثيات النقطة **M** وتمثل بالعلاقة التالية **M(**x**.** y**.** z**)** انظر الشكل (**4 -II**)

حيث **M'** هي إسقاط النقطة **M** على المستوى (**o** x , **o** y)



الشكل (II- 4) يمثل مركبات شعاع في معلم فضائي

إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{cases} x_M \\ y_M \\ z_M \end{cases}$

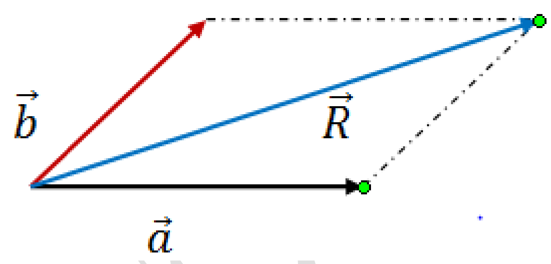
عمليات على ا لأشعة

جمع الاشعة

جمع شعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو شعاع $\vec{R}$، يسمى محصلة الشعاعين وهندسيا يمثل وتر متوازي

الأضلاع المتشكل من الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ أنظر الشكل (5-II)

حيث $\vec{R}$ جبريا يعطى بالعلاقة التالية $\qquad \vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$



الشكل (5-II) التمثيل الهندسي لشعاع المحصلة

طويلة المحصلة $\vec{R}$ تعطى بالعلاقة التالية

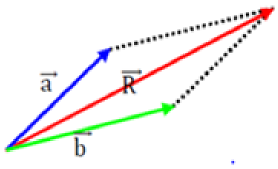
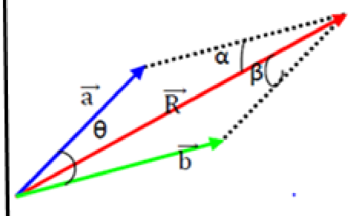
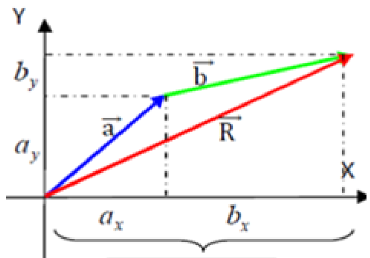
حيث $\qquad$ R = $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$ $\quad$ [1 -II]

θالزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

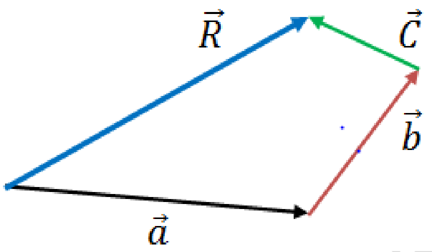
ملاحظة : إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدان أي θ =90 ومنه R = $\sqrt{a^2 + b^2}$

الجدول (1-II) يمثل الطرق الثلاثة لإجاد المحصلة

الجدول (II-1) يمثل الطرق الثلاثة لإيجاد المحصلة

قانون التجب	قاعدة متوازي الأضلاع	جمع الإحداثيات
 $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$	 $\frac{R}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ وتر متوازي الأضلاع	 $\begin{cases} R_x = a_x + b_x \\ R_y = a_y + b_y \end{cases}$

عندما يكون عدد الاشعة المجموع أكبر من إثنان مثلا ثلاث أشعة $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ فجمع هذه الاشعة هو $\vec{R}$ حيث $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ أنظرشكل (II-6)



شكل (II-6) يمثل الشكل الهندسي لجمع ثلاث أشعة

يسمى هذا بالجمع الهندسي حيث تقول القاعدة شعاع المحصلة $\vec{R}$ بدايته بداية الشعاع الأول ونهايته نهاية الشعاع الثالث شرط أن تكون بداية الشعاع الثاني هي نهاية الشعاع الأول وبداية الثالث نهاية الثاني . لأن في المجال الشعاعي نستطيع أن نسحب شعاع من مكان إلى مكان ثاني شرط أن يحافظ هذا الشعاع على طويلته وإتجاهه وحامله الجديد يكون موازي للحامل السابق .

خصائص الجمع

-الجمع الشعاعي تبديلي : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

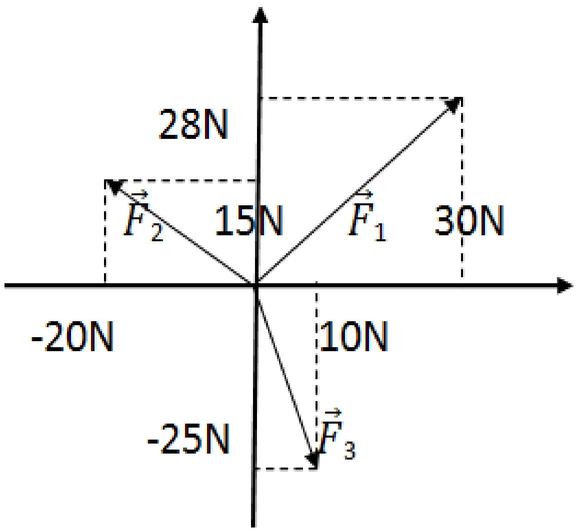
-الجمع الشعاعي تجميعي: $(\vec{a} + \vec{b}) . \vec{c} = \vec{a} . \vec{c} + \vec{b} . \vec{c}$

تمرين تطبيقي :

أحسب محصلة القوى المؤثرة على نقطة مادية وفق الشكل التالي (7-II)

1- مثل شعاع المحصلة على نفس الشكل

2- احسب ميل شعاع المحصلة



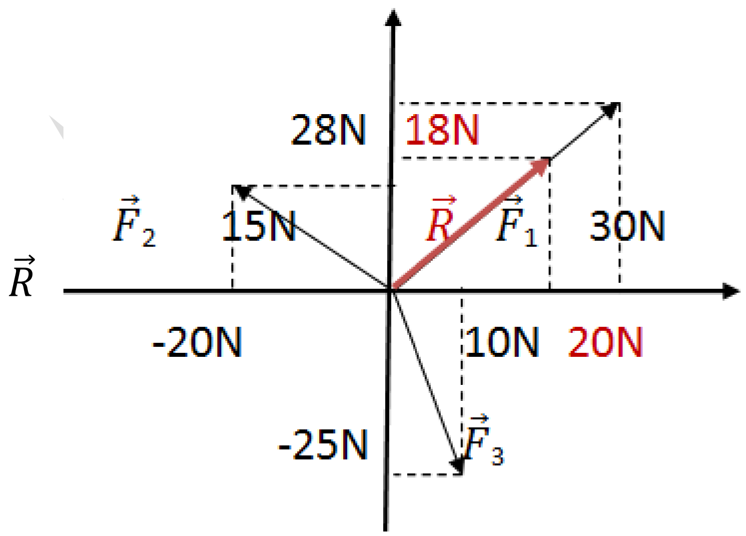
شكل (7-II) يمثل القوى

الحل

1-لأجاد المحصلة نطبق العلاقة الشعاعية

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

وبتطبيق طريقة الإحداثيات



$$=\begin{cases} R_x = 30 + 10 - 20 \\ R_y = 28 + 15 - 25 \end{cases}$$

$$\vec{R} = \begin{cases} R_x = 20N \\ R_y = 18N \end{cases}$$

- 2- حساب ميل المحصلة

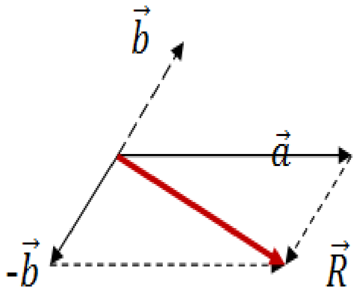
- $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$

- $\tan\theta = \frac{18}{20}$ $\tan\theta = 0.9$

الطرح في الاشعه :

طرح شعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو شعاع $\vec{R}$، يسمى محصلة الشعاعين وهندسيا يمثل وتر متوازي الأضلاع المتشكل من الشعاعين $\vec{a}$ و $-\vec{b}$

- أنظر الشكل (5-II)



حيث $\vec{R}$ جبريا يعطى بالعلاقة التالية $\vec{R} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{R} = \vec{a} + (-\vec{b})$

شكل (7-II) يمثل الشكل الهندسي لطرح شعاعين

هندسيا المحصلة تمثل الوتر لمتوازي الأضلاع المشكل من $\vec{a}$ و $-\vec{b}$

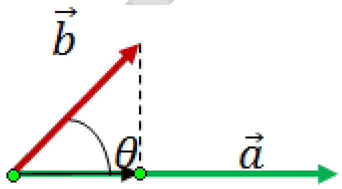
حيث طويلة $\vec{R}$ [2 -II] $R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$

θ الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الجداء السلمي :

تعريف:- يعرف الجداء السلمي لشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بالمقدار السلمي المعطى بالعلاقة التالية

[3 -II] $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b\cos\theta$



حيث (θ) هي الزاوية بين الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ويعرف هندسيا بأنه جداء طويلة أحدهما في القيمة الجبرية لإسقاط الثاني على الأول وتسمى بالطريقة الهندسية

ملاحظة:

عندما تكون $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ فإن $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

عندما تكون $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ فإن $\vec{a}\,.\,\vec{b} < 0$

عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$

الجداء السلمي بالطريقه الجبرية.

إذا كان لدينا شعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ إحداثياتهما على التوالي

$$\vec{a}\begin{cases} x_a \\ y_a \\ z_a \end{cases} \qquad \vec{b}\begin{cases} x_b \\ y_b \\ z_b \end{cases}$$

فإن الجداء السلمي بالطريقة الجبرية يعطى كالتالي

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = x_a\,.x_b + y_a\,.\,y_b + z_a\,.\,z_b$$

حيث $\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath} = \vec{\imath}\,.\,\vec{k} = \vec{\jmath}\,.\,\vec{k} = 0$ و $\vec{\imath}\,.\vec{\imath} = \vec{\jmath}\,.\vec{\jmath} = \vec{k}\,.\vec{k} = 1$

خصائص الجداء السلمي.

- الجداء السلمي تبديلي $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$
- الجداء السلمي توزيعي $\vec{C}\,.(\vec{b} + \vec{a}) = \vec{C}\,.\,\vec{b} + \vec{C}\,.\,\vec{a}$
- الجداء السلمي خطي $(\alpha\,\vec{a})\,.(\beta\,\vec{b}) = \alpha\beta(\vec{a}\,.\,\vec{b})$

الجداء الشعاعي :

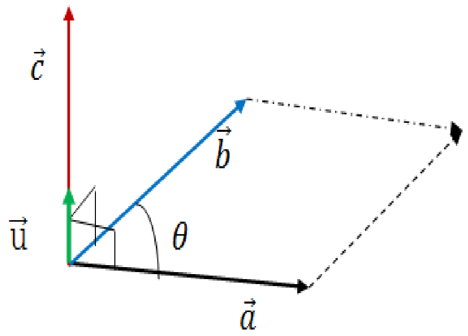
الجداء الشعاعي بالطريقه اهندسية

الجداء الشعاعي بين شعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو الجداء المعرف بالعلاقة التالية [4-II]

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \qquad [4\text{-}II]$$

حيث الشعاع $\vec{c}$ عمودي على المستوي الذي يحتوي الشعاعان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ انظر الشكل (8-II)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = a.\,b \sin\theta \;\vec{u}$$



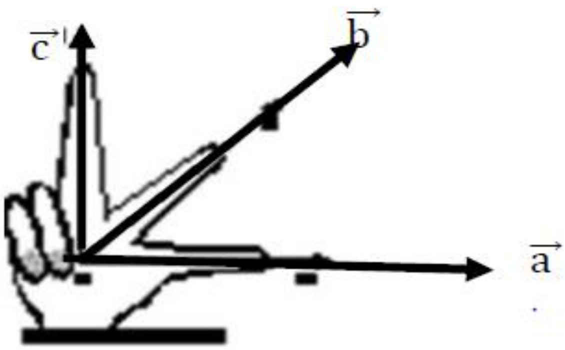
الشكل (II-8) يمثل الجداء الشعاعي هندسيا

طويلة الشعاع $\vec{c}$ هي طويلة الجداء الشعاعي

$$\| \vec{c} \| = \| \vec{a} \wedge \vec{b} \| = a.\, b \sin \theta \quad [5\text{-II}]$$

طويلة الشعاع $\vec{c}$ تساوي مساحة متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

إتجاه الشعاع $\vec{c}$ تحدده دوران الصامولة أو أصابع الأيدي اليمنى أنظر الشكل (II- 9)



الشكل (II- 9) يمثل إتجاه $\vec{c}$

حسب اليد اليمنى

الجداء الشعاعي بالطريقه التحليلية

إذا كان لدينا شعاعان ($\vec{a}$ ($x_1; y_1; z_1$) و $\vec{b}$ ($x_2; y_2; z_2$ ن الجداء الشعاعي لهذين الشعاعين يعطى كالتالي

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1.z_2 - y_2.z_1)\vec{i} - (x_1.z_2 - x_2.z_1)\vec{j} + (x_1.z_2 - x_2.z_1)\vec{k}$$

خصائص الجداء الشعاعي.

- الجداء الشعاعي تبديلي مضاد $\vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a}$

- الجداء الشعاعي توزيعي بالنسبة للجمع $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
- الجداء الشعاعي خطي $\alpha \vec{a} \wedge \beta \vec{b} = \alpha\beta(\vec{a} \wedge \vec{b})$

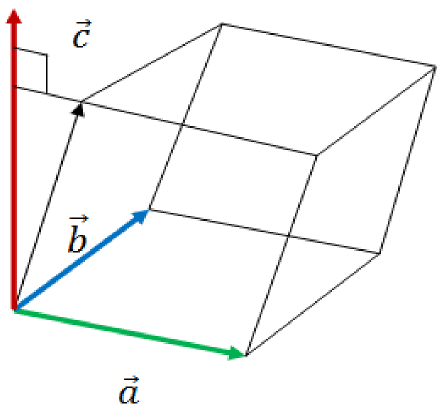
ملاحظة

- إذا كانت θ تساوي الصفر بين الشعاعين فإن الجداء الشعاعي يكون معدوم.
- الجداء الشعاعي لأشعة الوحدة.

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \text{ et } \vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \text{ et } \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

الجداء المختلط

الجداء المختلط لثلاث أشعة $\vec{c}$; $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ينتج عنه قيمه سلمية d تعطى بالعلاقة التالية [5-II].



$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = d \quad [5\text{-II}]$$

القيمه المطلقة للجداء المختلط يساوي حجم المعين المتشكل من الأشعة ذاتها أنظر الشكل (10 -II)

الشكل (10 -II)

خصائص الجداء المختلط.

- التبادل الدوار لأشعة الجداء المختلط لا تغير من نتيجته.

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

إشتقاق شعاع

إشتقاق شعاع في معام أشعة الوحدة فيه ساكنة

ليكن لدينا شعاع $\vec{a}$ في معلم $(o. x. y. z)$ أشعة الوحدة هي $(o. \vec{i}. \vec{j}. \vec{k})$ وإحداثيات الشعاع $\vec{a}$ في هذا المعلم معرفة كما يلي.

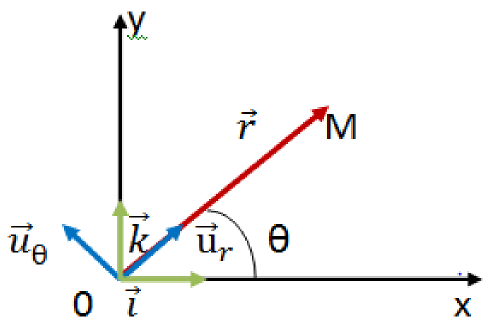
$$\vec{a} = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

مشتق الشعاع $\vec{a}$

$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ لأن $(o.\ \vec{i}.\ \vec{j}.\ \vec{k})$ قاعدة ثابتة.

إشتقاق شعاع في معام أشعة الوحدة فيه دوارة بزاوية θ (t) .

عندما يكون لدينا معلم في حالة دوران بالنسبة لمعلم ثابت فإن أشعة الوحده في هذا المعلم تصبح قابلة للاشتقاق أنظر الشكل (11-II).



$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\,\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} x \frac{d\theta}{dt}$$

شكل (11-II) يمثل معلم دوار

$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$; $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ ومنه $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\ \vec{u_\theta}$

مشتق شعاع دوار بالنسبة للزمن يساوي جداء مشتق زاوية الدوران في الشعاع العمودي عليه مباشرة في إتجاه $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$ الدوران.

خصائص إشتقاق الشعاع

- مشتق الجداء السلمي $\frac{d\vec{V}_1.\vec{V}_2}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt}.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\frac{d\vec{V}_2}{dt}$

- مشتق الجداء اشعاعي $\frac{d\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt}\Lambda\vec{V}_2 + \vec{V}_1\Lambda\frac{d\vec{V}_2}{dt}$

مشتق شعاع طويلته ثابته ودار يكون عمودي على مشتقه $\vec{V}_1 \perp \frac{d\vec{V}_1}{dt}$

II -2 العامل التفاضلي .

العامل نابلا

نسمي المعامل التفاضلي « نابلا » ونرمز له $\vec{\nabla}$ حيث يعطى بالعلاقة التالية [6-II].

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \frac{d}{dx}\vec{\imath} + \frac{d}{dy}\vec{\jmath} + \frac{d}{dz}\vec{k} \qquad [6\text{-}II]$$

التدرج Gradient

لتكن الدالة السلمية f حيث $f\,(x\,;y\,;z\,)$ نسمي تدرج الدالة f أو $\overrightarrow{grad}\,f$ أو $\vec{\nabla}f$

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\, f(x,y,z)$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}f(x,y,z) = \frac{df(x,y,z)}{dx}\vec{\imath} + \frac{df(x,y,z)}{dy}\vec{\jmath} + \frac{df(x,y,z)}{dz}\vec{k}$$

تباعد divergence

ليكن لدينا شعاع $\vec{v}$ نسمي تباعد الشعاع $\vec{v}$ div أو $\vec{v}\,.\,\vec{\nabla}$ المقدار السلمي.

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{V} = \frac{dV_x}{dx}\vec{\imath}.\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dy}\vec{\jmath}.\vec{\jmath} + \frac{dV_z}{dz}\vec{k}.\vec{k}$$

دوران شعاع Rotationnel

دوران شعاع $\vec{V}$ هو شعاع يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\mathbf{Rot}}\,\vec{\mathbf{V}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\wedge\vec{V}$ التالية.

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{dV_z}{dy} - \frac{dV_y}{dz}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{dV_z}{dx} - \frac{dV_x}{dz}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{dV_y}{dx} - \frac{dV_x}{dy}\right)\vec{k}$$

العامل نابلا في مختلف المعالم الكارتزي والاسطواني و الكروي.

$\vec{\nabla}$ في المعلم الكارتزي .

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{k}$$

$\vec{\nabla}$ في المعلم الإسطواني .

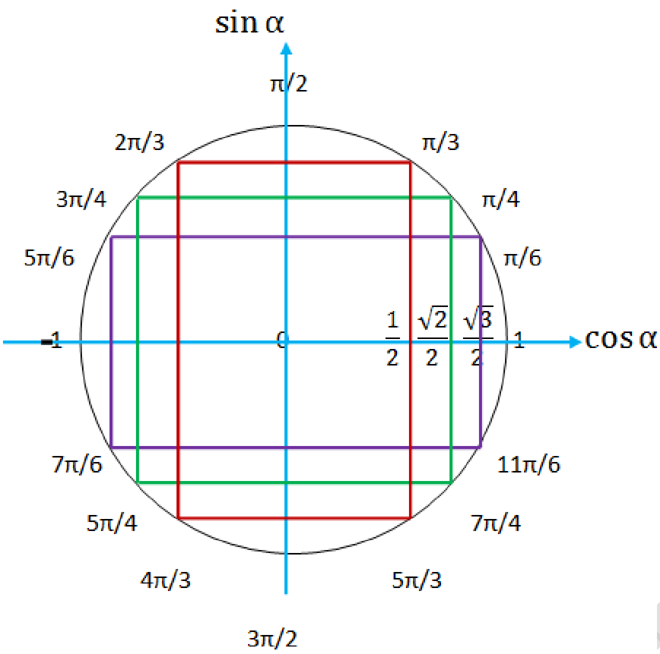
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{\partial}{r\,\partial\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{\nabla}$ في المعلم الكروي

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{\partial}{r\,\partial\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

3-II العلاقات المثلثية

الدائرة المثلثية من خلالها نعرف الزوايا الشهيرة ونستنتج العلاقات المثلثية شكل (12-II)



الشكل (12-II) يمثل الدائرة المثلثية

نلاحظ قيم الزوايا الشهيرة على الحور cos في الجهة الموجبة وفي الجهة السالبة تكون هذه القيم سالبة نفس الشي بالنسبة لمحور sin

ونستطيع إستنتاج قيم مثلثية أخرى من هذه الدائرة.

مثلا $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$ و $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

الجداول التالية تبين بعض العلاقات المثلثية ونستطيع من خلالها إستنتاج علاقات أخرى.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} X\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} X\sin(x)\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{و} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos(x)\, X\cos(\theta) + \sin(x) X\sin(\theta)\right)$$

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\, X\cos(x-\theta)$$

الفصل(III) الحركيات

1-III تعريف :

علم الحركيات هو علم يدرس حركة نقطة مادية دون التعرض إلى مسبباتها مثل القوة والعزم.

- النقطة المادية هي كل جسم مادي تكون ابعاده مهملة أمام المسار الذي يسلكه.

- الحركة مفهوم نسبي

مثال :

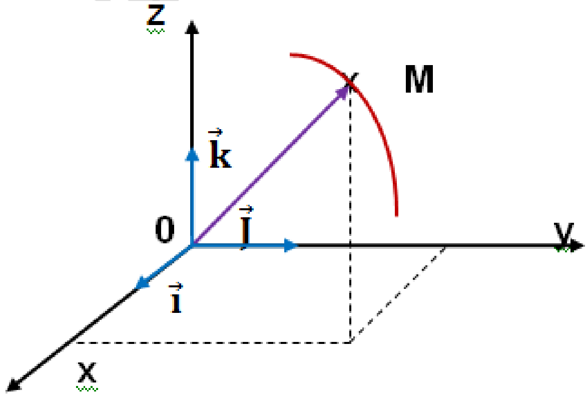
عندما يكون لدينا راكب في القطار وجالسا في مقعده وينظر إلى أبيه من النافذة واقف على الرصيف. عندما يتحرك القطار الأب يرى ابنه في حالة حركة ويراه زميله الذي جالسا بجانبه ساكنا. إذن الابن متحرك بالنسبة للأب وساكن بالنسبة لزميله , ومنه نقول إن الحركة والسكون مفهومان نسبيا.

- في الحر كيات ندرس المقادير الشعاعية مثل شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$, شعاع السرعة $\vec{v}$ وشعاع التسارع $\vec{a}$. وندرس أيضا المقادير الجبرية مثل معادلة المسار و المعادلة الزمنية للحركة.

2-III موضع المتحرك

شعاع الموضع

يعرف شعاع الموضع بأنه الشعاع الذي مبدأه مبدأ المعلم 0 المختار لدراسة الحركة وموضع المتحرك عند النقطة M . ويعطى بالعلاقة التالية [1-III] $\overrightarrow{OM}$ أنظر الشكل (1-III)



شكل (1-III) يمثل شعاع الموضع

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}} \qquad [1\text{-III}]$$

حيث

x , y , z تسمى إحداثيات المتحرك.

3-III المعادلات الزمنية

إذا كانت الإحداثيات x , y , z ثابتة أي ليس لها علاقة بالزمن t نقول أن المتحرك M في حالة سكون وإذا كانت الإحداثيات x , y , z متغيرة بدلالة الزمن t ويعطى بالعلاقة التالية

[2-III]

أي x(t) و y(t) و z(t) نقول أن انقطة M في حالة حركة ونسمي هذه الإحداثيات بالمعادلات الزمنية للحركة.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \qquad [2\text{-III}]$$

معادلة المسار

المسار هو مجموعة النقاط المتعاقبة التي يمر بها المتحرك أثناء حركته.

ومعادلة المسار هي إيجاد علاقة بين الإحداثيات دون الزمن.

مثال:

متحرك يقوم بحركة في معلم كارتزي مستوي حيث إحداثيات المتحرك تعطى بالعلاقة التالية

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^2 - 3 \end{cases}$$

معادلة المسار

نأخذ t من x حيث $t = \frac{x}{3}$ ثم نعوضها في y

فتصبح معادلة y كالتالي $y = 2\frac{x^2}{9} - 3$ تسمى معادلة المسار

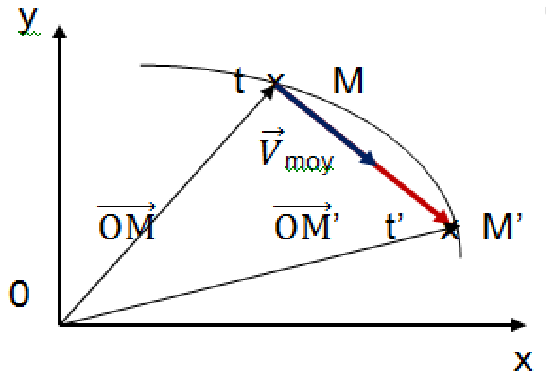
شعاع السرعة

شعاع السرعة المتوسطة

عندما يكون لدينا متحرك ينتقل على مسار في اللحظة t يكون عند النقطة M وفي اللحظة t’ يكون عند النقطة M’ فنسمي الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ بشعاع الإنتقال والزمن المستغرق بين الموضع M والموضع M’ هو $\Delta t = t'-t$ نسمي شعاع السرعة المتوسطة $\vec{V}_{moy}$ حاصل قسمة شعاع الإنتقال على الزمن المستغرق أنظر الشكل (2-III)

شعاع السرعة المتوسطة يعطى بالعلاقة التالية [3-III]

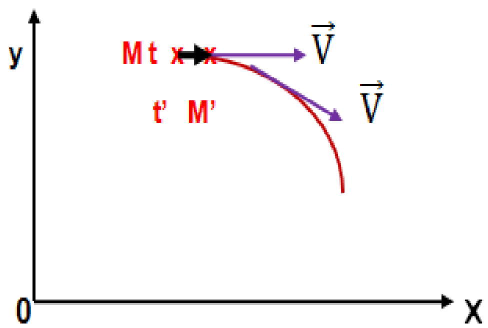
$$\boxed{\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t}} \qquad [3\text{-}III]$$



شكل (2-III)يمثل شعاع الإنتقال وشعاع السرعة المتوسطة

4-III شعاع السرعة الحظية

عندما يكون لدينا متحرك ينتقل على مسار في اللحظة t يكون عند النقطة M وفي اللحظة t’ يكون عند النقطة M’ والفارق الزمني $\Delta t = t'-t$ يؤول إلى لحظة فإن شعاع الإنتقال يصبح قطعة مستقيمة على المسار وشعاع السرعة يصبح مماس للمنحنى أنظر الشكل (3-III).



شكل (3-III) يمثل شعاع الإنتقال

وشعاع السرعة اللحظية

وشعاع السرعة اللحظية يعطى بالعلاقة التالية.[4-III]

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \vec{V}_{moy} = \lim_{t' \longrightarrow t} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad [4\text{-III}]$$

ومنه نقول أن شعاع السرعة اللحظية هو مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن ويكون دائما مماس للمنحنى.

وحدة السرعة

وحدة السرعة في الجملة الدولية SI هي $(m.s^{-})$, m/s

شدة شعاع السرعة

شدة شعاع السرعة اللحظية يعطى بالعلاقة التالية [5-III]

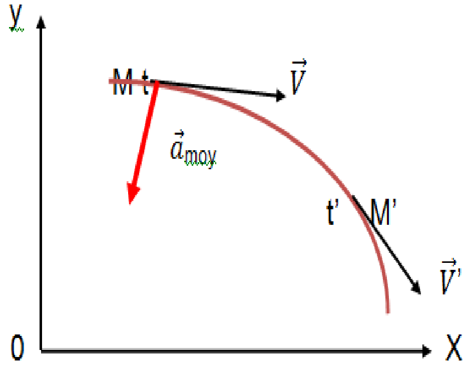
$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad [5\text{-III}]$$

5-III شعاع التسارع:

شعاع التسارع المتوسط.

عندما يكون لدينا متحرك يقوم بحركة على مسار في اللحظة t يكون في الموضع M ويكسب سرعة لحظية $\vec{V}$ وفي اللحظة t’ يكون في الموضع M’ ويكسب سرعة $\vec{V}'$ أنظر الشكل(3-III) نسمي شعاع التسارع المتوسطة $\vec{a}_{moy}$ حاصل قسمة شعاع الطرح بين السرعتين $\Delta\vec{V}$على الزمن المستغرق Δt ويعطى بالعلاقة التالية [6-III]

$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{t' - t} \qquad [6\text{-III}]$$



شكل (3-III) يمثل شعاع التسارع المتوسط

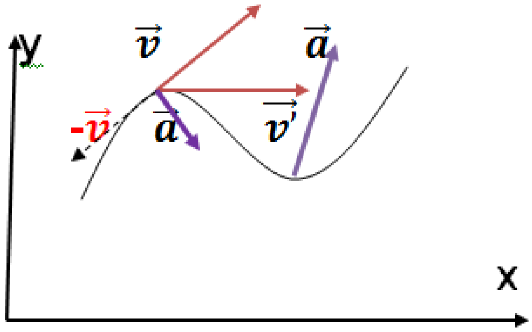
شعاع التسارع اللحظي

عندما يكون الفارق الزمني يؤول الى لحظة فإن شعاع التسارع المتوسط يصبح شعاع تسارع لحظي ويعطى بالعلاقة التالية[7-III].

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{t' \to t} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad [7\text{-}III]$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

ومنه نقول أن شعاع التسارع اللحظي هو مشتق شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن ويكون دائما موجه نحوى تقعر المنحنى أنظر الشكل (4-III)



شكل(4-III)يمثل شعاع التسارع اللحظي

عندما يكون لدينا متحرك إحداثياته في معلم كارتزي هي. $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

فإن شعاع التسارع a يعطى بالعلاقة التالية

$$\vec{a} = \ddot{X}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

شدة شعاع التسارع

شدة شعاع التسارع اللحظي يعطى بالعلاقة التالية [8-III]

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \qquad [8\text{-}III]$$

وحدة شعاع التسارع هي مترعلى الثانية مربع. m/s^2

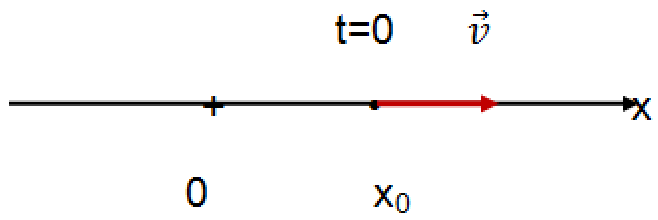
III-6 الحركات المستقيمه

الحركة المستقيمة المنتظمة

تعريف : الحركة المستقيمة المنتظمة هي حركة مسارها خط مستقيم وشعاع سرعتها ثابت وشعاع تسارعها معدوم.

المعادلة الزمنية للحركة

نختار معلم خطي ليكن $\vec{0}$ كمعلم مبدأه 0 لتكون نقطة مادية M تنطلق من نقطة فاصلتها x_0 عند اللحظة t=0 ويسير بسعة ثابتة v .



بما أن السرعة هي مشتق المسافة x

إذن السرعة $\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$

فإن $dx = vdt$

بتكامل الطرفين $\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt \implies x - x_0 = vt$

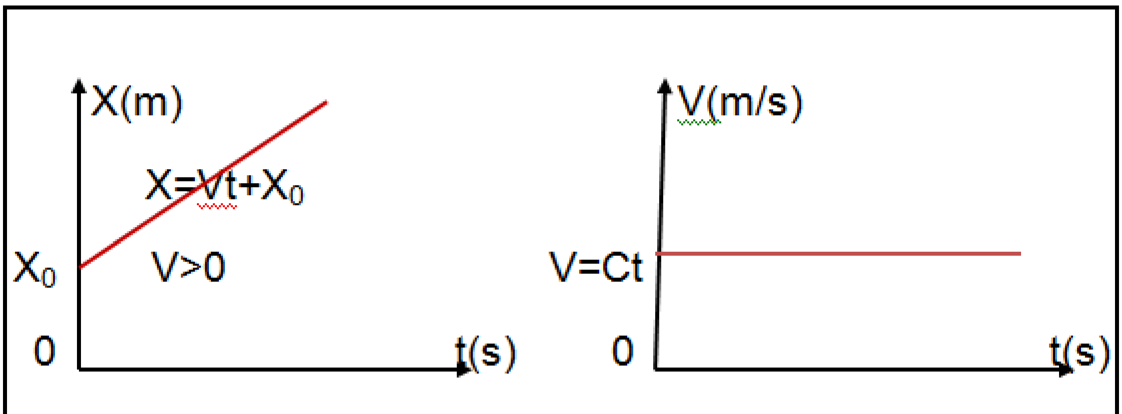
المعادلة الزمنية للحركة المستقيمة المنتظمة هي $\boxed{x(t) = vt + x_0}$

$x(t)$ الزمنية الفاصلة

v السرعة

x_0 الفاصلة الإبتدائية

مخططات الحركة المستقيمة المنتظمة



مخطط المسافة   مخطط السرعة

الحركة المستقيمة المتغيرة بإنتظام .

تعريف : الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام هي حركة مسارها خط مستقيم وشعاع تسارعها ثابت وشعاع سرعتها متغير.

المعادلة الزمنية للحركة

نختار معلم خطي ليكن $\vec{0}$ كمعلم مبدأه 0 لتكون نقطة مادية M تنطلق من نقطة فاصلتها x_0 عند اللحظة $t=0$ و سرعة ابتدائية v_0

وتسارع ثابت a

معادلة السرعة

لدينا $a = \frac{dv}{dt}$ <=== $dv = adt$ بتكامل الطرفين $\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$

$v - v_0 = at$ <=== $\boxed{v = at + v_0}$ المعادلة الزمنية للسرعة

المعادلة الزمنية للحركة

لإيجاد الفاصلة الزمنية لدينا $\frac{dx}{dt} = v$ <=== $dx = vdt$ نعوض v بما يعادلها

تصريح $dx = (at + v_0)dt$

بتكامل طرفي المعادلة

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (at + v_0)dt$$

ومنه [9-III] $x - x_0 = \frac{at^2}{2} + v_0 t$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}}$$

حيث $x(t)$ الفاصلة الزمنية

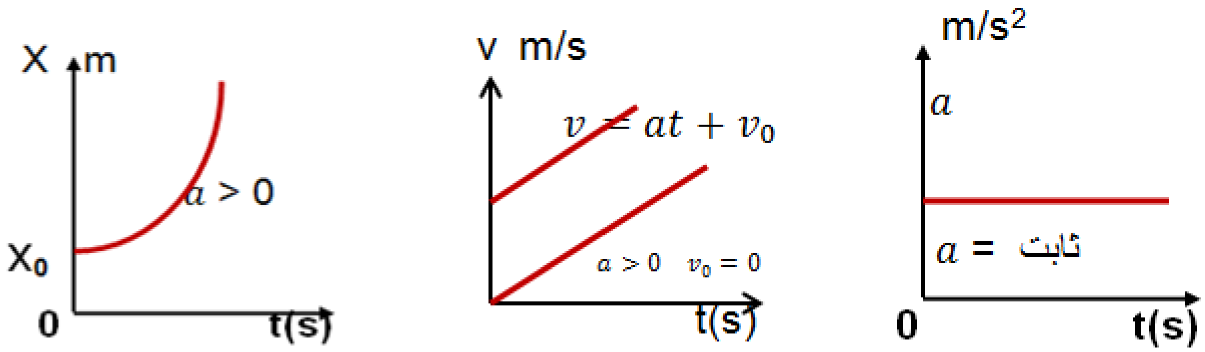
x_0 الفاصلة الابتدائية

a تسارع الحركة

v_0 السرعة الابتدائية عند $t=0$

مخططات الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

مخططات المسافة والسرعة والتسارع أنظر الشكل (III-5)



شكل (III-5) يمثل مخططات الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

معادلات الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام وتعطى بالعلاقات التالية [III-10-12]

-[III-10] $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

- [III-11] $v = at + v_0$

نستخرج الزمن من المعادلة الثانية أي $t = \frac{v - v_0}{a}$

ثم نعوضها في المعادلة (1)

فنحصل على المعادلة الثالثة للحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام وهي

$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ [III-12]

الحركة المستقيمة المتغيرة

هي الحركة المستقيمة التي يكون تسارعها تابعا للزمن وليس ثابت $a = g(t)$

مثال: حركة م متغيرة تسارعها يعطى بالعلاقة التالية $a = 2t - 1$

معادلات الحركة بما أن $a = \frac{dv}{dt}$ $dv = adt$

$dv = (2t - 1)dt$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t (2t - 1)dt$$

بتكامل طرفي المعالة

$$v - v_0 = \frac{2t^2}{2} - t$$

معادلة السرعة $v = t^2 - t + v_0$

المعادلة الزمنية للحركة .

لدينا $\frac{dx}{dt} = v$ ومنه $dx = vdt$ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (t^2 - t + v_0)dt$

$$x - x_0 = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + v\,t$$

$$\boxed{x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + v\,t + x_0}$$

[13-III]

الحركة المستقيمة الجيبية.

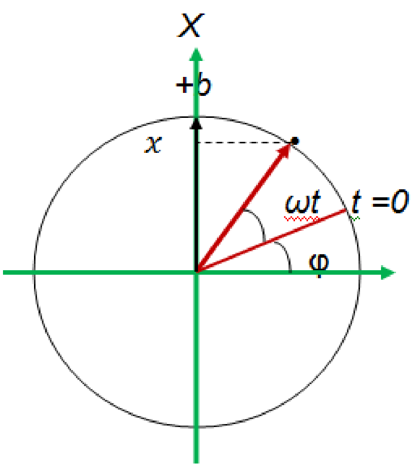
هي إسقاط لحركة دائرية منتظمة على إحدى الأقطار أنظر الشكل (6-III)

عندما تكون لدينا نقطة مادية تقوم بحركة دائرية منتظمة نصف قطر الدائرة هو $+b$

تنطلق النقطة في اللحظة $t=0$ من زاوية ابتدائية φ وتدور بسرعة زاوية ثابتة ω في

اللحظة t تصنع زاوية $\alpha = \omega t + \varphi$ إسقاط النقطة من الدائرة على محور نتحصل على

الفاصلة x حيث $\frac{x}{b} = \sin(\omega t + \varphi)$



شكل (6-III) مسار حركة دائرية منتظمة

ومنه [14-III] $\boxed{x(t) = b\sin(\omega t+\varphi)}$

هذه المعادلة تسمى معادلة الحركة الجيبية المستقيمة على المحور x

- $x(t)$ تسمى الفاصلة الزمنية
- b- المطال ألأعظمي
- ω النبض للحركة أو السرعة الزاوية
- φ الصفحة الابتدائية

معادلة السرعة

لدينا السرعة هي مشتق المعادلة الزمنية $v=\dot{x}$ ومنه معادلة السرعة تعطى بالعلاقة [12-III]

$$\boxed{v(t) = \omega b\cos(\omega t+\varphi)} \qquad [15\text{-III}]$$

- $v(t)$ تسمى السرعة الزمنية
- ωb المطال الأعظمي للسرعة
- ω النبض الحركة أو السرعة الزاوية
- φ الصفحة الابتدائية

معادلة التسارع

التسارع هو المشتق الثاني للحركة أو المشنق الأول للسرعة ويعطى بالعلاقة التالية[16-III]

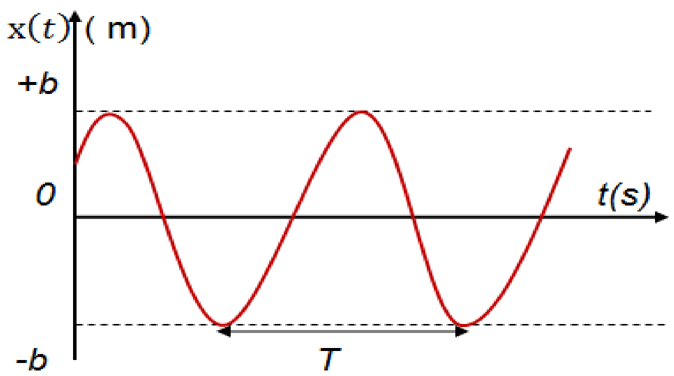
$$\boxed{a(t) = -\omega^2 b\sin(\omega t+\varphi)} \qquad [16\text{-III}]$$

$$a(t) = -\omega^2 x$$

مخططات الحركة المستقيمة الجيبية

منحنى المعادلة الزمنية هي دراسة x بدلالة الزمن أنظر الشكل (7-III)

$$\boxed{x(t) = b\sin(\omega t+\varphi)}$$



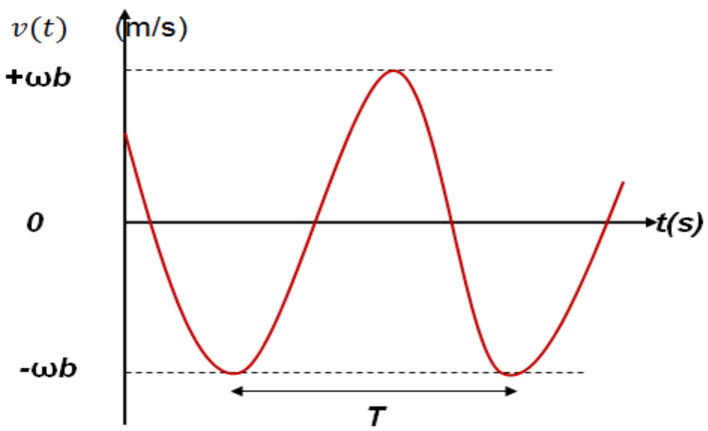
شكل (7-III) يمثل منحنى المسافة

مخطط السرعة

منحنى السرعة هو دراسة معادلة السرعة بدلالة الزمن أنظر الشكل (8-III)

المعادلة الزمنية للسرعة هي

$$\boxed{v(t) = \omega b\cos(\omega t+\varphi)}$$



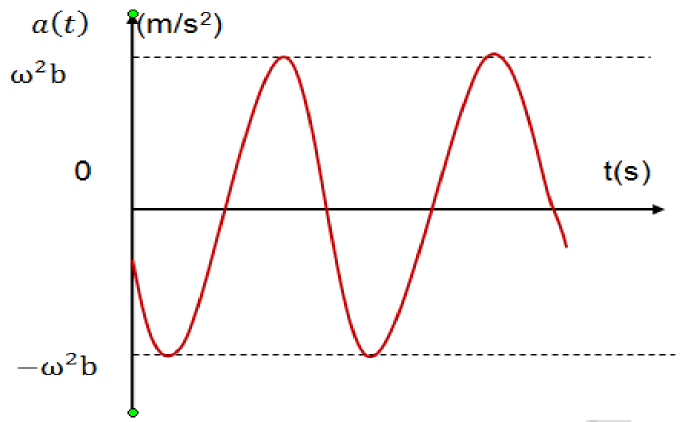
شكل (8-III) يمثل منحنى السرعة

مخطط التسارع

منحنى التسارع هو دراسة معادلة التسارع بدلالة الزمن أنظر الشكل (9-III)

المعادلة الزمنية للتسارع هي

$$\boxed{a(t) = -\,\omega^2 b \sin(\omega t + \varphi)}$$



شكل (9-III) يمثل منحنى التسارع

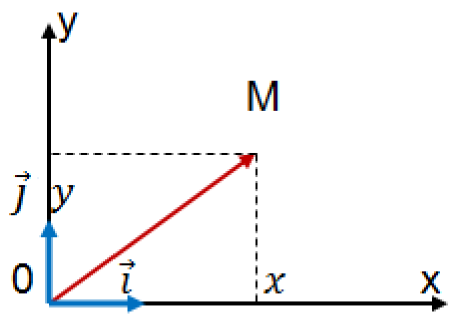
7-III الحركات المستوية

إذا كانت حركة نقطة مادية في المستوي يمكن تحديد موضع المتحرك بواسطة معلم كارتزي أو معلم قطبي:

1-7-III دراسة الحركة بالإحداثيات الكارتزيه

لتكن نقطة مادي m تتحرك في مستوي موضع المتحرك هو $\overrightarrow{OM}$ أنظرشكل (10-III)

حيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$



شكل (10-III) يمثل موضع متحرك في المستوي

إحداثيات السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$$

لدينا
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath}$$

حيث $v_x = \dot{x}$ مركبة السرعة على المحور Ox

$v_y = \dot{y}$ مركبة السرعة على المحور Oy

إحداثيات التسارع:

لدينا
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath}$$

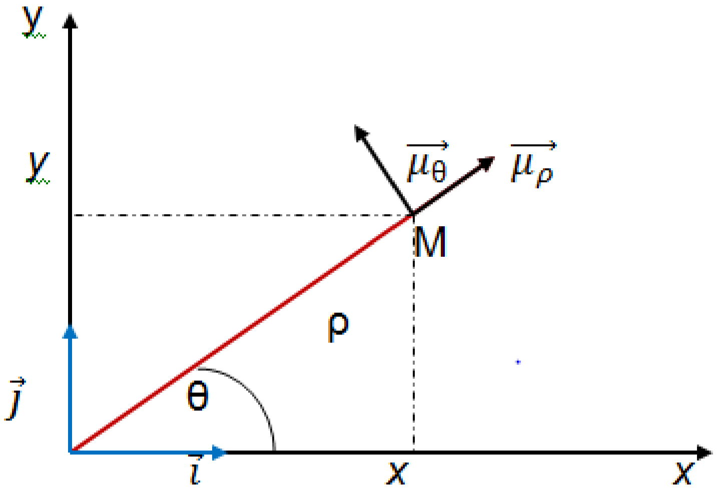
حيث $a_x = \ddot{x}$ مركبة التسارع على المحور Ox

$a_y = \ddot{y}$ مركبة التسارع على المحور Oy

III-7-2 دراسة الحركة بالإحداثيات القطبية:

موضع المتحرك هو $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$ أنظر الشكل (III-11)

شكل(III-11)المعلم القطبي



شكل(III-11) المعلم القطبي

العلاقة بين الإحداثيات الكارتزيه والقطبية .

العلاقة بين أشعة الوحدة للمعلم الكارتزي والمعلم القطبي تعطى بالعلاقة التالية [III-17]

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\mu_\rho} &= \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\mu_\theta} &= -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{aligned}} \quad [17\text{-III}]$$

مشتقات أشعة الوحدة للمعلم القطبي $\overrightarrow{\mu_\theta}$ و $\overrightarrow{\mu_\rho}$

$$\frac{d\overrightarrow{\mu_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{\imath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{\jmath} \qquad \frac{d\overrightarrow{\mu_\rho}}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{\jmath}$$

نأخذ $\dot{\theta}$ و $(-\dot{\theta})$ عامل مشترك

$$\frac{d\overrightarrow{\mu_\rho}}{dt} = +\dot{\theta}\,\underbrace{(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})}_{\mu_\theta}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\mu_\rho}}{dt} = -\dot{\theta}\,\underbrace{[(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})]}_{\mu_\rho}$$

ومنه مشتق أشعة الوحده في المعلم القطبي تعطى بالعلاقة التالية [18-III]

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}} = \dot{\theta}(-\overrightarrow{\mu_\rho}) \quad \text{و} \quad \dot{\overrightarrow{\mu_\rho}} = \dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta}} \qquad [18\text{-III}]$$

إيجاد السرعة في المعلم القطبي:

لدينا شعاع الموضع هو $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \rho\overrightarrow{\mu_\rho}$ لأن المتحرك يكون دوما على المحور $\overrightarrow{O\rho}$ الذي يحمل شعاع الوحدة $\vec{\mu}\rho$. ونحن درسنا سابقا أن السرعة هي مشتق شعاع الموضع

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (\dot{\rho\overrightarrow{\mu_\rho}})$$

لدينا مما سبق $\dot{\overrightarrow{\mu_\rho}}$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \rho\dot{\overrightarrow{\mu\rho}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta}} \qquad [19\text{-III}]$$

ونلاحظ للسرعة مركبتان واحدة قطرية $\overrightarrow{\mu_\rho}$ والثانية عرضه مع $\overrightarrow{\mu_\theta}$

حيث $v_\theta = \rho\dot{\theta}$ و $v_\rho = \dot{\rho}$

إيجاد التسارع في المعلم القطبي

لدينا شعاع السرعة $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \underbrace{\dot{\rho}}_{v_\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \underbrace{\rho\dot{\theta}}_{v_\theta}\overrightarrow{\mu_\theta}$

والتسارع هو مشتق السرعة $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ومنه $\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{OM}^2}{dt^2} = \left(\dot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta}\right)$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \dot{\rho}\dot{\overrightarrow{\mu_\rho}} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \rho\dot{\theta}\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}}$$

لدينا $\dot{\overrightarrow{\mu_\rho}} = \dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta}$ و $\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\rho}$

يصبح التسارع كالتالي $\vec{a} = \ddot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{\mu_\rho}$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{\mu_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{\mu_\theta}} \qquad [20\text{-III}]$$

نلاحظ أن التسارع له مركبتان واحدة قطريه مع $\overrightarrow{u_\rho}$ والثانية عرضية مع $\overrightarrow{\mu_\theta}$

حيث $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ و $a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$

شدة التسارع $\vec{\mathbf{a}}$

$$\boxed{a = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)^2}} \qquad [21\text{-III}]$$

حالة خاصة من الدراسة بالمركبات القطبية هي حالة الحركة الدائرية $\rho = R$

فتصبح السرعة $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \underbrace{\dot{\rho}}_{v_\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \underbrace{\rho\dot{\theta}}_{v_\theta}\overrightarrow{\mu_\theta}$

بما أن R= constante فإن $\rho = R$ $\dot{R} = 0$

ومنه $\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta}$

أما التسارع a بما أن $\dot{R} = 0$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}\vec{u}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$R\dot{\theta}^2 = a_N = a_\rho$ حيث a_N يعبر على التغير في حامل السرعة

$R\ddot{\theta} = a_\theta = a_T$ حيث a_T يعبر على تغير شدة السرعة v

حيث a_N التسارع ألناظمي

a_T التسارع المماسي

الحركة الدائرية المنتظمة

لدينا $\rho = R = Ct$ و $\theta = wt$

$\dot{\theta} = w$ و $\ddot{\theta} = 0$ و $\dot{\rho} = 0$ $\boxed{v_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0}$

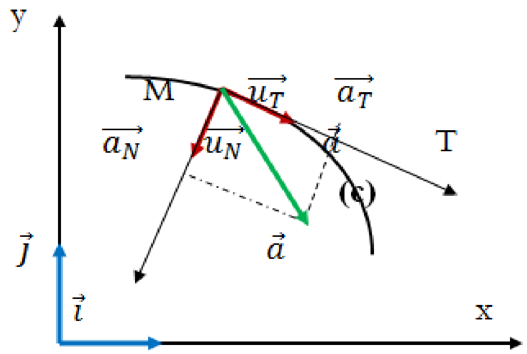
ومنه يصبح

ومركبات التسارع تصبح كالتالي. $\boxed{a_N = R\dot{\theta}^2 \quad \text{و} \quad a_T = 0}$

3-7-III مركبات الحركة المستويه في معلم فرينت:

لتكن حركة مسارها (c)أنظر الشكل (12-III) حيث مركز هذا المعلم مرتبطين بالمتحرك مركزه M ومحوريهما $\overrightarrow{MT}$ المماسي و $\overrightarrow{MN}$ الناظمي.

ليكن $\overrightarrow{u_T}$ و $\overrightarrow{u_N}$ الشعاعين للوحدة للمحور المماسي والمحور الناظمي



شكل(12-III) المعلم القطبي

ولهذا نكتب التسارع في هذا المعلم بالعلاقة [22-III]

$$\boxed{\vec{a} = a_T\overrightarrow{u_T} + a_N\overrightarrow{u_N}}$$

حيث $a_T = \frac{dv}{dt}$ و $a_N = \frac{v^2}{R}$ التسارعين لهما علاقة بالسرعة v

إذا كان الانتقال العنصري هو ds فإن شعاع الموضع هو $ds\overrightarrow{u_T}$

شدة السرعة $v = \frac{ds}{dt}$.

8-III الحركة في الفضاء

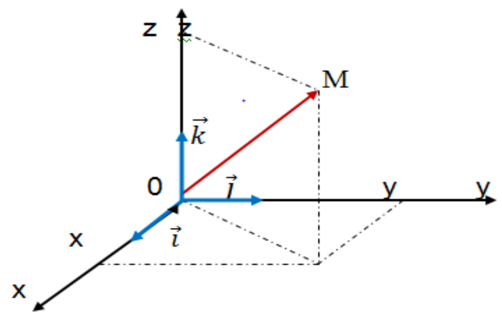
عندما يكون لدينا متحرك في الفضاء الذي يتميز بثلاثة أبعاد فإننا لدراسة هذه الحركة نستعمل معلم كارتزي فضائي أو معلم اسطواني أو معلم كروي.

1-8-III دراسة الحركة بالإحداثيات الكارتزيه

ليكن متحرك في الفضاء فإن نحدد موضعه M في معلم كارتزي $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

أنظر الشكل (13-III)

فإن شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



شكل (13-III)

يمثل المعلم الفضائي

سرعة المتحرك

لدينا السرعة هي مشتق شعاع الموضع.

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

فهي مركبات السرعة على المعلم الكارتزي

تسارع المتحرك $\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{OM}^2}{dt^2}$ [23-III]

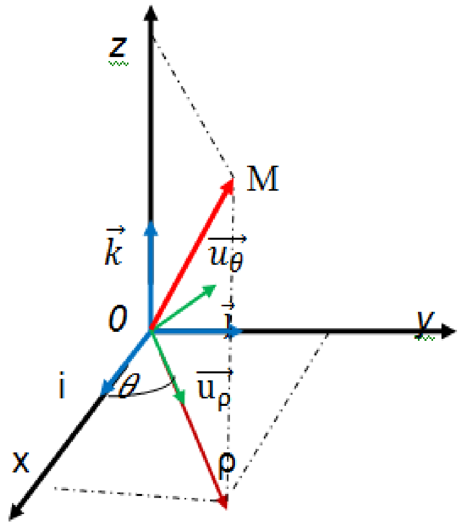
$$\boxed{\vec{a} = \frac{dx^2}{dt^2}\vec{i} + \frac{dy^2}{dt^2}\vec{j} + \frac{dz^2}{dt^2}\vec{k}}$$

حيث $a_x = \frac{dx^2}{dt^2}$ و $a_y = \frac{dy^2}{dt^2}$ و $a_z = \frac{d^2}{dt^2}$

III-8-2 دراسة الحركة في المعلم الاسطواني:

ليكن متحرك في الفضاء فإننا نستطيع تحديد موضعه في معلم اسطواني

$\overrightarrow{0M} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$ أ نظر الشكل(14-III)



شكل (14-III) يمثل المعلم الاسطواني

العلاقة التي بين أشعة الوحدة للمعلم الكارتزي والاسطواني.

$$\overrightarrow{\mu_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\mu_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\mu_z} = \vec{k}$$

فإن شعاع الموضع في المعلم الاسطواني $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{\mu_\rho} + z\vec{k}$ وتصبح في المعلم الكارتزي

$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$ والانتقال العنصر $\overrightarrow{ds}$

حيث $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \quad {}^2 + dz^2$

سرعة المتحرك في المعلم الاسطواني:

سرعة المتحرك هي دوما مشق شعاع الموضع

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \rho\dot{\overrightarrow{\mu_\rho}} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \dot{z}\vec{k}$$

نلاحظ أن للسرعة ثلاث مركبات $\dot{z} = v_z$ و $\rho\dot{\theta} = v_\theta$, $\dot{\rho} = v_\rho$

حيث v_ρ السرعة القطرية

v_θ السرعة العرضية

v_z السرعة العلوية

وشدة السرعة تعطى بالعلاقة [24-III]

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2}}$$

تسارع الحركة في المعلم الاسطواني:

التسارع دوما هو مشتق السرعة $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \dot{\rho}\dot{\overrightarrow{\mu_\rho}} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \rho\dot{\theta}\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\overrightarrow{\mu_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{\mu_\rho} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_\rho}} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_\theta}} + \ddot{z}\vec{\boldsymbol{k}}} \quad [25\text{-III}]$$

فإن لتسارع ثلاث مركبات

المركبة القطرية $a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$

المركبة العرضية $a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$

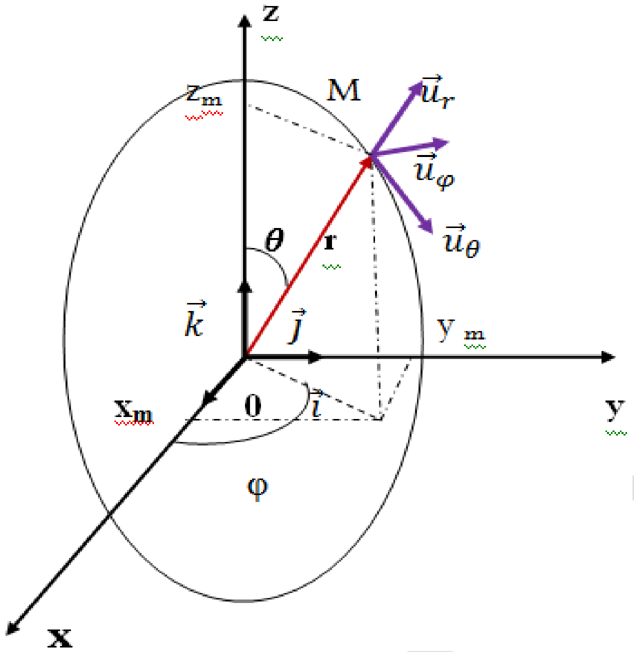
المركبة العلوية $a_z = \ddot{z}$

3-8-III دراسة الحركة في الفضاء في معلم كروي

عندما يكون لدينا متحرك في الفضاء فإننا نستطيع دراسة الحركة في معلم فضائي أنظر الشكل (15-III)

شعاع الموضع في معلم الكروي $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{\mu_r}$

أشعة الوحدة في المعلم الكروي هي



شكل (15-III) يمثل المعلم الكروي

العلاقة بين أشعة الوحدة للمعلم الكروي والمعلم الكارتزي

$$\overrightarrow{\mu_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\mu_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\mu_\rho} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

الانتقال العنصري

$$ds^2 = dr^2 + (r\sin\theta\,d\varphi)^2 + (rd\theta)^2$$

شعاع السرعة

لدينا السرعة هي مشتق شعاع الموضع

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{r}\overrightarrow{\mu_r} + r\dot{\overrightarrow{\mu_r}}$$

بعد اشتقاق u_r نتحصل على العلاقة التالية[26-III]

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{\mu_r}} = \dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{k} + \dot{\varphi}\sin\theta\left(-i\sin\varphi + j\cos\varphi\right)}$$

$$\dot{\overrightarrow{\mu_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{\mu_\varphi}$$

نعوض $\dot{r}$ و $\dot{\overrightarrow{\mu_r}}$ في علاقة السرعة فتصبح

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{\mu_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{\mu_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{\mu_\varphi}$$

فنلاحظ أن شعاع السرعة $\vec{v}$ في المركبات الكروية بدلالة $\overrightarrow{\mu_r}$, $\overrightarrow{\mu_\theta}$, $\overrightarrow{\mu_\varphi}$ وإذا أردنا معرفة شعاع السرعة في المعلم الكارتزي ما علينا إلا أن نعوض $\overrightarrow{\mu_r}$, $\overrightarrow{\mu_\theta}$, $\overrightarrow{\mu_\varphi}$ بدلالة $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ في شعاع السرعة فتحصل على السرعة في المعلم الكارتزي

طويلة شعاع السرعة في المعلم الكروي تعطى بالعلاقة التالية [27-III]

$$\boxed{v = \sqrt{(\dot{r})^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + (r\sin\theta\,\dot{\varphi})^2}} \qquad [27\text{-III}]$$

شعاع التسارع في المعلم الكروي

نشتق شعاع السرعة $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{\mathrm{dt}}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\overrightarrow{\mu_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \dot{\varphi}r\sin\theta\,\overrightarrow{\mu_\varphi}\right]$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\overrightarrow{\mu_r} + \dot{r}\dot{\overrightarrow{\mu_r}} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + r\dot{\theta}\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}} + \ddot{\varphi}r\sin\theta\,\overrightarrow{\mu_\rho} + \dot{\varphi}\dot{r}\sin\theta\,\overrightarrow{\mu_\varphi}$$
$$+ \dot{\varphi}r\dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{\mu_\omega} + \dot{\varphi}r\sin\theta\,\dot{\overrightarrow{\mu_\varphi}}$$

نعوض $\dot{\overrightarrow{\mu_r}}$ و $\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}}$ و $\dot{\overrightarrow{\mu_\varphi}}$ بما يعادلها فنتحصل على العلاقة التالية [28-III]

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\rho}^2 sin^2\theta\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_r}} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_\theta}}\\ + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_\varphi}}\end{aligned}}$$

فنلاحظ أن للتسارع له ثلاث مركبات a_r و a_θ و a_φ

تمرين تطبيقي

جسم يتحرك في معلم كروي حيث $r = 2t^2$ و $\theta(t) = 3t$ و $\varphi(t) = 2t - 1$

1-أعط شعاع الموضع لهذا المتحرك.

2-أعط سرعة المتحرك في المعلم الكروي.

3-أعط عبارة التسارع للمتحرك في المعلم الكروي.

الحل:

1-شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\overrightarrow{\mu_r}$

2-شعاع السرعة $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{\mu_r} + \dot{\overrightarrow{\mu_r}}$

بما أن $\dot{r} = 4t$

و $\dot{\overrightarrow{\mu_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{\mu_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{\mu_\varphi}$

فإن شعاع السرعة يصبح $\vec{v} = 4t\overrightarrow{\mu_r} + 2t^2(3\overrightarrow{\mu_\theta} + 2\sin(3t)\,\overrightarrow{\mu_\varphi})$

$$\vec{v} = \underbrace{4t}_{v_r}\,\overrightarrow{\mu_r} + \underbrace{6t^2}_{v_0}\,\overrightarrow{\mu_\theta} + \underbrace{4t^2\sin(3t)}_{v_\varphi}\,\overrightarrow{\mu_\varphi}$$

3-شعاع التسارع

نشتق شعاع السرعة للحصول على شعاع التسارع $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{\mu_r} + 4t\dot{\overrightarrow{\mu_r}} + 12t\overrightarrow{\mu_\theta} + 6t^2\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}} + 8t\sin(3t)\,\overrightarrow{\mu_\varphi} + 12t^2\cos(3t)\,\overrightarrow{\mu_\varphi}$$
$$+4t^2\sin(3t)\,\dot{\overrightarrow{\mu_\varphi}}$$

ثم نعوض $\dot{\overrightarrow{\mu_r}}$ و $\dot{\overrightarrow{\mu_\theta}}$ و $\dot{\overrightarrow{\mu_\varphi}}$ بما يعادلها فتصبح عبارة التسارع كالتالي:

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{\mu_r} + 4t\left(3\overrightarrow{\mu_\theta} + 2\sin(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi}\right) + 12t$$
$$+ 6t^2\left(3\overrightarrow{\mu_r} + 2\cos(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi}\right) + 8t\sin(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi}$$
$$+ 12t^2\cos(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi}$$
$$+ 4t^2\sin(3t)\left(\dot{\varphi}\sin(3t)\overrightarrow{\mu_r} - \dot{\varphi}\cos(3t)\overrightarrow{\mu_\theta}\right)$$

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{\mu_r} + 12\overrightarrow{\mu_\theta} + 8t\sin(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi} + 12t\overrightarrow{\mu_\theta} + 18t^2\overrightarrow{\mu_r}$$
$$+ 12t^2\cos(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi} + 8t\sin(3t)\overrightarrow{\mu_r} + 12t^2\cos(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi}$$
$$+ 8t^2 sin^2(3t)\overrightarrow{\mu_\varphi} - t^2\sin(3t)\cos(3t)\overrightarrow{\mu_\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = {} & [4 + 18t^2 + 8t^2 + sin^2(3t)]\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_r}} \\ & +[12 + 12t - 8t^2\sin(3t)\cos(3t)]\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_\theta}} \\ & +[16t\sin(3t) + 24t^2\cos(3t)]\overrightarrow{\boldsymbol{\mu_\varphi}}\end{aligned}}$$

تمرين :

نعتبر نقطة مادية M كتلتها m تتحرك في معلم ثابت $R(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبره غاليلي . هذه النقطة تسير وفق مسار في المستوي أنظر الشكل بطريقة يكون فيها تسارع الحركة يمر دوما بنقطة ثابتة O

(حركة ذات تسارمركزي) أنظر الشكل.

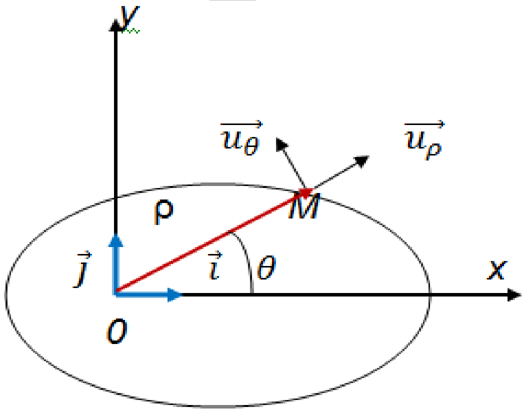
نقول عن حركة ذات تسارع مركزي عندما يكون تسارعها $\vec{a}$ منطبقا على شعاع الموضع في أي زمن t . *وتحقق العلاقة التالية* $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$.

ليكن الشعاع $\vec{c}$ *حيث* $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$

1)- بين أن $\vec{C}$ شعاع ثابت

2)- أعطي عبارة C بدلالة ρ و $\dot{\theta}$

3)- استنتج أن $2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta} = 0$



الحل

1)- البرهان عن $\vec{C}$ شعاع ثابت

إذا كان $\vec{c}$ شعاع ثابت فإن مشتق هذا الشعاع يساوي $\vec{0}$

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}$$

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ من المعطيات و $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

ومنه $\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{0}$ إذن $\vec{C}$ شعاع ثانت

2)- إيجاد C بدلالة ρ و $\dot{\theta}$

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \rho\, \vec{u}_\rho \wedge (\dot{\rho}\, \vec{u}_\rho + \rho\, \dot{\theta}\, \vec{u}_\theta)$$

$$= \rho^2\, \dot{\theta}\, \vec{u}_z \qquad C = \rho^2\, \dot{\theta}$$

3)- إيجاد التسارع $\vec{a}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\, \vec{u}_\rho + \dot{\rho}\, \dot{\theta}\, \vec{u}_\theta + \dot{\rho}\, \dot{\theta}\, \vec{u}_\theta + \rho\, \ddot{\theta}\, \vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}^2\, \vec{u}_\rho$$

$$= (\ddot{\rho} + \rho\, \dot{\theta}^2)\, \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\, \vec{u}_\theta$$

بما أن التسارع من المعطيات يكون منطبق مع $\vec{u}$ إذن المركبة مع $\vec{u}_\theta$ تكون معدومة

إذن $2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0$

9-III الحركة النسبية

مقدمة:

عندما يكون لدينا راكبان في قطار والقطار في المحطة. عندما ينطلق القطار من المحطة ويكون الراكب الأول جالسا والراكب الثاني ينتقل في رواق القطار.

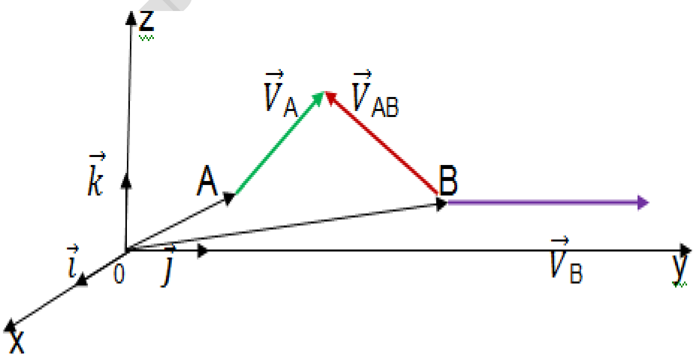
فإن نقول بأن الراكب الأول ساكنا بالنسبة للقطار والثاني في حالة حركة بالنسبة للقطار ولكن نعود ونقول بأن الراكبان والقطار متحركون بالنسبة للمحطة. ومن هنا نستنتج بأن الحركة والسكون هما مفهومان نسبيان. فالراكب الأول قلنا عنه بأنه ساكن بالنسبة للقطار ثم عدنا وقلنا بانه متحرك بالنسبة للمحطة.

مثال:

قارب يشق نهرا على العرض فصاحب القارب يرى نفسه يسير بحركة مستقيمة وماء النهر يجري على طول النهر فهو يحمل القارب والشاهد على ضفة النهر يرى القارب يسير مجنحا فهذا ناتج على جمع السرعتين سرعة النهر وسرعة القارب.

السرعة النسبية لمتحركين:

عندما يكون لدينا متحركان A و B في معلم (o, x, y, z) فإن لـ A موقع في اللحظة t وسرعته $\overrightarrow{v_A}$ وللمتحرك B موقع وسرعته $\overrightarrow{v_B}$ أنظر الشكل (16-III)



شكل (16-III) يمثل السرعتين

السرعة للمتحرك B هي $\overrightarrow{v_B}$ حيث $\overrightarrow{v_B} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}$ بالنسبة للمبدأ O.

وسرعة المتحرك A هي $\overrightarrow{v_A}$ حيث $\overrightarrow{v_A} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}$ بالنسبة للمبدأ O.

وسرعة المتحرك A بالنسبة للنقطة B.

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

حيث $\overrightarrow{V_{AB}} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$

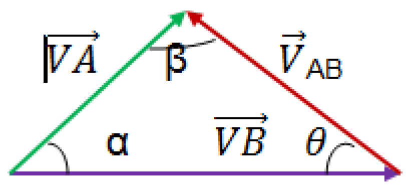
إذن $$\frac{d\overrightarrow{v_{AB}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v_A}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{V_B}}{dt}$$

$$\overrightarrow{VAB} = \overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B}$$

إذن سرعة A بالنسبة لـ B هو الطرح بين سرعة المتحرك A و المتحرك B.

إذن السرعة $\overrightarrow{v_{AB}}$ هي محصلة الطرح السرعة للمتحرك A و المتحرك B.

فيصبح لدينا مثلث متكون من ثلاث سرعات $\overrightarrow{v_A}$و$\overrightarrow{v_B}$ و $\overrightarrow{v_{AB}}$ حسب الشكل (17-III)



شكل (17-III) يمثل مثلث السرعات

إذا كان المثلث له ثلاث زوايا α, β وθ فإن الزوايا وأطوال السرعات (أو شدة السرعات الثلاثة) مرتبطة ببعضها البعض.

حيث مساحة المثلث تعطى بالجداء الشعاعي:

$$S = \frac{1}{2}\|\vec{V}_A \wedge \vec{V}_B\| = \frac{1}{2}\|\vec{V}_A \wedge \vec{V}_{AB}\| = \frac{1}{2}\|\vec{V}_B \wedge \vec{V}_{AB}\|$$

$$S = \frac{1}{2}V_A V_B \sin\beta = \frac{1}{2}V_A V_{AB}\sin\alpha = \frac{1}{2}V_B V_{AB}\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}\ V_A\ V_B \sin\beta = \frac{1}{2}V_A V_{AB}\sin\alpha$$

ومنه $V_B \sin\beta = V_{AB}\sin\alpha$ إذن $\left.\frac{V_B}{\sin\alpha} = \frac{V_{AB}}{\sin\beta}\right|$

و $\frac{1}{2}V_A V_B \sin\beta = \frac{1}{2}V_B V_{AB}\sin\theta$

و $V_A \sin\beta = V_{AB}\sin\theta$ إذن $\frac{V_A}{\sin\theta} = \frac{V_{AB}}{\sin\beta}$

وفي الأخير تصبح العلاقة كالتالي:

$$\boxed{\frac{V_A}{\sin\theta} = \frac{V_{AB}}{\sin\beta} = \frac{V_B}{\sin\alpha}}$$

مثال:

قارب يسير على نهر حيث سرعة القارب $v_A = 30km/h$ وسرعة النهر هي $v_B = 20km/h$ حدد السرعة النسبية للقارب بالنسبة للنهر في الحالتين الآتيتين:

أ-القارب يسير مع اتجاه سرعة مياه النهر.

ب-القارب يسير عكس اتجاه سرعة مياه النهر.

ج-عندما تكون بين سرعة القارب وسرعة النهر $\alpha = 30^\circ$ أحسب سرعة القارب بالنسبة للنهر.

الحل:

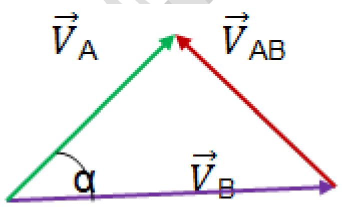
أ-حساب سرعة القارب بالنسبة للنهر: $\overrightarrow{V_{AB}} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$

$\overrightarrow{V_{AB}} = \frac{(30-20)km}{h} = 10km/h$ فسرعة القارب هي: $10km/h$

ب-حساب سرعة القارب بالنسبة للنهر: $\overrightarrow{V_{AB}} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_B}$

$\overrightarrow{V_{AB}} = 50km/h$

ج- $\overrightarrow{V_{AB}} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$



$$\boxed{\left\|\overrightarrow{V_{AB}}\right\|^2 = {V_A}^2 + {V_B}^2 - 2V_AV_B\cos 30^\circ}$$

$$\boxed{V_{AB} = \sqrt{{V_A}^2 + {V_B}^2 - 2V_AV_B\cos 30^\circ}}$$

$$V_{AB} = \sqrt{30^2 + 20^2 - 2 * 30 * 20\cos 30^\circ}$$

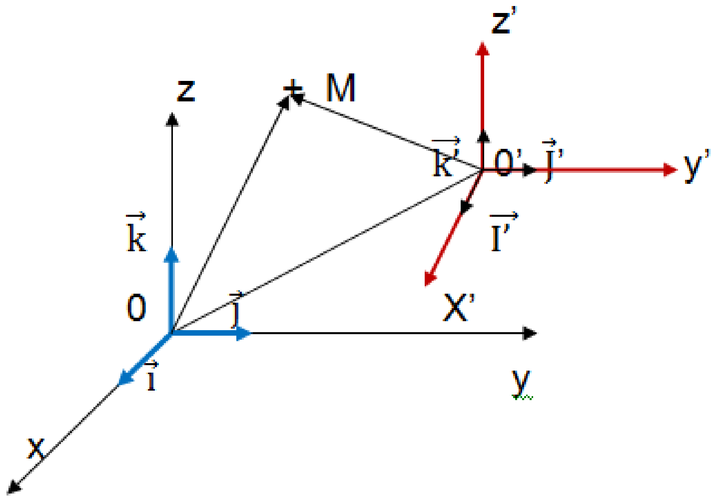
$$V_{AB} = \sqrt{1300 - 1200 \times 0.87}$$

$$\boxed{V_{AB} = 16km/h}$$

دراسة جسم مادي يتحرك في معلم نسبي ومطلق

دراسة حركة جسم في معلم متحرك يسمى معلم نسبي R_r وهذا المعلم يتحرك بالنسبة لمعلم ثابت يسمى المعلم المطلق R_a

شكل(18-III)



الشكل(18-III) يمثل المعلم المطلق والنسبي

لدراسة حركة يجب تحديد الموضع المتحرك بالنسبة للمعلم ولذى يجب تحديد الموضع بالنسبة للمعلم النسبي $\overrightarrow{O'M} = \vec{r}\ R_r$ والموضع بالنسبة للمعلم المطلق $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\ R_a$

حيث $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\underbrace{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}} = \underbrace{x_{o'}\vec{\imath} + y_{o'}\vec{\jmath} + z_{o'}\vec{k}}_{\overrightarrow{OO'}} + \underbrace{x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}}_{\overrightarrow{O'M}}$$

العلاقة بين السرعتين المطلقة والنسبية:

باشتقاق شعاع الموضع نتحصل على السرعة

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

نلاحظ بأن o′ متحرك بالنسبة لــ o و x', y', z' متغيرات بالنسبة لــo

- وأن $\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}'$, $\vec{k}'$ هي أيضا متغيرة بالنسبة لــ o

حيث $v_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}}$ السرعة المطلقة

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$ تسمى سرعة الجر

$v_r = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$ تسمى السرعة النسبية

ملاحظة

إذا كانت M ثابتة بالنسبة للمعلم النسبي R_r فإن $\boldsymbol{\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = 0}$

فتصبح $v_r = 0$

ومنه $\vec{v}_a = \vec{v}_e$

وإذا كان المعلم R_r ثابتا بالنسبة للمعلمR_a

فإن $\vec{v}_{\mathrm{e}} = \vec{0}$

وتصبح العلاقة $\vec{v}_a = \vec{v}_r$

وإذا كانت M متحركة بالنسبة لـــ R_r و R_r متحرك بالنسبة لــــR_a

فإن $\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

العلاقة بين التسارعات:

نشتق السرعة $\vec{v}_a$ بالنسبة للزمن فتحصل على التسارع المطلق $\vec{a}_a$

ومنه

$$\vec{a}_a = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}^2}{dt^2}$$

$$= \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}}_{a_e} + \underbrace{i'\frac{d^2x'}{dt^2} + j'\frac{d^2y'}{dt^2} + k'\frac{d^2z'}{dt^2}}_{a_r} + \underbrace{2\frac{dx'di'}{dt^2} + 2\frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}}_{a_c}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$$

ومنه نلاحظ أن هناك عنصر إضافي يسمى تسارع كوريو ليس

$\overrightarrow{a_a}$ يسمى التسارع المطلق

$\overrightarrow{a_e}$ يسمى التسارع الجر

$\overrightarrow{a_r}$ يسمى التسارع النسبي

$\overrightarrow{a_c}$يسمى تسارع كوريو ليس بنسبة إلى العالم Gaspard Coriolis وضعه سنة 1832.

ينعدم تسارع كوريو ليس

- إذا كانت M ساكنة بالنسبة للمعلم النسبي بحيث تصبح $\frac{dz'}{dt} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = 0$
- إذا كان المعلم R_r في حالة حركة إنسحابية $\frac{di'}{dt} = \frac{dj'}{dt} = \frac{dk'}{dt} = 0$

- عندما يكون المعلم R_r يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ شدتها ω فإن إشتقاق أشعة الوحدة $\frac{di'}{dt}$

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega}\, \Lambda\, \vec{i'} \quad , \quad \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega}\, \Lambda\, \vec{j'} \quad \text{و} \quad \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega}\, \Lambda\, \vec{k'}$$

فتصبح لدينا السرعة المطلقة

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + x'\left(\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{i'}\right) + y'\left(\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{j'}\right) + z'\left(\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{k'}\right) + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + \left(\vec{\omega}\,\Lambda\, x'\vec{i'}\right) + \left(\vec{\omega}\,\Lambda\, y'\vec{j'}\right) + \left(\vec{\omega}\,\Lambda\, z'\vec{k'}\right) + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + \vec{\omega}\,\Lambda\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right) + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v_a}} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}}_{\vec{v_e}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'}_{\vec{v_r}}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

حيث سرعة الجر

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}}$$

والسرعة النسبية

$$\boxed{\vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'}$$

التسارع المطلق هو مشتق السرعة المطلقة أي أن $\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}$

وعندما نشتق السرعة المطلقة نتحصل على التسارع المطلق.

$$\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a_a}} = + \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{oo'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}}\Lambda\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\Lambda\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{oo'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{OM} + \vec{v}_r) + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' + \vec{\omega}\Lambda\vec{v}_r$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{oo'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\Lambda\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\Lambda\vec{v}_r + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' + \vec{\omega}\Lambda\vec{v}_r$$

$$\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a_a}} = \frac{d^2\overrightarrow{oo'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\Lambda\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' + 2\vec{\omega}\Lambda\vec{v}_r$$

نبين أطراف هذه المعادلة وفقة المعادلة التالية[29-III]

$$\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\overrightarrow{a_a}} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{a_e} + \underbrace{i'\frac{d^2x'}{dt^2} + j'\frac{d^2y'}{dt^2} + k'\frac{d^2z'}{dt^2}}_{a_r} + \underbrace{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}_{a_c}$$

التسارع المطلق له ثلاث مركبات تسارع الجر والتسارع النسبي وتسارع كوريوليس وفق المعادلات التالية.

-تسارع الجر

$$\boxed{\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{oo\prime}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge O'M + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}}$$

- التسارع النسبي

$$\boxed{\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'}$$

– تسارع كوريوليس

$$\boxed{\overrightarrow{a_c} = 2\,\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}}$$

ملاحظة

شعاع السرعة $\vec{\omega}$ هو شعاع عمودي على مستوي الدوران وإذا كان الدوران مركب فإن $\vec{\omega}$ تمثل محصلة شعاع الدوران الأول $\overrightarrow{\omega_1}$ و الدوران الثاني $\overrightarrow{\omega_2}$

حيث

$$\boxed{\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2}}$$

الفصل (VI) الديناميك

مقدمة:-

الديناميك هو دراسة حركة الأجسام وعلاقتها مع مسببات الحركة (القوى أو عزم القوى).

عموميات

1-VI المراجع المطلقة والغا ليليه

المراجع هي عبارة عن مجموعة مراقبين يقومون بقياس

الموضع والزمن.

.المرجع المطلق هو مرجع نعتره ساكنا بينهما مرجع غاليلى هو مرجع يكون في حالة حركه مستقيمة منتظمة بالنسبة مرجع مطلق أي يتحرك بسرعة ثابتة .

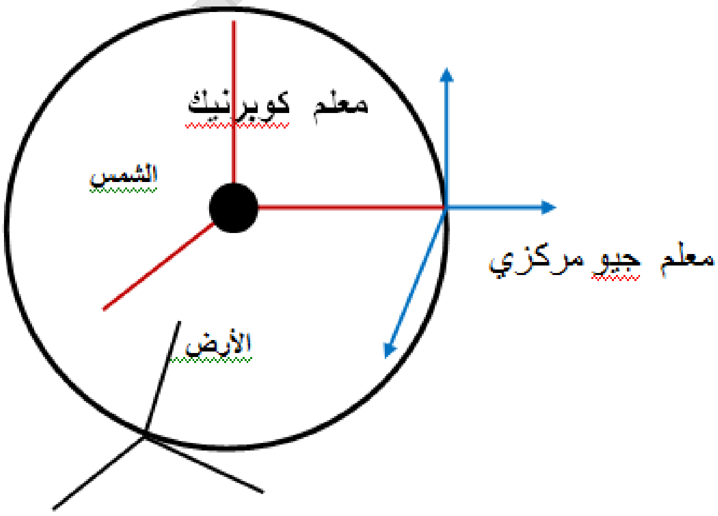
المرجع يعرف باسمه مثل (مرجع الأرض؛المرجع الجيومركزي)

أو بصفة عامة المرجع $\mathcal{R}\ (O\ .x\ .y.\ z)$

معلم كوبونيك

هو معلم مركزه مركز الشمس ومحاوره الثلاثة متجهه نحو ثلاث نجوم ثابتة أنظر الشكل

(1-VI)



شكل (1-VI) يمثل معلم كوبونيك

2-VI مفهوم الكلتلة العطالية.

عندما ندفع جسما بقوه $\overrightarrow{F1}$ فإن هذا الجسم يتحرك حركة مستقيمة متغيرة بانتظام أي يكسب تسارع $\overrightarrow{a1}$ وعندما ندفعه بقوة $\overrightarrow{F2}$ فإن الجسم يكشب تسارع $\overrightarrow{a2}$, فنلاحظ أن حاصل قسمة كل شدة قوة على شدة التسارع المناسب لها يساوي قيمة ثابتة .

$$\frac{F1}{a1} = \frac{F2}{a2} = \text{ثابت}$$

نسمي هذا الثابت بالكتلة العطالية للجسم المدروس ونرمز لهاذ الرمز m وعلى هذا فإن شدة القوة المطبقة على الجسم تتناسب طردا مع شدة التسارع أي أن $F=ma$ وذلك للحركة المستقيمة والحركات المنحنية .

فلاحظ أيضا كلما كانت m كبيرة يجب تطبيق قوة أكبر لتحريك الجسم. و m مقدار سمي يعبر عن ممانعة الجسم لتغيير حركته .

الكتلة m لا تتغير في مكانيك نيوتن. وفي الميكانيك النسبي (أي عندما تكون السرعة كبيرة جدا) ألكتلة تعطى بالعلاقة التالية

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}}$$

- حيث

m الكتلة الموافقة للسرعة v

m_0 كتلة الجسم في حالة السكون

c سرعة الضوء $c = 3\text{x}10^8$ m/s

3 -VI مفهوم القوة :

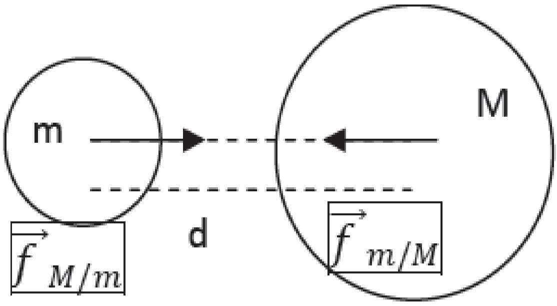
في الفيزياء القوة تعني تجاذب بين جسمين أو بين جمله من الأجسام. توجد أربعة تجاذبان كونيه أو تأثيرات كونية وهي تأثير الجاذبية الكونية ، التأثير الكهروطيسي التأثير النووي الضعيف ، التأثير النووي القوي .تأثير الجاذبية يعد إحدى الإنجازات التي قدمها نيوتن لوصف القوه في الطبيعة.

قوة تأثير الجذب الكوني

إذا كان لدينا جسمان A و B و كتلتهما M و m والبعد بين مركزيهما هو d فإن كل جسم يخضع

لقوة تأثير الجسم الثاني و هي قوة جذب أنظر الشكل (2-VI)

شكل يمثل قوة الجذب (2-VI)



هذه القوة تعطى بالعلاقة التالية: [1-VI]

$$\boxed{\vec{f}_{M/m} = -\vec{f}_{m/M} = G\frac{M.m}{d^2}\vec{u}}$$

حيث

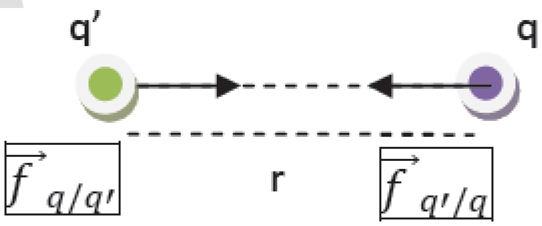
$\vec{U}$ -شعاع وحده.

M و m الكتلتان المتجاذبتان

- G ثابت $G= 6.67\text{x}10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$

قوة التأثير الكهروطيسي

التأثير المتبادل بين شحنتين كهربائيتين **q** و **q'** يتناسب عكسيا مع مربع البعد بين مركزي هاتين الشحنتين و يتناسب طردا مع الشحنتين و يعطى بالعلاقة التالية [2-VI]



$$\boxed{\vec{f}_{q/q'} = -\vec{f}_{q'/q} = k\frac{q.q'}{r^2}\vec{u}} \quad [2\text{-VI}]$$

حيث

$\vec{u}$ – شعاع وحده.

K – ثابت $K = 9x10^9$ (SI)

q و q' الشحنتان المتجاذبتان

التأثير النووي القوي:

هو تأثير متبادل بين نوبات الذرة (أي بين النيترونات و البروتونات) مع بعضهما البعض داخل النواة. حيث هذا التأثير يكون قويا حتى نهمل أمامه قوة التنافر بين البروتونات المشحونة بالموجب .

التأثير النووي القوي بقوة تأثير متبادل يجري فيها تبادل جسيمات هي البيونات π pions

و جسيمات أخرى أكبر كتلة منها لها طاقة كامنة متناسبة مع $\frac{e^{-r/r0}}{r^2}$

التأثير النووي الضعيف:

التفاعلات النووية و انقسام النواة ، ينتج عنه إشعاع مثل $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$

الإشعاع β:

حيث يتحول نيرون إلى بروتون و إلكترون و جسم آخر يدعى النيترينو المضاد

(anti neutrino)

و التأثيرات التي تحصل بين هذه الجسيمات تدعى بالتأثير النووي الضعيف.

4-VI_ قوانين نيوتن الثلاث:

- **شعاع كمية الحركة:**-

كمية الحركة هي مقدار شعاعي و نرمز له ب $\vec{p}$ يربط بين الكتلة العطالية m و $\vec{v}$ السرعة ويعطى بالعلاقة التالية: [3-VI] $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$

وحدة كمية الحركة في الجملة الدولية (SI) هي : $kg.m.s^{-1}$

في جملة مادية تتكون من ى n نقطة مادية فإن شعاع كمية الحركة

يعطى بالعلاقة التالية [4-VI]

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i} \qquad [4\text{-}VI]$$

قانون نيوتن الأول (نص مبدأ العطالة)

نص مبدأ العطالة: توجد على الأقل جملة مرجعية واحدة متميزة تكون فيها حركة أي نقطة مادية معزولة مستقيمة منتظمة نسمي هذه الجملة المرجعية بأنها غاليلية أو عطالية.

و بصفة عامة كل معلم يكون في حالة حركة مستقيمة منتظمة أو ساكن فهو معلم غاليلي أو معلم عطالي ويحقق العلاقة التالية [5-VI]

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \ ou\ bien\ \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}} \qquad [5\text{-}VI]$$

قانون نيوتن الثاني (المبدأ الأساسي للتحريك)

نص المبدأ الأساسي في التحريك:

في أي جملة مرجعية غاليلية تكون محصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية تساوي إلى مشتق كمية الحركة بالنسبة للزمن في تلك الجملة حيث محصلة القوى الخارجية نرمز لها ب $\sum \mathbf{F}_{ext}$

المبدأ الأساسي للتحريك [6-VI] $\frac{d\vec{p}}{dx} = \sum \vec{F}_{ext}$

نعوض $\vec{p}$ ب $m\vec{v}$ فتصبح العلاقة كالتالي [7-VI] $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

ملاحظة: هذا القانون يسمح لنا بمعرفة طبيعة الحركة.

- قانون نيوتن الثالث:

مبدأ تساوي الفعل و رد الفعل

نص مبدأ الفعل و رد الفعل (إذا أثر جسم A على جسم B) بقوة $\vec{F}$ فإن B يؤثر على A بنفس القوة حيث تعاكسها في الاتجاه و تساويها في الشدة. $\vec{\mathbf{F}}_{A/B} = -\vec{\mathbf{F}}_{B/A}$

و تكون كمية الحركة لهذين الجسمين مصونة .

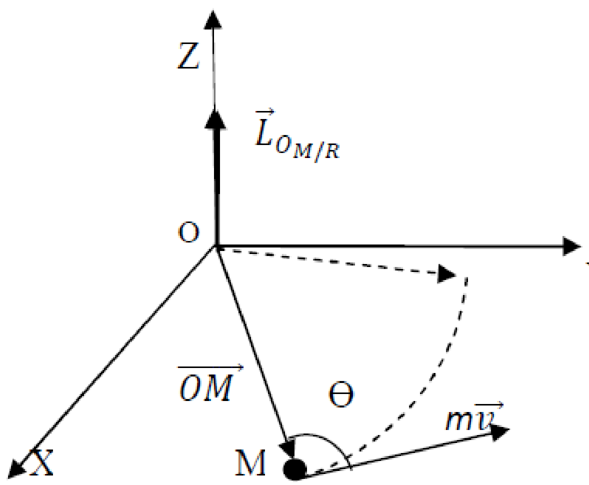
العزم الحركي:

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك في معلم غاليلي $\mathcal{R}$ مبدأه O نعرف العزم الحركي لـ M بالنسبة ل O بأنه المقدار الشعاعي التالي ونرمز له $\overrightarrow{L_o}_{M/R}$ هذا المعلم هو معلم فضائي كارتزي أنظرالشكل (3-VI)

$\overrightarrow{OM}$ شعاع الموضع بالنسبة ل 0 و $\vec{v}$ سرعة النقطة المادية

حيث العزم الحركي يعطى بالعلاقة التالية وهي الجداء الشعاعي للموضع في شعاع كمية الحركة.

$$\overrightarrow{L_o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \qquad [8\text{-VI}]$$



شكل (3-VI) يمثل شعاع $\overrightarrow{L_o}$ (x)

طويلة شعاع العزم الحركية $\left|\overrightarrow{L_o}\right| = m \left|\overrightarrow{OM}\right| . \left|\vec{v}\right| \sin\theta$

$\overrightarrow{OM}$ شعاع الموضع بالنسبة لـO

$m\vec{v}$ كمية الحركة وθ الزاوية المحصورة بين شعاع كمية الحرة وشعاع الموضع.

وحدة العزم الحركي هي $Kg\ m^2/s^{-1}$

عزم القوة:

لتكن نقطة مادية M كتلتها m تتحرك في معلم غاليلي$\mathcal{R}\,(O\,.x\,.y.\,z)$ و $\vec{F}$ قوة مؤثرة في M نعرف عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لـ O بالعلاقة التالية (33) $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}\,(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

و يسمى أيضا بالعزم الديناميكي للقوة $\vec{F}$

ملاحظة : كل قوة حاملها يمر بـ 0 فإن عزمها يكون معدوم . $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}\,(\vec{F}) = 0$

نظرية العزم الحركي:

عدما نشتق العزم الحركي بالنسبة للرمز لدينا $\overrightarrow{L_o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

مشتق العزم الحركي $\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{d}$

لدينا $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$

وأن $m\frac{d\vec{v}}{d} = \vec{F}$ و منه $\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}$

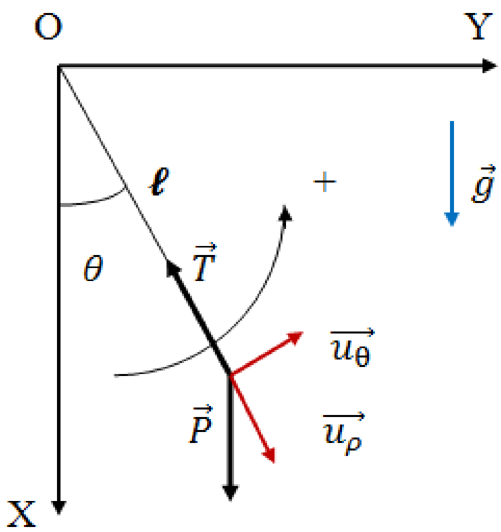
$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}\quad \text{تسمى نظرية الطاقة الحركية}}$$

تمرين تطبيقي النواس البسيط

كتلة نقطية m معلقة بخيط عديم التمدد طوله ℓ مشدود في نقطة O أنظر الشكل . نزيح هذه النقطة m عن وضع توازنها و نتركها و حالها. لدراسة حركة هذا النواس نطبق نظرية العزم الحركي

الحل

تخضع النقطة المادية M إلى قوتين توتر الخيط $\vec{T}$ و الثقل $\vec{P}$.



العزم الحركي للنواس $\overrightarrow{L_o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

ندرس الجملة في المعلم القطبي:

$$OM = \ell\,\overrightarrow{u_\rho}$$

$$\vec{F} = \vec{p} + \vec{T} \qquad \vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u\theta} \qquad \text{mgsin}\,\theta$$

$\vec{p} =$

$$\vec{T} = -T\overrightarrow{u\rho}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}$$

نحسب عزم القوتين $\vec{P}$ و $\vec{T}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{T}) = \vec{0}$$ لان $\vec{T}$ يمر بمحور الدوران

وعزم القوة $\vec{P}$ هو

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \ell\,\overrightarrow{u\rho} \wedge (\text{mgcos}\,\theta\,\vec{u}\rho - \text{mg sin}\,\theta\,\vec{u}\theta)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) = -\ell\,\text{mg sin}\,\theta\ \vec{k}$$

العزم الحركي $\vec{L}_o$ للنواس هو $\vec{L}_o = \ell\,\overrightarrow{u\rho} \wedge m\,\ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u\theta}$

$$\vec{L}_o = m\,\ell^2\,\dot{\theta}\,\vec{k}$$

مشتق العزم الحركي $\dfrac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = m\,\ell^2\,\ddot{\theta}\vec{k}$

نساوي بين مشتق العزم الحركي وعزم القوى المطبقه على الكتلة.

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}\vec{k} = -\ell\, mg\sin\theta\;\vec{k}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية $\boxed{\ddot{\theta} = -g\sin\theta\;\ell}$

حالة خاصة: إذا كانت θ صغيرة فإن $\sin\theta = \theta$

في الاهتزازات الصغيرة وتصبح المعادلة التفاضلية كالتالي.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

نضع $\omega^2 = g/l$

يصبح حلها من الشكل $\theta = \theta_o\sin(\omega t + \alpha)$

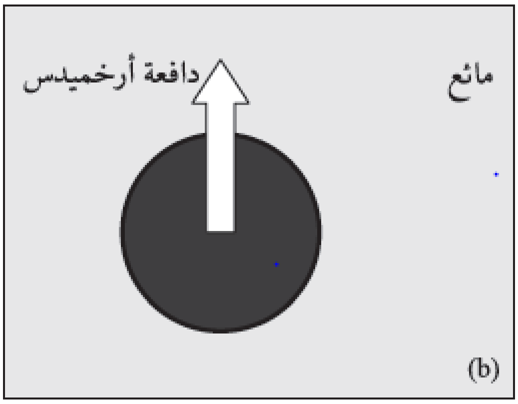
أمثلة عن بعض القوى:

-دافعة أرخميدس :

عندما يتحرك جسم في مائع (أي وسط سائل أو غازي) فإن هذا الجسم يتعرض إلى قوة تعاكس حركته تسمى بدافعة أرخميدس هذه القوة شدتها تساوي إلى ثقل المائع و مقدارها يعطى بالعلاقة التالية : $\vec{F} = \rho v g\,\vec{k}$

حيث - ρ الكتلة الحجمية للمائع .

- V حجم الجسم الذي يشق المائع
- g الجاذبية الأرضية



- قوة الاحتكاك للمائع :

عندما يتحرك جسم في مائع فإن جزيئات المائع تصطدم بسطح الجسم المتحرك فينتج عمن ذلك قوة ممانعة تسمى قوة الاحتكاك تعطى بالعلاقة التالية: $\vec{F} = -k\vec{v}$

حيث **k** ثابت.

في حالة جسم كروي فإن $k = 6\pi.r\,\eta$.

η- معامل اللزوجة للمائع

η- معامل اللزوجة يزداد بارتفاع درجة الحرارة في الغازات

η- معامل اللزوجة ينخفض بارتفاع درجة الحرارة في السوائل

r- نصف قطر الجسم الكروي

و قوة الاحتكاك شدتها $F=k.v$ في حالة السرعات الصغيرة مقارنة بسرعة الصوت و إذا زادت السرعة عن سرعة الصوت أي في السرعات الكبيرة فإن شدة قوة الاحتكاك تتناسب طردا مع مربع السرعة أي $F=k.\ v^2$

الجدول التالي يبين معامل اللزوجة η لبعض السوائل و الغازات معطى بالبواز P Poise

حيث S= second , Pa=pascal , P=Pa.s

الغاز	η(Poise)	السائل	η (Poise)
الهواء	1.8×10^{-4}	أسيتون	0.0032
الآزوت	1.8×10^{-4}	الكحول	0.012
بخار الماء	1.3×10^{-4}	دم الإنسان	0.04
الأكسجين	2×10^{-4}	غليسيرين	14.9
الميثان	2×10^{-4}	الزئبق	0.016
الهليوم	1.9×10^{-4}	الزيت	1 الى7
		الماء	0.01

قوة الاحتكاك الصلب :

عندما نحاول تحريك جسم مادي M فوق جسم آخر, فالجسم المادي في البداية لا ينزلق و عندما نبذل جهدا أكبر فإنه ينزلق. نفسر ذلك بوجود قوة احتكاك لدى محاولتنا تحريك الجسم M . و عندما يتحرك الجسم فإنه تنتج زيادة في الحرارة بين سطحي الجسمين و من هنا يتم ضياع في الطاقة. هذه الطاقة الضائعة ناتجة عن انكسار النتوءات التي توجد في السطحين المتلامسين حيث في حالة السكون تكون النتوءات متداخلة في الفراغات الموجودة على السطح المقابل.عند التحريك تنكسر الروابط بين الجزيئات أو الذرات المكونة لهذه النتوءات أو تهتز هذه الجزيئات فالانكسار أو الاهتزاز يتولد عليه حرارة.

شدة قوة الاحتكاك ألسكوني تعطى بالعلاقة التالية [9-VI]

$$F= \mu_c .N \quad \text{أو} \quad F= \mu_s .N \qquad [9\text{-}VI]$$

μ_s معامل الاحتكاك ألسكوني. μ_c معامل الاحتكاك الحركي و N شدة القوة الناظمة على السطح

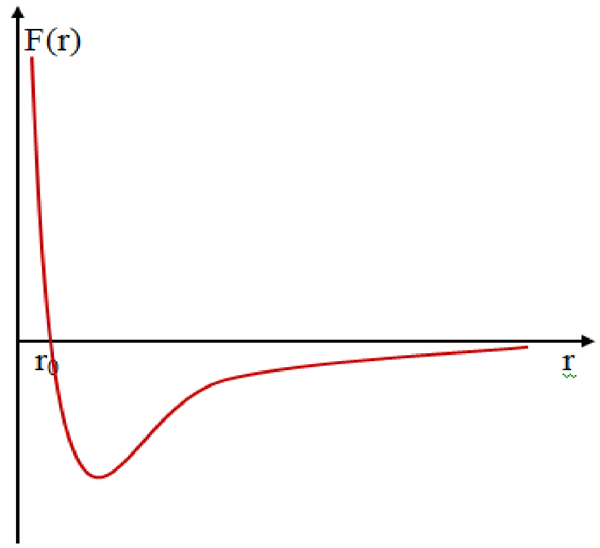
القوة الجزيئية :

هي قوى تبادل بين جزيئات أو ذرات الأجسام المادية. هذه القوة لا نجدها في الميكانيكا الكلاسيكي ولكن نجدها في مكانيك الكم. بحيث كلما اقتربت المسافة الفاصلة بين مركزي الجزئيين أو الذرتين فان قوة تنافر بين الالكترونات وتأثير النواتين أو الأنوئة في حالة الجزيء تبقى محجوبة بفعل الغمامة الالكترونية . وهي قوة تجاذب بين القطب الموجب والسالب في ثنائي القطب المنحنى البياني لشدة هذه القوة معطى بالشكل (4-VI)

شدة هذه القوة تعطى بالعلاقة التالية [10-VI]

$$\vec{F}=24\varepsilon \left(\frac{\sigma^{12}}{r^{13}} - \frac{\sigma^{6}}{r^{7}} \right) \vec{u_r} \qquad [10\text{-}VI]$$

- ε و σ مقداران ثابتان .



الشكل (4-VI) يمثل شدة القوة بدلالة المسافة

هذه القوة في حدود r_0 . إذا قربنا الجزيئات من بعضها البعض أو أبعدناها بمسافة صغيرة جدا

فإن شدة هذه القوة تعطى بالعلاقة التالية [11-VI] $F = -k\,(r - r_o)$

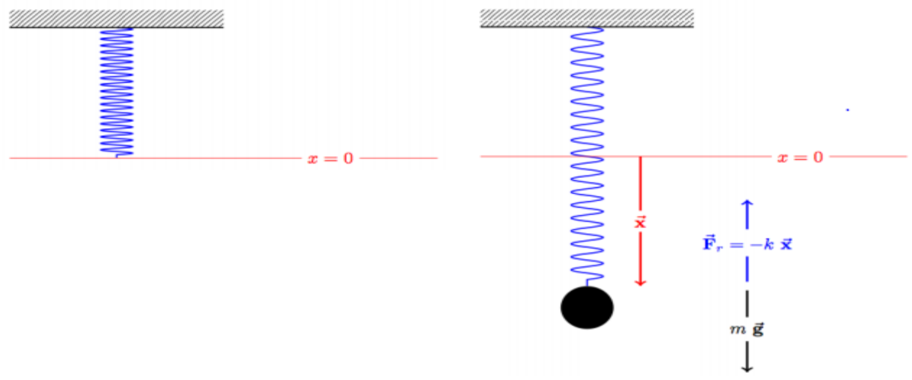
هذه القوة تسمى بقوة إرجاع حيث (-k) هو ميل المنحنى عند النقطة $r = r_o$ أي أن هذه القوة

تناسب مع الإزاحة $\Delta r = r - r_o$ وتعرف باسم قانون.(Hooke)

قوة المرونة :

حسب قانون Hooke $\vec{F} = -k\,(r - r_o)\,\vec{u}$ نجدها أيضا في النابض المرن فإذا دفعنا نابض في حالة السكون وأردنا تقليص طوله بالضغط على النابض فان النابض يرد علينا بقوة إرجاع في اتجاه وضع التوازن . وإذا جعلناه يستطيل عن وضع التوازن فان النابض

يريد إرجاعنا إلى وضع التوازن أنظر الشكل (5-VI)



شكل(5-VI)

*حيث k ثابت يسمى ثابت المرونة .

L طول النابض بعد الإزاحة

L_o طول النابض في حالة السكون ومنه و $L - L_o = x$ مقدار الإزاحة عن وضع السكون.

قوى العطالة

لقد درسنا سابقا الحركة النسبية وعلمنا أن التسارع المطلق $\vec{a}_a$ هو مجموع التسارع النسبي $\vec{a}_r$ وتسارع الجر $\vec{a}_e$ وتسارع كاريوليس $\vec{a}_c$.

حيث التسارع المطلق يعطى بالعلاقة التالية [12-VI] $\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$

$\vec{a}_a$ تسارع المتحرك بالنسبة للمعلم العطالي $\mathcal{R}$.

$\vec{a}_r$ تسارع المتحرك بالنسبة للمعلم النسبي أو المتحرك $\mathcal{R}'$.

$\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_a$ ومنه مجموع القوى في المعلم العطالي

أما مجموع القوى في المعلم النسبي $\vec{F}_r = m\,\vec{a}_r$

حيث $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$

نعوض $\vec{a}_r$ بما يعادلها في المعلم النسبي فتصبح العلاقة كالتالي [13-VI]

$$\boxed{\vec{F}_r = \vec{F}_a + \vec{F}_e + \vec{F}_c} \qquad [13\text{-}VI]$$

$\vec{F}_r = m\vec{a}_a - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$ ومنه $\vec{F}_r = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

- حيث $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ تسمى قوة عطالة الجر. و $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ تسمى قوة عطالة كوريوليس

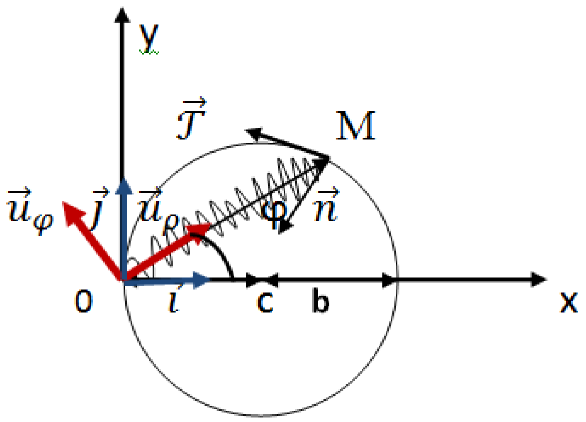
نجد قوى العطالة مثلا في المصعد والسيارة لهذا نربط حزام الأمان

تمرين تطبيقي

ليكن $(0, x\,y\,z)$ R معلم مطلق معرف بأشعة وحدة $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و $R1(0,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,k)$ معلم نسبي.

في المستوي $(x\,0\,y)$ حلقة مركزها c ونصف قطرها b تكون مثبتة حيث c على المحور $\overrightarrow{0x}$

أنظر الشكل نقطة مادية M كتلتها m تنتقل على الحلقة دون إحتكاك وهي معلمة في المعلم R بشعاع الموضع $0M = 2b\cos\varphi\vec{u}_\rho$ حيث $\frac{\pi}{2} > \phi > -\frac{\pi}{2}$ النقطة المادية مشدودة بنابض ثابت مرنته k وطوله وهو فارق b مثبت في 0. هذه النقطة المادية متأثرة بثلاثة قوى قوة النابض وقوة الثقالة $\vec{P} = -mg\,\vec{k}$ وقوة رد الفعل $\vec{R}$. نعتبر معلم فرينت $(0,\vec{\mathcal{T}},\vec{n},\vec{k})$ المثبت في النقطة المادية M كما في الشكل.



1) أحسب السرعة ل M بالنسبة للمعلم R.
2) إستنتج الشعاع $\vec{\mathcal{T}}$ المماس للمسار ويعبر عن شعاع الوحدة في معلم فرينت.
3) أحسب الشعاع $\vec{n}$ العمودي على المسار.
4) مثل شعاع الدوران $\vec{\omega}$ ثم أعطي عبارته ليدخل في إيجاد التسارعات.
5) أعطي عبارات التسارع النسبي ، تسارع الجر، تسارع كوريوليس ثم إستنتج السارع المطلق.
6) أعطي عبارات القوى المطبقة على M.
7) أكتب عبارة المبدأ الأساسي للتحرك على المعلم المطلق.
8) أكتب عبارة المبدأ الأساسي للتحرك على المعلم النسبي.
9) أسقط المبدأ الأساسي للتحرك من المعلم النسبي إلى معلم فرينت. ثم أعطي المعادلة التفاضلية الممكنة.

الحل

1) حساب السرعة المطلقة $\vec{v}$.

السرعة المطلقة هي مشتق شعاع الموضع في المعلم المطلق.

لدينا $\overrightarrow{OM} = 2b\cos\varphi\,\vec{u}_\rho$ ومنه $\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$\vec{v}_a = -2b\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{u}_\rho + 2b\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$.

$\vec{v}_a = 2b\dot{\varphi}[-\sin\varphi\,\vec{u}_\rho + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi]$ لأن $\dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\varphi}\;\vec{u}_\varphi$

نعوض $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\varphi$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

2) إستنتاج الشعاع $\vec{\mathcal{T}}$

لدينا $\vec{\mathcal{T}} = \frac{\vec{v}_a}{\|\vec{v}_a\|}$ إذن $\vec{\mathcal{T}} = -\sin\varphi\,\vec{u}_\rho + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$

3) الشعاع الناظم $\vec{n}$ عمودي $\vec{\mathcal{T}}$ وكذالك $\vec{k}$ إذن $\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{T}}$

$$\vec{n} = \vec{k} \wedge [-\sin\varphi\,\vec{u}_\rho + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi]$$

$$\vec{n} = -\sin\varphi\,\vec{u}_\varphi - \cos\varphi\,\vec{u}_\rho$$

4) شعاع الدوران $\vec{\omega}$

شعاع الدوران عمودي على المستوي (x 0 y) وإتجاهه في إتجاه $\vec{k}$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$$

5) - حساب التسارع النسبي $\vec{a}$.

التسارع النسبي هو إشتقاق شعاع الموضع مرتين دون إشتقاق شعاع الوحده $\vec{u}_\rho$ ومنه $\vec{a}_r$

تصبح $\vec{a}_r = \frac{d^2(2b\cos(\phi))}{dt^2}\,\vec{u}_\rho$ $\vec{a}_r = -2b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\varphi)\,\vec{u}_\rho$

- تسارع الجر $\vec{a}_e$

لينا

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

$$\vec{a}_e = \ddot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM} + \dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge (\dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM})$$

$$\vec{a}_e = \ddot{\varphi}\,\vec{k} \wedge 2b\cos\varphi\vec{u}_\rho + \dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge (\dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge 2b\cos\varphi\vec{u}_\rho)$$

$$\vec{a}_e = 2b\ddot{\varphi}\cos\varphi\vec{u}_\varphi - 2b\dot{\varphi}^2\cos\varphi\vec{u}_\rho$$

تسارع كوريوليس $\vec{a}_c$

لدينا $\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ إذن $\vec{a}_c = 2\,\dot{\varphi}\,\vec{k} \wedge (-2b\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{u}_\rho)$

$$\vec{a}_c = -4b\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

6) – القوى المطبقة على M

$\vec{P} = -mg\,\vec{k}$ قوة الثقالة

$\vec{R} = R_n\,\vec{n} + R_k\,\vec{k}$ قوة رد الفعل

$\vec{F} = -k\,(2b\cos\phi - b)\,\vec{u}_\rho$ قوة رد فعل النابض

$\vec{F}_{ie} = -m\,\vec{a}_e = -m\,2b(\ddot{\varphi}\cos\varphi\vec{u}_\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi\,\vec{u}_\rho)$ قوة عطالة الجر

$\vec{F}_{ic} = -m\,\vec{a}_c = -m\,4b\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{u}_\varphi$ قوة عطالة كوريوليس

7) عبارة المبدأ الأساسي للتحرك على المعلم المطلق.

$\sum \vec{F} = m\vec{a}_a$ ومنه $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = m\vec{a}_a$

8) عبارة المبدأ الأساسي للتحرك على المعلم النسبي.

لدينا $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = m\vec{a}_a$ و $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ عندما نعوض $\vec{a}_a$ بما يعادلها

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$ إذن $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$

ومنه $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}_r$

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}_r$$

9) أسقاط المبدأ الأساسي للتحرك من المعلم النسبي إلى معلم فرينت

الإسقاط على المحور $\overrightarrow{\ \ }$ فإن المركبات مع $\vec{k}$ و $\vec{n}$ إسقاطها يكون معدوم وتبقى $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\varphi$ لها إسقاط.

$$\vec{\mathcal{T}} = -\sin(\varphi)\vec{u}_\rho + \cos(\varphi)\vec{u}_\varphi$$

حيث

$$\vec{n} = -\cos(\varphi)\vec{u}_\rho - \sin(\varphi)\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{u}_\rho = -\sin\varphi\,\vec{\mathcal{T}} - \cos\varphi\,\vec{n}$$

$$\vec{u}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{\mathcal{T}} - \sin\varphi\,\vec{n}$$

لدينا $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + m\vec{F}_{ic} = m\vec{a}_r$

هذه المعادلة لها مركبات مع $\vec{u}_\rho$ ، $\vec{u}_\varphi$ ، $\vec{k}$ و $\vec{n}$ ولكن إسقاطات $\vec{k}$ و $\vec{n}$ تكون معومة و نعوض

$$\vec{u}_\rho = -sin\varphi\,\vec{\mathcal{T}} \quad \text{و} \quad \vec{u}_\varphi = cos\varphi\,\vec{\mathcal{T}}$$

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} + \vec{F}_{ie} + m\vec{F}_{ic} = m\vec{a}_r$ نعوض كل القوى بما يعادلها في المعلم $\vec{\mathcal{T}}$

$$\vec{F}_{ic} = -m\,4b\dot{\varphi}sin\varphi\,cos\varphi\,\vec{\mathcal{T}}$$

$$\vec{F}_{ie} = -m\,2bcos\varphi(\ddot{\varphi}\,cos\varphi + \dot{\varphi}^2\,sin\varphi\,)\vec{\mathcal{T}}$$

$$\vec{F} = -\,kb\,(2cos\phi - 1\,)\,sin\varphi\,\vec{\mathcal{T}}$$

$$\vec{F} = -\,kb\,(2cos\phi - 1\,)\,sin\varphi\,\vec{\mathcal{T}}$$

$$m\,\vec{a}_r = m2b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\varphi)\,sin\varphi\,\vec{\mathcal{T}}$$

بالإسقاط على المحور $\vec{\mathcal{T}}$ نصل إلى المعادلة التالية

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{2m}(1-2cos\varphi\,)sin\varphi = 0$$

إذا كانت φ صغيرة جدا فإن $sin\varphi = \varphi$ و $cos\varphi = 1$ بالتغريب

نعوض $sin\varphi$ و $cos\varphi$ في المعادلة السابقة فتصبح

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{2m}\varphi = 0$$

الفصل (V) العمل والطاقة

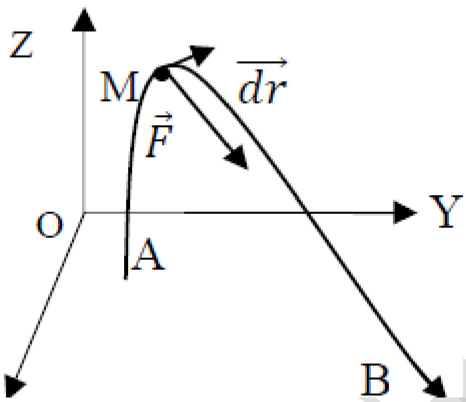
V -1 عمل قوة

تعريف

عمل قوة $\vec{F}$ مطبقة على جسم M نقطي لتحريكها من موضع A إلى الموضع B هو الجداء السلمي لشعاع القوة في بشعاع الانتقال وإذا كان الانتقال عنصر $d\vec{r}$ أنظر الشكل (1-V)فإن العمل يعطى بالعلاقة التالية [1-V]

$$dW = \vec{F}(M)|_{R}.\overrightarrow{dr} \qquad (1\text{-V})$$

والعمل الكلي لنقل الجسم من الموقع B إلى A هو W



شكل(1-V)عمـل قـوة أثناء الانتقال منA إلى B .

عمل القوة $W_1(\vec{F})$ تعطى بالعلاقة التالية [2-V]

$$W_1(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

حيث $d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$ و $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$

نعوض $d\vec{r}$ و $\vec{F}$ في العلاقة [2-V] فتصبح كالتالي

$$W_1(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx + \int_{Y_A}^{y_B} F_y\,dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z\,dz$$

$$W_1(\vec{F}) = F_x\int_{x_A}^{x_B} dx + F_y\int_{Y_A}^{y_B} dy + F_z\int_{z_A}^{z_B} dz \qquad [3\text{-V}]$$

ملاحظة: عند ما تكون القوة عمودية على الانتقال في كل مراحل الانتقال فإن عمل هذه القوة يكون معدوم.

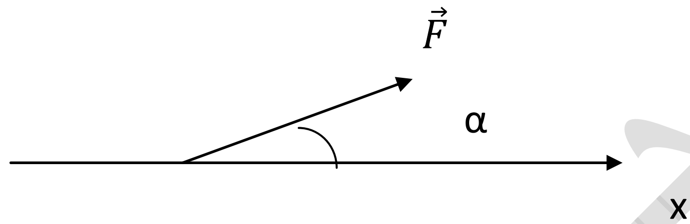
- عند ما يكون عمل القوة $W_1(\vec{F}) > 0$ فإن العمل يسمى عمل محرك .

- عند ما يئون عمل القوة $W_1(\vec{F}) < 0$ فإن العمل يسمى عمل مقاوم .

* وحدة العمل في الجملة الدولية SI الحول Joule .

عمل قوة ثابتة على طريق مستقيم

عندما ينتقل جسما نقطيا M على طريق مستقيم بتطبيق قوة ثابتة F وتصنع زاوية **α** مع الطريق المستقيم أنظر الشكل (2-V)



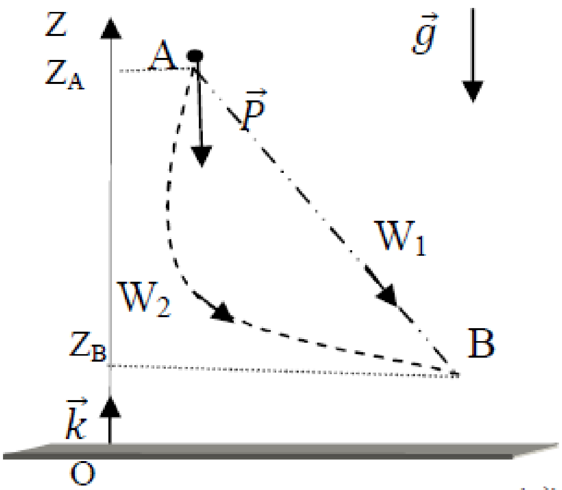
شكل(2-V)عمل قوة في مسارأفقي

$$\boxed{W_{A---B} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha} \qquad [4\text{-}V]$$

عندها نقول عمل القوة يتلخص في عمل إسقاط القوة على الانتقال وفقط .

عمل قوة الثقالة

عندما تنقل جسما M في الفضاء من نقطة A إلى B والجسم يخضع إلى قوة الثقاله فقط وليكن المعلم الذي ندرس فيه معلم كارتكزي أنظر الشكل (3-V)فإن عمل الثقل $W_{A-B}(\vec{P})$



شكل(3-V)عمل قوة الثقالة من A إلى B

$$W_{A-B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot \overrightarrow{dr} = -P\int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A)$$

ملاحظة :عمل قوة الثقل يساوي شدة الثقل في المسافة التي تفصل بين المستوي الأفقي الأول والمستوي الأفقي الثاني الذي يصل إليه الثقل لا يهمه المسار الذي يسلكه .

-إذا كان الجسم نازلا فإن : $W_{A---B}(\vec{P})$ محرك.

-إذا كان الجسم صاعدا فإن : $W_{A---B}(\vec{P})$ مقاوم .

V- 2 الاستطاعة :

- عندما نقوم بنقل جسم M من نقطة A إلى النقطة B فإننا لا نراعي للزمن ولا نعطيه أية قيمة لان العمل هو مقدار فيزيائي سلمي . سواء أنجز هذا العمل في ساعة أو عدة ساعات أو نصف ساعة . ولكن نحتاج إلى السرعة في إنجاز العمل .

عندما نقوم بعمل W خلال مدة زمنية t فإن حاصل قسمة العمل على الزمن المستغرق لإنجازه يسمى بالاستطاعة ونرمز لها ب : $P=W/t$

*وحدة الاستطاعة هي : j/s = واط

$$\boxed{1watt=1j/s}$$

*ملاحظة : الكيلو واط ساعي هي وحدة قياس للطاقة الكهربائية المستهلكة

$$1\ kwatt = 1000\ j/s \times 3600\ s = 3.6 \times 10^6\ joule = 3.6\ M\ J$$

ولكن $P = \frac{W}{t} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{r}}{t}$ و $\frac{\vec{r}}{t} = \vec{v}$ ومنه $\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}}$ (5-IIV)

V -3 نظرية الطاقة الحركية :

عند ما يتحرك جسم M كتلته m تحت محصله عدة قوة $\vec{F}$. ولنحسب العمل العنصري dW لهذه القوى .

$$dw = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad [5\text{-}V]$$

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك لدينا $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ و $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

بقيمتيهما في العلاقة [5-V] $\vec{F}$ ونعوض $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ إذن

$dW = = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,.\,\vec{v}\,dt$ فتصبح كالتالي

$$dW = m\,v\,dv \quad [6\text{-}V]$$

$\int dW = m\int v\,dv$ نكامل رفي المعادلة <===> $W = \frac{1}{2}\,m\,v^2$

فإن هذا العمل يسمى بالطاقة الحركية ونرمز له ب Ec عوضا عن W

$$Ec = \frac{1}{2}\,mv^2$$

وعند ما تنتقل نقطه مادية M من A إلى B فالعمل المنجز $W_{A\text{---}B}$

$$\boxed{W_{A\text{---}B} = Ec_B - Ec_A = \frac{1}{2}\,m{v_B}^2 - \frac{1}{1}\,m{v_A}^2} \qquad [7\text{-}V]$$

تسهى هذه العلاقة بنظرية الطاقة الحركية أي عمل قوة أو محصلة قوي لنقل جسم M من الموضع A إلى الموضع يساوي التغير في الطاقة الحركية من الموضع A إلى الموضع B

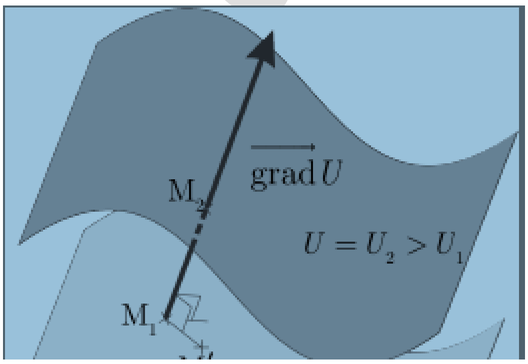
V- 4 الطاقة الكامنة : -

74-1- تدرج تابع سلمي ($\overrightarrow{grad}$)

لتكن الدالة السلمية (U(x.y.z. تابعا في الحالة العامة للإحداثيات الثلاثة x .y .z نعرف تدرج التابع السلمي (U(x .y. z ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{grad}$ U(x .y .z) أو $\vec{\nabla}$U

إذا كانت الدالة (U(x .y. z عن سطح فإن $\vec{\nabla}$U يمثل الشعاع العمودي على السطح

حيث $\overrightarrow{gradU}$ =$\vec{\nabla}$U انظر الشكل(V-4) الذي يمثل الدالة (U(x .y. z.



الشكل(V-4) يمثل الدالة U

$\vec{\nabla}$ نابلا يعطى في المعلم الكارتزي كما يلي

$$\vec{\nabla} = \frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k}$$

$\vec{\nabla}$U يعطى بالعلاقة الشعاعية التالية في المعلم الكارتزي.

$$\boxed{\vec{\nabla}U(x.y.z) = \frac{dU(x.y.z)}{dx}\vec{\imath} + \frac{dU(x.y.z)}{dy}\vec{\jmath} + \frac{dU(x.y.z)}{dz}\vec{k}} \quad [8\text{-}V]$$

$\vec{\nabla}$ نابلا يعطى في المعلم الإ سطواني كما يلي

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{\nabla}$ نابلا يعطى في المعلم الكروي كما يلي

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

الطاقة الكامنة:

تعريف : الطاقة الكامنة والقوى المحافظة

لقد بينا سابقا أن عمل قوة الثقالة لا يتعلق بالمسار الذي تسلكه النقطة المادية M أثناء الانتقال من A إلى B.نقول بوجه عام عن قوة $\vec{F}$ أنها قوة محافظة (أو أنها مشتقة من طاقة كامنة) إذا كان عملها لا يتعلق بالمسار المتبع أثناء الانتقال .

نبرهن أنه يوجد تابع سلمي U(x ,y ,z) بحيث القوة المحافظة .

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,dU} \quad [9\text{-}V]$$

نسمي المقدار السلمي U(x ,y ,z) الطاقة الكامنة الموافقة للقوة المحافظة $\vec{F}$

- عمل هذه القوة عند انتقال عنصري $d\vec{r}$ هو dw

حيث : $dW = \vec{F}\,.\,d\vec{r}$

نعوض $\vec{F}$ و $d\vec{r}$ بما يعادلهما $d\vec{r} = dr.\vec{u}_r$ و $\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\,\vec{u}_r$ في dW

فتصبح $\vec{U}$ $\vec{u}$. dr.$\vec{u}_r$ $dW = -\frac{dU}{dr}$ ومنه $dW = -dU$

عندما تنتقل نقطة مادية M بتأثير هذه القوة المحافظة من النقطة **A** إلى النقطة B فإن عملها

هو $\int_A^B dW = -\int_A^B dU$ إذن $W_{A-----B} = U_A - U_B$

أي أن عمل القوة المحافظة يساوي تناقص الطاقة الكامنة

[10-V] $\boxed{W_{A-----B} = U_A - U_B = -\Delta U}$ $W_{A-----B} = U_A - U_B = -\Delta U$

تعريف ثاني للقوة المحافظة :

نقول عن قوة أنها محافظة إذا كان : $\overrightarrow{rot}\,.\,\vec{F} = \vec{0}$ أي $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

الطاقة الكامنة الثقالية :

لنبحث عن الطاقة الكامنة **U** الموافقة لقوة الثقالة $\vec{P}$ في المعلم الكارتيزي انظر الشكل(5-V)

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\,U$$

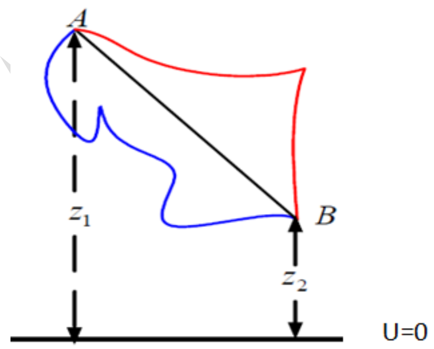
$\int dU = P\int dz$ <=== $dU = Pdz$ إذن $-P\vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ $U = mgz + c$

C يحدد بالشروط الإبتدائيه او المرجع المختار للطاقة الكامنه

نأخذ عند $Z=0$; $U=0$

ومنه

تسمى الطاقه الكامنه الثقاليه



الشكل(5-V)

درسنا سابقا ان عمل قوة محافظة

هو : $W = -\Delta U$ [11-V] $\boxed{W_{A---B} = mgz_A - mgz_B}$

ملاحظة : الطاقة الكامنة الثقالية تناقص أثناء النزول وتتزايد أثناء الصعود ، أثناء النزول يكون العمل محرك أثناء الصعود يكون العمل مقاوم.

الطاقة الكامنة المرونية :

عندما نشد نابض ثابت مرونته K إلى جسم صلب نقطي كتلته m فان النابض يؤثر عن الجسم كقوة إرجاع F

حيث : $\vec{F} = -k\, x\, \vec{i}$

إيجاد الطاقة الكامنة المرونية :

لدينا $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$ <====> $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}$

$-\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} = \vec{F} = -k\, x\, \vec{i}$ <===> $dU = kx\, dx$

نكامل الطرفين $\int dU = k\int x\, dx$ <===> $U = \frac{1}{2}kx^2 + c$

نأخذ : $U(0)=0$ إذن : $C = 0$

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}\, k\, x^2} \quad [12\text{-}V]$$

الطاقة الكامنة المرونيـة

الطاقة الكامنة للجاذبية :

عندما يكون لدينا جسمان منعزلان m_1 و m_2 و المسافة بين مركزيهما **r** فان .

m_1 تؤثر على m_2 و m_2 تؤثر على m_1 بقوة التجاذب الكوني

حيث : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$

$$\vec{F} = -G\frac{m_1.m_2}{r^2}\,\vec{u}_r$$

إيجاد الطاقة الكامنة :

$$\vec{F} = -G\frac{m_1.m_2}{r^2}\,\vec{u}_r = -\frac{\partial U}{\partial r}\,\vec{u}_r$$

$$dU = G\frac{m_1.m_2}{r^2}\,dr$$

الطاقة الكامنة للجاذبية الكونية [13-V]

$$\boxed{U(r) = G\frac{m_1.m_2}{r}}$$

الطاقة الكامنة الكهربائية

$$\boxed{U(r) = G\,\frac{q_1.q_2}{r}}$$

V- 5 الطاقة الميكانيكية:

درسنا سابقا نظرية الطاقة الحركية: بين نقطتين ، يساوي محصلة القوى بين هاتين النقطتين ، ولتكن هذه المحصلة هي محصلة القوى المحافظة ومحصلة القوى الغير المحافظة

وتصبح العلاقة كالتالي :

$$E_{cf} - E_{ci} = W\,(F_c) + W\,(F_{nc})$$

$W\,(F_c)$ عمل القوى المحافظة

$W\,(F_{nc})$ عمل القوي الغير محافظة

ولكن عمل القوى المحافظة درستاه سابقا ويساوي تناقص الطاقة الكامنة
أي أن عمل القوة المحافظة يساوي تناقص الطاقة الكامنة $W\,(F_c) = -\,\Delta U$

$$E_{cf} - E_{ci} = -\,\Delta U + W\,(F_{nc})$$

$$E_{cf} - E_{ci} + \Delta U = W(F_{nc})$$

$$E_{cf} - E_{ci} + U_f - U_i = W(F_{nc})$$

$$(E_{cf} + U_f) - (E_{ci} + U_i) = W\,(F_{nc})$$

نسمي الطاقة الميكانيكيۃ مجموع الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة $E_m = E_c + U$

الطاقة الميكانيكية النهائية $(E_{cf} + U_f)$

الطاقة الميكانيكية الابتدائية $(E_{ci} + U_i)$

نظرية الطاقۃ الميكانيكية :

التغير في الطاقة الميكانيكية بين موضعين يساوي إلى عمل القوى الخارجية

$$\boxed{\Delta E_m = W\,(F_{nc})}$$

المراجع

[1] ALAIN GIBAUD ET MICHEL HENRY, Cours de Physique Mécanique du Point, Dunod, Paris, 1999, 2007 pour la Seconde Edition.

[2] CLAUDE PASQUIER, Cours de mécanique S2-PoPS et L1, Universite d'Orsay, France, 2011– 2012.

[3] SALAH BELAZREG, PACES Physique UE3, 4e édition, EdiScience, Dunod Éditeur, France, 2014

[4] JEAN-MARIE BRÉBEC, TANIA CHABOUD, THIERRY DESMARAIS, ALAIN FAVIER, MARC MÉNÉTRIER, ET RÉGINE NOËL, Exercices et Problèmes 1re Année, Physique MPSI/PCSI/PTSI, Hachette Livre, Paris, France, 2010.

[5] MARIE-NOËLLE SANZ, ANNE-EMMANUELLE BADEL ET FRANÇOIS CLAUSSET, PHYSIQUE TOUT-EN-UN - 1re année, Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, France, 2002, 2003, 2008

[6] MICHEL HENRY ET NICOLAS DELORME, mini Manuel Mécanique du point Cours + Exos, Dunod, Paris, France, 2008.

[7] VINCENT DEMERY, Physique Résumé du cours en fiches MPSI-MP, Dunod, Paris, France, 2010.