

المنطق الرياضي

1) القضية المنطقية:

1-1: تعريف القضية

نسمى قضية منطقية كل جملة خبرية يمكن الحكم عليها بالصحة او الخطأ نرسم للقضية بأحرف مثل :

P,S,R,V....

مثال :

1440 > 2018 قضية صحيحة

2-1: جدول الحقيقة table de vérité

نرمز للقضية الصحيحة بالرمز 1 وللقضية الخاطئة بالرمز 0

الجدول التالي يسمى جدول الحقيقة للقضية P

| |
|---|
| P |
| 1 |
| 0 |

3-1: نفي القضية المنطقية

نفي القضية المنطقية P هو القضية المنطقية \bar{P}

والتي تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة

وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة

جدول الحقيقة للنفي هو:

| | |
|---|-----------|
| P | \bar{P} |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

مثال : نفي القضية ($3 \geq 1$) P: هو القضية ($3 < 1$) \bar{P} :

4-1: أدوات الربط المنطقي

1-4-1: الوصل

وصل القضيتين P و Q هو القضية التي نرمز لها بالرمز

$P \wedge Q$ (P و Q) والتي لا تكون صحيحة

إلا إذا كانت P و Q صحيحتين معا

2-4-1: الفصل

فصل القضيتين P و Q هو القضية التي نرمز لها بالرمز

$P \vee Q$ (P أو Q) والتي لا تكون خاطئة

إلا إذا كانت P و Q خاطئتين معا

3-4-1: الاستلزام

نسمى الاستلزام $P \Rightarrow Q$ القضية $\bar{P} \vee Q$

والتي لا تكون خاطئة إلا اذا كانت P صحيحة و Q خاطئة

4-4-1: التكافؤ المنطقي

نسمى القضية $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ تكافؤا منطقيا

ونرمز إليها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$

والتي لا تكون صحيحة إلا اذا كانت P و Q

صحيحتين معا أو خاطئتين معا

| P | Q | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|--------------|------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|-------------------|-------------------|-----------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

أمثلة :

1- (2018 مضاعف لـ 2) و ($\sqrt{5}$ عدد كسري) خاطئة

2- (2018 مضاعف لـ 2) أو ($\sqrt{5}$ عدد كسري) صحيحة

3- $3^0 = 3 \Rightarrow 15 < 3$ صحيحة

4- (تونس دولة عربية) $\Leftrightarrow (201=20+1)$ خاطئة

5-1: خواص الروابط المنطقية

لتكن P, Q, R ثلاث قضايا باستعمال جداول الحقيقة يمكن التأكد من صحة الخواص :

- $P \vee P \Leftrightarrow P$, $P \wedge P \Leftrightarrow P$, $\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P$ •
- (مبدأ عدم التناقض) $P \wedge \bar{P}$ خاطئة دوما •
- (مبدأ الثالث المرفوع) $P \vee \bar{P}$ صحيحة دوما •
- (التبديل) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$, $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ •
- (الفصل تجميحي) $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ •
- (الوصل تجميحي) $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ •
- (نفي الوصل) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$ •
- (نفي الفصل) $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$ •
- (العكس النقيض) $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ •

تمرين :

لتكن P و Q قضيتين

اثبت صحة ما يلي : $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$

الحل:

الطريقة 1: باستعمال جدول الحقيقة

الطريقة 2:

| P | Q | \bar{P} | $P \Rightarrow Q$ | $\bar{P \Rightarrow Q}$ | $P \wedge \bar{Q}$ |
|---|---|-----------|-------------------|-------------------------|--------------------|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$$\begin{aligned}\overline{P \Rightarrow Q} &\Leftrightarrow \overline{\bar{P} \vee Q} \\ &\Leftrightarrow \bar{\bar{P}} \wedge \bar{Q} \\ &\Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}\end{aligned}$$

2- الجمل المفتوحة والمكتمات

1-2: الجمل المفتوحة

نسمي جملة مفتوحة معرفة على المجموعة A كل جملة تحوي متغيرا أو أكثر بحيث تصبح قضية إذا أستبدل المتغير بأي عنصر من عناصر A ونرمز إليها بالرمز $P(x)$

أمثلة:

$P(x): x+5 = 4$ حيث x عدد حقيقي , جملة مفتوحة معرفة على \mathbb{R}
 $P(x,y) : x+y = 21$ حيث x و y عددين حقيقيين هي جملة مفتوحة ذات متغيريين

2-2: المكتمات

إذا كانت الجملة $P(x)$ صحيحة من أجل كل عنصر x من A نكتب : $\forall x \in A : P(x)$
إذا وجد على الأقل عنصر x من A بحيث تكون $P(x)$ صحيحة نكتب : $\exists x \in A : P(x)$
نسمي \forall بالمكتم الكلي ، ونسمي \exists بالمكتم الوجودي أو الجزئي

أمثلة:

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 5 \geq 0$ صحيحة

$\forall x \in \mathbb{N} : x + 4 = 2x$ خاطئة لأن $x=1$ لا تحققها

$\exists x \in \mathbb{Z} : x < 10$ صحيحة

$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x < y$ صحيحة

2-3: نفي قضية مكتمة

يتم نفي قضية مكتمة باستبدال الرمز \forall بالرمز \exists والعكس بالعكس مع نفي الجملة المفتوحة

أمثلة:

$$\overline{\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 5 \geq 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 5 < 0$$

$$\overline{\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 5} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq 5$$

$$\overline{\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x < y} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x \geq y$$

3- أنماط البرهان

هناك عدة أنماط من البراهين

1-3: البرهان بالتراجع

لإثبات صحة خاصية $P(n)$ على \mathbb{N} يكفي أن نثبت:

✓ صحتها من أجل أول رتبة n_0

✓ صحة الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

مثال : أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل:

➤ اثبات صحة $P(0)$:

نلاحظ أن: $0^2 = \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0$ ، ومنه $P(0)$ صحيحة

➤ اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي $0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $0^2 + 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا: $T_1 = \underbrace{1 + 7 + \dots + (6n - 11)}_{3n^2 - 8n + 5} + 6(n+1) - 11$

$$T_1 = 3n^2 - 8n + 5 + 6(n+1) - 11$$

$$T_1 = 3n^2 - 8n + 5 + 6n + 6 - 11$$

والطرف الثاني:

$$T_2 = 3(n^2 + 2n + 1) - 8n - 8 + 5$$

$$T_2 = 3n^2 - 2n$$

نلاحظ أن طرفا $P(n+1)$ متساويان

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 2$

2-3: البرهان بالخلف

لكي نبرهن أن قضية P صحيحة نفرض أن \bar{P} صحيحة

ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض

مثال: أثبت أن P صحيحة

الحل:

نفرض أن $n < \sqrt{n^2 + 1}$ و $n^2 + 1 < n^2$ منه

يكافؤ $1 < 0$ و هذا تناقض ومنه P صحيحة

3-3: البرهان بالعكس النقيض

لكي نبرهن أن $Q \Rightarrow P$ صحيحة يكفي أن نبرهن صحة $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$
مثال: أثبت أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}: x^3 + 3x - 10 = 7 \Rightarrow x \neq 1$$

الحل:

يكفي إثبات أن: $x = 1 \Rightarrow x^3 + 3x - 10 \neq 7$
وهذا محقق كون $1^3 + 3 - 10 \neq 7$

4-3: البرهان بمثال مضاد

لكي نبرهن عدم صحة القضية $\forall x \in E : P(x)$
يكفي إيجاد عنصر x_0 من E بحيث تكون $P(x)$ خاطئة
مثال: أثبت أن القضية التالية خاطئة

الحل:

القضية خاطئة لأنه يوجد على الأقل مثال مضاد لصحتها
بأخذ $n = 3$ نجد: $3^2 + 3 + 2 = 14 \neq 3^3 = 27$

5-3: البرهان بفصل الحالات

لإثبات صحة قضية P على مجموعة كلية E ، يكفي تجزئة E إلى عدة مجموعات جزئية E_1, E_2, \dots, E_n
... وإثبات أن صحيحة على كل جزء
مثال: أثبت أن:

الحل:

نميز حالتين:

$$n = 2k' \text{ زوجي أي } \checkmark$$

$$n = 2k' + 1 \text{ فردي أي } \checkmark$$

تمارين محلولة

التمرين 1:

اذكر صحة أو خطأ القضايا التالية:

$$3,14 = \pi \Rightarrow \text{pgcd}(45,12) = 4 \quad (1)$$

$$(4! = 12) \wedge (\text{ppcm}(4,5) = 20) \quad (2)$$

$$(\sqrt[3]{27} = 2) \vee (\ln 2 > 0.69) \quad (3)$$

$$(\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N})(x + 3y > 0) \quad (4)$$

$$(\forall x \geq -3, \exists y \geq 6)(x + 10 = 4y) \quad (5)$$

$$(\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N})(x^{1440} = \sin(2018y)) \quad (6)$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N})(x \leq y^{24} + |y|) \quad (7)$$

التمرين 2:

عين نفي القضايا التالية:

$$(\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N})(x \leq 100 \Rightarrow x^2 > 3y) \quad (1)$$

$$(\forall x \geq -3, \exists y < 6)(x^2 + 2|x| = 4y) \quad (2)$$

$$(\forall x \geq 0, \exists y \geq 0)(x^2 < 2y) \vee (x = y) \quad (3)$$

$$(\forall t \in]0, +\infty[)(\ln t < t) \wedge (e^t > t) \quad (4)$$

التمرين 3:

باستخدام جدول الحقيقة أثبت:

$$P \wedge \bar{P} \text{ قضية خاطئة دوما} \quad (1)$$

$$P \vee \bar{P} \text{ قضية صحيحة دوما} \quad (2)$$

$$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q) \quad (3)$$

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow \bar{R}) \Leftrightarrow \overline{(P \wedge Q) \wedge \bar{R}} \quad (4)$$

التمرين 4:

ليكن n عدد طبيعي برهن بالتراجع أن:

$$\forall n \geq 2: 1 + 7 + \dots + (6n - 11) = 3n^2 - 8n + 5 \quad (1)$$

$$\forall n \geq 0: 1 + 2 + 2^2 \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad (2)$$

$$\forall n \geq 0: 2^n > n \quad (3)$$

$$\forall n \geq 0: (1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (4)$$

$$\text{ملاحظة: } (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2$$

التمرين 5:

لتكن المتتالية (U_n) حيث:
$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases}$$

(1) عين الحدين الثالث والرابع

(2) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: U_n \geq n$

التمرين 6:

لتكن المتتالية (U_n) حيث:
$$\begin{cases} U_0 = 1 ; U_1 = \cos(3) \\ U_{n+1} = 2U_1U_n - U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases}$$

(1) تحقق أن: $U_2 = \cos(6)$

(2) أثبت بالتراجع أنه: $\forall n \geq 0: U_n = \cos(3n)$

التمرين 7:

مستخدماً العكس النقيض أثبت أن:

(1) a زوجي $\Rightarrow a^2$ زوجي

(2) a عدد فردي $\Rightarrow a^2 + 9 = 2^n$

التمرين 8:

باستخدام البرهان بالخلف أثبت أن:

(1) مجموع عدد ناطق وعدد أصم هو عدد أصم

(2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(3) $(n \text{ زوجي}) \Rightarrow (n^2 - 1) \text{ ليس مضاعف لـ } 8$: $n > 0$

مساعدة: أي عدد طبيعي فردي n يكتب بالشكل:

التمرين 9:

بفصل الحالات أثبت أنه:

إذا كان n مجموع مربعين، فإن باقي قسمة n على 4 تختلف عن 3

التمرين 10:

بمثال مضاد بين خطأ القضايا التالية:

حل التمارين

التمرين 1:

$$3,14 = \pi \Rightarrow \text{pgcd}(45,12) = 4 \quad (1)$$

الاستلزام صحيح لأن القضية الأولى $3,14 = \pi$ خاطئة

$$(4! = 12) \wedge (\text{ppcm}(4,5) = 20) \quad (2)$$

الوصل خاطئ لان القضية الأولى $(4! = 12)$ خاطئة

$$(\sqrt[3]{27} = 2) \vee (\ln 2 > 0.69) \quad (3)$$

الفصل صحيح لان القضية الثانية $(\ln 2 > 0.69)$ صحيحة

$$(\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N})(x + 3y > 0) \quad (4)$$

القضية خاطئة لأن الثنائية $(-2, 0)$ لا تحققها

$$(\forall x \geq -3, \exists y \geq 6)(x + 10 = 4y) \quad (5)$$

من أجل $x = -2$ ، نلاحظ أن $y = 2$ والتي لا تحقق $y \geq 6$

ومنه القضية خاطئة

$$(\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N})(x^{1440} = \sin(2018y)) \quad (6)$$

القضية صحيحة لأن الثنائية $(0, 0)$ تحققها

$$(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N})(x \leq y^{24} + |y|) \quad (7)$$

القضية صحيحة لأنه يوجد بالفعل عنصر x يحقق المطلوب

مثل $x = -4$ والسبب أن $y^{24} + |y|$ عدد موجب دوما

التمرين 2:

$$(1) \text{ نفي: } (\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{N})(x \leq 100 \Rightarrow x^2 > 3y)$$

$$\text{هو } (\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N})(x \leq 100) \wedge (x^2 \leq 3y)$$

تذكير: نفي الاستلزام $P \Rightarrow Q$ هو $P \wedge \bar{Q}$

$$(2) \text{ نفي: } (\forall x \geq -3, \exists y < 6)(x^2 + 2|x| = 4y)$$

$$\text{هو } (\exists x \geq -3, \forall y < 6)(x^2 + 2|x| \neq 4y)$$

$$(3) \text{ نفي: } (\forall x \geq 0, \exists y \geq 0)(x^2 < 2y) \vee (x = y)$$

$$\text{هو } (\exists x \geq 0, \forall y \geq 0)(x^2 \geq 2y) \wedge (x \neq y)$$

$$(4) \text{ نفي: } (\forall t \in]0, +\infty[)(\ln t < t) \wedge (e^t > t)$$

$$\text{هو } (\exists t \in]0, +\infty[)(\ln t \geq t) \vee (e^t \leq t)$$

التمرين 4:

$$\forall n \geq 2: 1 + 7 + \dots + (6n - 11) = 3n^2 - 8n + 5 \quad (1)$$

➤ اثبات صحة P(2):

نلاحظ أن: $6n - 11 = 1$ من أجل $n = 2$ ومنه: الطرف الأول $T_1 = 1$

$$T_2 = 3n^2 - 8n + 5 = 3(2)^2 - 8(2) + 5 = 1$$

الطرفان متساويان ومنه: P(2) صحيحة

➤ اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة P(n) أي:

$$\forall n \geq 2: 1 + 7 + \dots + (6n - 11) = 3n^2 - 8n + 5$$

ونثبت صحة P(n+1) أي:

$$\forall n \geq 2: 1 + 7 + \dots + 6(n + 1) - 11 = 3(n + 1)^2 - 8(n + 1) + 5 ?$$

$$T_1 = \underbrace{1 + 7 + \dots + (6n - 11)}_{3n^2 - 8n + 5} + 6(n + 1) - 11 \quad \text{لدينا:}$$

$$T_1 = 3n^2 - 8n + 5 + 6(n + 1) - 11$$

$$T_1 = 3n^2 - 8n + 5 + 6n + 6 - 11$$

والطرف الثاني:

$$T_2 = 3(n^2 + 2n + 1) - 8n - 8 + 5$$

$$T_2 = 3n^2 + 6n + 3 - 8n - 8 + 5$$

$$T_2 = 3n^2 - 2n$$

نلاحظ أن طرفا P(n+1) متساويان

إذن: P(n+1) محققة والاستلزام صحيح

ومنه P(n) صحيحة $\forall n \geq 2$

$$\forall n \geq 0: 1 + 2 + 2^2 \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad (2)$$

➤ اثبات صحة P(0):

$$T_2 = 2^{0+1} - 1 = 1 \quad \text{و} \quad T_1 = 2^0 = 1$$

الطرفان متساويان ومنه: P(0) صحيحة

➤ اثبات صحة الاستلزام

$$1 + 2 + 2^2 \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{نفرض صحة P(n) أي:}$$

$$1 + 2 + 2^2 \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1 ? \quad \text{ونثبت صحة P(n+1) أي:}$$

$$T_1 = \underbrace{1 + 2 + 2^2 \dots + 2^n}_{2^{n+1} - 1} + 2^{n+1} \quad \text{لدينا:}$$

$$T_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$T_1 = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 = T_2$$

إذن: P(n+1) محققة والاستلزام صحيح

ومنه P(n) صحيحة $\forall n \geq 0$

$$\forall n \geq 0: 2^n > n \quad (3)$$

➤ اثبات صحة $P(0)$:

$$\text{نلاحظ أن: } T_1 = 2^0 = 1 \text{ و } T_2 = 0$$

$T_1 > T_2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

➤ اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي: $2^n > n$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $2^{n+1} > n+1$?

$$\text{لدينا: } 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n > n+1$$

لأنه: من المعطيات $2^n > n$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n: 2^n \geq 2^0 = 1$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 0$

$$\forall n \geq 0: (1+x)^n \geq 1+nx \quad (4)$$

➤ اثبات صحة $P(0)$:

$$\text{نلاحظ أن: } T_1 = (1+x)^0 = 1 \text{ و } T_2 = 1+0x = 1$$

$T_1 \geq T_2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

➤ اثبات صحة الاستلزام

نفرض صحة $P(n)$ أي: $(1+x)^n \geq 1+nx$

ونثبت صحة $P(n+1)$ أي: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$?

$$\text{لدينا: } T_1 = (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

$$T_1 \geq (1+nx)(1+x)$$

$$\text{بما أن: } (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2$$

$$\text{أي: } (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$$

$$\text{فإن: } T_1 \geq 1+(n+1)x = T_2 \text{ لأن: } nx^2 \geq 0$$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 0$

التمرين 5:

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases} \text{ لدينا حيث:}$$

(1) تعيين الحدين الثالث والرابع:

$$U_2 = U_1 + U_0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{نعوض } n \text{ بـ } 1 \text{ لنجد:}$$

$$U_3 = U_2 + U_1 = 2 + 1 = 3 \quad \text{نعوض } n \text{ بـ } 2 \text{ لنجد:}$$

$$\forall n \geq 0: U_n \geq n \quad \text{أثبت بالتراجع أنه:}$$

➤ اثبات صحة $P(0)$:

$$\text{نلاحظ أن: } U_0 = 1 \geq 0 \text{ ومنه: } P(0) \text{ صحيحة}$$

➤ اثبات صحة الاستلزام

$$\text{نفرض صحة } P(n) \text{ أي: } U_n \geq n$$

$$\text{ونثبت صحة } P(n+1) \text{ أي: } U_{n+1} \geq n+1 ?$$

نستطيع أن نبرهن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما وعليه نستنتج أن: $U_{n-1} \geq 1$

$$\text{ولدينا من المعطيات: } U_n \geq n \text{ إذن } U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \geq n+1$$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

$$\text{ومنه } P(n) \text{ صحيحة } \forall n \geq 0$$

التمرين 6:

$$\begin{cases} U_0 = 1 ; U_1 = \cos(3) \\ U_{n+1} = 2U_1U_n - U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases} \text{ لتكن المتتالية } (U_n) \text{ حيث:}$$

$$(1) \text{ التحقق من أن: } U_2 = \cos(6)$$

$$\text{بتعويض } n \text{ بـ } 1 \text{ نجد: } U_2 = 2U_1U_1 - U_0 = 2U_1^2 - U_0$$

$$U_2 = 2(\cos 3)^2 - 1 = 2(\cos 3)^2 - (\cos 3)^2 - (\sin 3)^2$$

$$U_2 = (\cos 3)^2 - (\sin 3)^2 = \cos(2 \times 3) = \cos(6)$$

$$(2) \text{ البرهان بالتراجع أنه: } \forall n \geq 0: U_n = \cos(3n)$$

➤ اثبات صحة $P(0)$:

$$\text{لدينا: } U_0 = 1 \text{ و } \cos(3 \times 0) = \cos(0) = 1 \text{ ومنه: } P(0) \text{ صحيحة}$$

➤ اثبات صحة الاستلزام

$$\text{نفرض صحة } P(n) \text{ أي: } U_n = \cos(3n)$$

$$\text{ونثبت صحة } P(n+1) \text{ أي: } U_{n+1} = \cos 3(n+1) ?$$

$$\text{لدينا: } U_{n+1} = 2U_1U_n - U_{n-1} = 2\cos 3\cos 3n - \cos 3(n-1)$$

$$U_{n+1} = 2\cos 3\cos 3n - \cos(3n-3)$$

$$U_{n+1} = 2\cos 3\cos 3n - (\cos 3n \cos 3 + \sin 3n \sin 3)$$

$$U_{n+1} = 2\cos 3\cos 3n - \cos 3n \cos 3 - \sin 3n \sin 3$$

$$U_{n+1} = \cos 3\cos 3n - \sin 3n \sin 3$$

$$U_{n+1} = \cos 3n \cos 3 - \sin 3n \sin 3$$

$$U_{n+1} = \cos(3n + 3) = \cos 3(n + 1)$$

إذن: $P(n+1)$ محققة والاستلزام صحيح

ومنه $P(n)$ صحيحة $\forall n \geq 0$

التمرين 7:

(1) لاثبات الاستلزام a زوجي $\Rightarrow a^2$ زوجي ، يكفي أن نثبت عكس نقيضه الذي هو: a^2 فردي $\Rightarrow a$ فردي

$$a \text{ فردي} \Rightarrow a = 2k + 1 / k \in \mathbb{N}$$

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

ومنه a^2 فردي وهو المطلوب

إذن: الاستلزام الأول صحيح

(2) لاثبات الاستلزام a عدد فردي $\Rightarrow a^2 + 9 = 2^n$ ، يكفي أن نثبت عكس نقيضه

الذي هو: $a^2 + 9 \neq 2^n$ فردي $\Rightarrow a$ زوجي

$$a \text{ زوجي} \Rightarrow a = 2k / k \in \mathbb{N}$$

$$T_1 = a^2 + 9 = 4k^2 + 9 \text{ نلاحظ أن الطرف الأول فردي أكبر أو يساوي } 9$$

$$T_2 = 2^n \text{ إما يساوي } 1 \text{ أو هو عدد زوجي}$$

الطرفان إذن غير متساويان وهو المطلوب

إذن: الاستلزام الأول صحيح

التمرين 8:

(1) مجموع عدد ناطق و عدد أصم هو عدد أصم

لنثبت أن: $\frac{a}{b} + x = y$ حيث: x و y عدنان أصمان أي من $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

لذلك نفرض أن نفيها صحيح أي:

نفرض أن مجموع عدد ناطق و عدد أصم هو عدد غير أصم

بمعنى نفرض $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ و $y \in \mathbb{Q}$

$$\text{لدينا: } x = y - \frac{a}{b}$$

$$y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$$

وهنا التناقض لأن: $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ومنه القضية المعطاة صحيحة

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ (2)}$$

نفرض أن النفي صحيح أي: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ أوليان فيما بينهما}$$

بالتربيع نجد: $2 = \frac{a^2}{b^2}$ أي: $a^2 = 2b^2 \dots (*)$ ومنه: a^2 عدد زوجي

إذن: a عدد زوجي (حسب التمرين 7 سؤال 1) أي: $a=2k$
 بالتعويض في (*) نجد: $4k^2 = 2b^2$ وينتج: $b^2 = 2k^2$
 إذن: b عدد زوجي (حسب التمرين 7 سؤال 1) أي: $b=2l$
 نلاحظ أن a و b ليسا أوليين فيما بينهما لأن من قواسمهما المشتركة 1 و 2
 وهنا التناقض ومنه: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(3) $(n$ زوجي) $\Rightarrow (n^2 - 1)$ ليس مضاعف لـ 8 : $n > 0$
 نفرض أن نفي الاستلزام صحيح أي نفرض أن:
 $(n^2 - 1)$ ليس مضاعف لـ 8 و (n فردي)
 ونستخدم المساعدة: أي عدد طبيعي فردي n يكتب بالشكل:

في حالة: $n = 4k + 1$ ، $n^2 - 1 = 16k^2 + 8k$
 في حالة: $n = 4k + 3$ ، $n^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8$
 نلاحظ في الحالتين أن: $n^2 - 1$ مضاعف لـ 8 وهذا يناقض الفرضية
 ومنه الاستلزام صحيح

التمرين 9:

بفصل الحالات أثبت أنه:

إذا كان n مجموع مربعين، فإن باقي قسمة n على 4 تختلف عن 3
 نضع: $n = a^2 + b^2$ ولينا الحالات التالية:

الحالة 1: $a = 2k$; $b = 2l$

$n = 4k^2 + 4l^2$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 0

الحالة 2: $a = 2k + 1$; $b = 2l$

$n = 4k^2 + 4l^2 + 4k + 1$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 1

الحالة 3: $a = 2k$; $b = 2l + 1$

$n = 4k^2 + 4l^2 + 4l + 1$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 1

الحالة 4: $a = 2k + 1$; $b = 2l + 1$

$n = 4k^2 + 4l^2 + 4l + 4k + 2$ باقي قسمة n على 4 ليست 3 وإنما 2

التمرين 10:

بمثال مضاد بين خطأ

المثال المضاد هو: $x = -3$ لأن: $-3 \leq 2$ بينما: $(-3)^2 = 9 > 4$



2.1 المجموعات

تمهيد: مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، فالمجموعة كائن رياضي قائم بذاته مكوّن من عدّة أفراد يتصف بمايلي:

- أفراد المجموعة متمايزة، أي أنّه لاداعي لتكرار أي فرد من أفرادها، فمجموعة أرقام العدد 2021 هي $\{0,1,2\}$ حيث أن الرقم 2 لم يُذكر سوى مرّة واحدة رغم ظهوره مرتين في العدد المذكور.
- المجموعة مُعيّنة تعيينا تاما بحيث يمكننا أن نقول عن أي فرد أنه من المجموعة أو غريب عنها، فتتحدّد المجموعة تحديدا نهائيا إذا تمّ تحديد مفهوم الانتماء بوضوح، أي أننا نستطيع أن نُحدّد وبدون غموض إن كان عنصرا a ينتمي أو لا ينتمي إلى المجموعة E ، أي أننا نستطيع أن نحكم وبدون غموض على صحة إحدى القضيتين $a \in E$ أو $a \notin E$. وفي حالة $a \in E$ نقول أن a عنصرا من E .
- تجدر الإشارة هنا إلى كيفية تعيين المجموعة، فتتعيّن المجموعة إذا عُرفت جميع عناصرها وفي هذه الحالة يمكن كتابة عناصرها بين حاضنتين مثل المجموعة $\{0,1,2\}$ ، كما تتعين المجموعة بذكر خاصية تُميّر عناصر هذه المجموعة، على سبيل المثال المجموعة السابقة يمكن كتابتها على الشكل $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 2\}$.
- ترتيب الأفراد (العناصر) غير مهم في المجموعة، فالمجموعة $\{0,1,2\}$ يمكن كتابتها $\{1,0,2\}$
- إنّ أكثر المجموعات تداولاً في الدراسات الرياضية هي المجموعات العددية: مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} ، مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} ، مجموعة الأعداد الناطقة \mathbb{Q} ، مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ، مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} .

نفرض في كل ما سيأتي، E مجموعة، A و B مجموعتان جزئيتان من E .
الاحتواء: نقول أن المجموعة A محتواة في المجموعة B إذا تحقق الاستلزام التالي:

$$\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

ونكتب $A \subset B$.

المساواة: نقول أن المجموعة A تساوي المجموعة B إذا تحقق التكافؤ التالي:

$$\forall x \in E, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$$

ونكتب $A = B$.

ملاحظات:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

- نقبل بوجود مجموعة لا تشمل أي عنصر تسمى المجموعة الخالية ونرمز لها بالرمز \emptyset ، وهي محتواة (اصطلاحاً) في أي مجموعة.

- الاحتواء هو علاقة بين مجموعتين بينما الانتماء بين عنصر و مجموعة. فمثلاً، $1 \in \mathbb{N}$ بينما $\{1\} \subset \mathbb{N}$.

عمليات على المجموعات:

أ- **التقاطع:** تقاطع المجموعتين A و B هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين ونرمز لها بالرمز

$$A \cap B, \text{ ونكتب } A \cap B = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$$

ب-الإتحاد: إتحاد المجموعتين A و B هو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين هاتين المجموعتين ونرمز لها بالرمز $A \cup B$ ، ونكتب $A \cup B = \{x, x \in A \vee x \in B\}$.

ج-الفرق بين مجموعتين: نسمي الفرق بين المجموعتين A و B مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B ونرمز لها بالرمز $A - B$ ، ونكتب $A - B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$.

د-الفرق التناظري لمجموعتين: نسمي الفرق التناظري للمجموعتين A و B مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B و التي تنتمي إلى B و التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B ونكتب $A \Delta B = \{x, (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.

ملاحظة: من التعريف ينتج مايلي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) .$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) .$$

ه-متممة مجموعة: متممة المجموعة A بالنسبة إلى E هي مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى A ونرمز لها بالرمز \bar{A} أو بالرمز $C_E A$ ، ونكتب $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$.

ملاحظة: حسب التعريف، $\bar{\bar{A}} = E - A$.

مثال: لتكن $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{3, 4\}$ لدينا مايلي:

$$A \cap B = \{3\} \quad , \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B - A = \{4\} \quad , \quad A - B = \{1, 2\}$$

$$\bar{A} = \{0, 4, 5\} \quad , \quad A \Delta B = \{1, 2, 4\}$$

خواص: لتكن A ، B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E .

$$A \cap A = A \quad .$$

$$A \cup A = A \quad .$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad .$$

$$A \cup \emptyset = A \quad .$$

$$A \cap B = B \cap A \quad .$$

$$A \cup B = B \cup A \quad .$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad .$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad .$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad .$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad .$$

$$\bar{\bar{A}} = A \quad , \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad .$$

إثبات الخاصية، $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ، وتترك بقية الخواص لإثباتها كتمارين للبحث.

لدينا:

$$\begin{aligned}\forall x \in E, (x \in \overline{A \cap B}) &\Leftrightarrow (x \notin A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}) \\ &\Leftrightarrow (x \in \overline{A \cup B})\end{aligned}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ إذن}$$

أو بالكيفية التالية:

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \{x, x \notin A \cap B\} \\ &= \{x, x \notin A \vee x \notin B\} \\ &= \{x, x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} \\ &= \overline{A \cup B}\end{aligned}$$

جُداء مجموعتين: جُداء المجموعتين A و B هو مجموعة الثنائيات المرتبة (a, b) حيث a تنتمي إلى A و b تنتمي

$$\text{إلى } B \text{ ونكتب } A \times B = \{(a, b), a \in A \wedge b \in B\}$$

مثال: حسب معطيات المثال السابق، لدينا

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$

مجموعة أجزاء مجموعة: مجموعة أجزاء المجموعة E هي المجموعة التي عناصرها كل المجموعات الجزئية

$$\text{للمجموعة } E \text{ ونرمز لها بالرمز } P(E), \text{ ونكتب } P(E) = \{A, A \subset E\}$$

ملاحظات:

$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E \quad -$$

$$P(E) \text{ ليست خالية لأنها تحوي على الأقل } \emptyset \text{ و } E. \quad -$$

$$- \text{ إذا كان عدد عناصر } E \text{ هو } n \text{ فإن عدد عناصر } P(E) \text{ هو } 2^n, \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي.}$$

$$\text{مثال: لتكن } E = \{0, 1, 2\}, \text{ فيكون لدينا}$$

$$P(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, E\}$$

تجزئة مجموعة: لتكن E مجموعة غير خالية.

نسمي تجزئة للمجموعة E كل عائلة أجزاء من E تُحقَّق:

(1). كل عنصر من التجزئة غير خال.

(2). عناصر التجزئة منفصلة مثنى مثنى.

(3). إتحاد كل عناصر التجزئة هو المجموعة E .

مثال: في المثال السابق، المجموعة $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E .

بينما المجموعة $\{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ لا تشكل تجزئة للمجموعة E لأن $\{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \neq \emptyset$.

تطبيقات:

(1) - لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من مجموعة E .

أثبت أن $(A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset \bar{B})$.

الحل:

يمكن إثبات صحة هذا التكافؤ باستلزامين كما يلي:

أ. إثبات أن: $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (A \subset \bar{B})$ ، (نفرض أن $A \cap B = \emptyset$ ونثبت أن $A \subset \bar{B}$).

$$\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (x \notin B) \quad (A \cap B = \emptyset \text{ ن }) \\ \Rightarrow (x \in \bar{B})$$

ومنه $A \subset \bar{B}$.

ب. إثبات أن: $(A \subset \bar{B}) \Rightarrow (A \cap B = \emptyset)$ ، (نفرض أن $A \subset \bar{B}$ ونثبت أن $A \cap B = \emptyset$).

نستعمل البرهان بالخلف، نفرض أن $A \cap B \neq \emptyset$ ، معناه يوجد على الأقل عدد x من $A \cap B$ أي $(x \in A \wedge x \in B)$ ،
و بما أن $A \subset \bar{B}$ فإن $(x \in \bar{B} \wedge x \in B)$ ، وهذا تناقض. إذن $A \cap B = \emptyset$.

2- لتكن A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E .
أ- أثبت أن

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

ب- تحقق من الخاصية السابقة إذا علمت أنّ

$$C = \{3,4,5\}, \quad B = \{2,3,4\}, \quad A = \{1,2,4\}, \quad E = \{1,2,3,4,5\}$$

الحل:

أ- لدينا:

$$\forall x \in E, (x \in A - (B \cap C)) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C))$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C))$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A - B) \vee (x \in A - C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in (A - B) \cup (A - C))$$

$$\text{إذن } A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

ب- لدينا من جهة:

$$A - (B \cap C) = \{1,2,4\} - \{3,4\} = \{1,2\} \quad \dots(1)$$

ومن جهة أخرى:

$$(A - B) \cup (A - C) = \{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\} \quad \dots(2)$$

من (1) و (2) ينتج أن $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

(3) - لتكن E و F مجموعتان كيفيتان.
أثبت أن

$$.E \subset F \Rightarrow P(E) \subset P(F)$$

الحل:

لتكن المجموعة A عنصر من $P(E)$ ، فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} (A \in P(E)) &\Rightarrow (A \subset E) \\ &\Rightarrow (A \subset F) \quad (\text{لأن } E \subset F) \\ &\Rightarrow (A \in P(F)) \end{aligned}$$

إذن $P(E) \subset P(F)$.

3.1 العلاقات

تمهيد: سوف نتناول في هذا الموضوع مفهوم العلاقة بين مجموعتين، والذي يُعتبر من المفاهيم الأساسية التي تُبنى عليها مفاهيم أساسية أخرى، كمفهوم التطبيق بين مجموعتين. سيكون للعلاقة في نفس المجموعة أو ما يُعرف بالعلاقة الثنائية حيزًا أكبرًا في موضوعنا هذا لما تُنتجه من إمكانية تصنيف عناصر المجموعة بشكل ما (باستخدام علاقة التكافؤ) أو بموضعة عناصر المجموعة وفق قاعدة ما (باستخدام علاقة الترتيب).

العلاقة بين مجموعتين: لنكن E و F مجموعتان غير خاليتين.

نسمي علاقة بين المجموعتين E و F كل خاصية تسمح بأن تُرفق عناصر من E بعناصر من F ، ونرمز لها عادة بالرمز \mathcal{R} ، فإذا كان العنصر a من E مرتبطًا مع العنصر b من F وفق العلاقة \mathcal{R} نكتب $a\mathcal{R}b$.
بيان العلاقة: لنكن \mathcal{R} علاقة بين المجموعتين E و F . نسمي بيان العلاقة \mathcal{R} المجموعة الجزئية من $E \times F$ المُعرّفة بـ:

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a, b) \in E \times F, a\mathcal{R}b\}$$

مثال: لنكن المجموعتان $E = \{2, 3\}$ و $F = \{3, 4, 5, 6\}$. نعرّف العلاقة \mathcal{R} من E نحو F كالتالي:

$$\forall (x, y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (yx \text{ قسم})$$

لدينا: $2\mathcal{R}4$ ، $2\mathcal{R}6$ ، $3\mathcal{R}3$ ، $3\mathcal{R}6$.

ومنه

$$.G_{\mathcal{R}} = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$$

العلاقة العكسية: إذا كانت \mathcal{R} علاقة من E في F فإن علاقتها العكسية هي العلاقة التي نرمز لها بالرمز \mathcal{R}^{-1} معرفة من F في E كمايلي:

$$\forall (x, y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}^{-1}x$$

مثال: العلاقة العكسية للعلاقة \mathcal{R} في المثال السابق معرفة كمايلي:

$$\forall (x, y) \in E \times F, y\mathcal{R}^{-1}x \Leftrightarrow (xy \text{ لاغف})$$

ويكون لدينا:

$$.G_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(3, 3), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$$

العلاقة في مجموعة: إذا كانت $E = F$ فيما سبق، فنقول أن \mathcal{R} علاقة في المجموعة E .

خواص العلاقة في مجموعة: لنكن \mathcal{R} علاقة في مجموعة E .

- **الخاصية الإنعكاسية:** نقول أن \mathcal{R} علاقة إنعكاسية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$

- **الخاصية التناظرية:** نقول أن \mathcal{R} علاقة تناظرية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

- الخاصية ضد التناظرية: نقول أن \mathcal{R} علاقة ضد تناظرية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x) \Rightarrow (x = y)$$

- الخاصية المتعدية: نقول أن \mathcal{R} علاقة متعدية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$$

ملاحظات:

- خاصيتي التناظر و ضد التناظر ليستا متنافيتان، حيث يمكن أن يجتمعا في نفس العلاقة، ومثال ذلك علاقة المساواة في \mathbb{R} ، تناظرية و ضد تناظرية في آن واحد.

- القول أن \mathcal{R} علاقة ليست إنعكاسية في E إذا تحقق مايلي: $\exists x \in E, \overline{x \mathcal{R} x}$

- القول أن \mathcal{R} علاقة ليست تناظرية في E إذا تحقق مايلي: $\exists (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \wedge \overline{y \mathcal{R} x}$

- القول أن \mathcal{R} علاقة ليست ضد تناظرية في E إذا تحقق مايلي: $\exists (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \wedge x \neq y$

- القول أن \mathcal{R} علاقة ليست متعدية في E إذا تحقق مايلي: $\exists (x, y, z) \in E^3, x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \wedge \overline{x \mathcal{R} z}$

مع الإشارة إلى أن الكتابة $\overline{x \mathcal{R} y}$ تعني أن العنصر x ليس له علاقة مع العنصر y .

مثال تطبيقي: نعرّف العلاقة \mathcal{R} في \mathbb{N}^* كمايلي:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y = kx, k \in \mathbb{N}^*$$

دراسة خواص العلاقة \mathcal{R} :

- الإنعكاسية: لدينا

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, x \mathcal{R} x \Leftrightarrow x = 1 \times x \quad (\text{مُحَقَّقة})$$

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, x \mathcal{R} x \quad \text{إذن}$$

فالعلاقة \mathcal{R} إنعكاسية في \mathbb{N}^* .

- التناظرية: لو أخذنا العددين 2 و 4 من \mathbb{N}^* ، نلاحظ أنّ $2 \mathcal{R} 4$ و $\overline{4 \mathcal{R} 2}$ بمعنى:

$$\exists (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, x \mathcal{R} y \wedge \overline{y \mathcal{R} x}$$

فالعلاقة \mathcal{R} ليست تناظرية في \mathbb{N}^* .

- ضد التناظرية: لدينا

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, \left(\begin{array}{c} x \mathcal{R} y \\ \wedge \\ y \mathcal{R} x \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{c} y = kx, k \in \mathbb{N}^* \\ \wedge \\ x = k'y, k' \in \mathbb{N}^* \end{array} \right) \\ &\Rightarrow (xy = kk'xy, (k, k' \in \mathbb{N}^*)) \\ &\Rightarrow (kk' = 1) \\ &\Rightarrow (k = k' = 1) \end{aligned}$$

ومنه $x = y$

وبالتالي: $\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x) \Rightarrow (x = y)$

إذن العلاقة \mathcal{R} ضد تناظرية في \mathbb{N}^* .

- المتعدية: لدينا

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3, \begin{pmatrix} x \mathcal{R} y \\ \wedge \\ y \mathcal{R} z \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} y = kx, k \in \mathbb{N}^* \\ \wedge \\ z = k'y, k' \in \mathbb{N}^* \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (z = kk'x, (kk' \in \mathbb{N}^*)) \\ &\Rightarrow (x \mathcal{R} z) \end{aligned}$$

وبالتالي: $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$

إذن العلاقة \mathcal{R} متعدية في \mathbb{N}^* .

علاقة التكافؤ: لتكن E مجموعة غير خالية و \mathcal{R} علاقة في E .

تعريف: نقول أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ في E إذا وفقط إذا كانت \mathcal{R} إنعكاسية، تناظرية ومتعدية في E .
أمثلة:

- علاقة المساواة في \mathbb{R} علاقة تكافؤ.
- علاقة التوازي في مجموعة مستقيمت مستو علاقة تكافؤ.
- علاقة (مضاعف) في المثال السابق ليست علاقة تكافؤ في \mathbb{N}^* ، لأنها ليست تناظرية.

أصناف التكافؤ:

تعريف: لتكن المجموعة E المزودة بعلاقة التكافؤ \mathcal{R} ، وليكن a عنصرا من E .

تُسمَّى صنف تكافؤ العنصر a مجموعة العناصر التي لها علاقة مع a ونرمز لها بالرمز \dot{a} ، ونكتب:

$$\dot{a} = \{x \in E, x \mathcal{R} a\}$$

خواص أصناف التكافؤ:

- كل صنف تكافؤ غير خال.
- أصناف التكافؤ منفصلة مثنى مثنى.
- إتحاد أصناف التكافؤ يساوي المجموعة E .

مجموعة حاصل القسمة: لتكن \mathcal{R} علاقة تكافؤ في مجموعة E .

حسب الخواص السابقة، مجموعة أصناف التكافؤ تُشكّل تجزئة للمجموعة E ، وهي تُسمى مجموعة حاصل القسمة لـ

$$E/\mathcal{R} = \{\dot{a}, a \in E\} \text{، ونكتب } E/\mathcal{R} \text{، ونرمز لها بالرمز } E/\mathcal{R} \text{، ونكتب } E/\mathcal{R} = \{\dot{a}, a \in E\}.$$

تطبيق: نُعرّف على \mathbb{Z} العلاقة \mathcal{R} كما يلي:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x - y = 2k, k \in \mathbb{Z})$$

(1) - بيّن أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{Z} .

(2) - عيّن صنف تكافؤ كل من 0 و 1، ثم استنتج مجموعة حاصل القسمة \mathbb{Z}/\mathcal{R} .

الحل:

(1) - إثبات أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{Z} :

-الانعكاسية: لدينا

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x \mathcal{R} x) \Leftrightarrow (x - x = 2(0)) \text{ (مُحَقَّقة)}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} x \quad \text{إذن}$$

ومنه \mathcal{R} علاقة إنعكاسية في \mathbb{Z} .

-التناظرية: لدينا

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x \mathcal{R} y) \Rightarrow (x - y = 2k, k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (y - x = 2(-k), (-k) \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (y \mathcal{R} x)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x \quad \text{وبالتالي:}$$

ومنه \mathcal{R} علاقة تناظرية في \mathbb{Z} .

-المتعدّية: لدينا

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, \left(\begin{array}{c} x \mathcal{R} y \\ \wedge \\ y \mathcal{R} z \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x - y = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ \wedge \\ y - z = 2k', k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

بالجمع طرفا لطرف نجد $x - z = 2(k + k')$, $(k + k') \in \mathbb{Z}$ معناه $x \mathcal{R} z$.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, (x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z) \quad \text{وبالتالي:}$$

ومنه \mathcal{R} علاقة متعدّية في \mathbb{Z} .

بما أنّ \mathcal{R} علاقة إنعكاسية، تناظرية و متعدّية في \mathbb{Z} فهي علاقة تكافؤ في \mathbb{Z} .

(2) - صنف تكافؤ 0: لدينا

$$\dot{0} = \{x \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} 0\}$$

و حسب تعريف العلاقة \mathcal{R} ، نجد $(x \mathcal{R} 0) \Leftrightarrow (x - 0 = 2k, k \in \mathbb{Z})$

ومنه $\dot{0} = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$ ، وهي الأعداد الزوجية في \mathbb{Z} .

- صنف تكافؤ 1: $\dot{1} = \{2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ، وهي الأعداد الفردية في \mathbb{Z} .

-الاستنتاج: نلاحظ أنّه من أجل كل عدد x من \mathbb{Z} فإن $x = 2k + a, k \in \mathbb{Z}$ حيث $(a = 0 \vee a = 1)$ بمعنى أن

$$x \in \dot{0} \text{ أو } x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \text{ أي إما } x \in \dot{0} \text{ و إما } x \in \dot{1}.$$

$$\text{وبالتالي نستنتج أنّ } \mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\dot{0}, \dot{1}\}.$$

علاقة الترتيب: لتكن E مجموعة غير خالية و \mathcal{R} علاقة في E .

تعريف: نقول أنّ \mathcal{R} علاقة ترتيب في E إذا وفقط إذا كانت \mathcal{R} إنعكاسية، ضد تناظرية ومتعدّية في E .

أمثلة:

- علاقة المساواة في \mathbb{R} علاقة ترتيب.

- علاقة الإحتواء في مجموعة أجزاء مجموعة علاقة ترتيب.

- العلاقة \mathcal{R} في التطبيق السابق ليست علاقة ترتيب في \mathbb{Z} ، لأنها ليست ضد تناظرية (حيث أنه بأخذ العددين الصحيحين 4 و 6 مثلاً، نجد أن $6\mathcal{R}4$ و $4\mathcal{R}6$ و $6 \neq 4$).

الترتيب الكلي و الترتيب الجزئي: لتكن \mathcal{R} علاقة ترتيب في مجموعة E .

- نقول أن \mathcal{R} علاقة ترتيب كلي في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x$$

- و نقول أن \mathcal{R} علاقة ترتيب جزئي في E إذا لم تكن ترتيب كلي أي إذا تحقق مايلي:

$$\exists (x, y) \in E^2, \overline{x \mathcal{R} y} \wedge \overline{y \mathcal{R} x}$$

تطبيق 1: رأينا في المثال التطبيقي السابق التابع لخواص العلاقة في مجموعة، أن العلاقة \mathcal{R} المُعرّفة بالشكل التالي:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, (x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (y = kx, k \in \mathbb{N}^*)$$

إنعكاسية، ضد تناظرية و متعدية في \mathbb{N}^* فهي علاقة ترتيب في \mathbb{N}^* . فهل هذا الترتيب كلي؟، علّل.

الحل:

إنّ هذا الترتيب ليس كلي بمعنى جزئي لأنه بأخذ العددين الطبيعيين 2 و 3 مثلاً، نجد أن $2\mathcal{R}3$ و $3\mathcal{R}2$ ، أي

$$\cdot \exists (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, \overline{x \mathcal{R} y} \wedge \overline{y \mathcal{R} x}$$

تطبيق 2:

- بين أن العلاقة أصغر أو يساوي (\leq) في \mathbb{R} علاقة ترتيب.

- هل هذا الترتيب كلي؟، علّل.

الحل: العلاقة (\leq) في \mathbb{R} علاقة ترتيب:

- فهي إنعكاسية حيث أنّ ($\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$) قضية صحيحة.

- وهي ضد تناظرية حيث أنّ:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \leq y \\ \wedge \\ y \leq x \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} x - y \leq 0 \\ \wedge \\ x - y \geq 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (x - y = 0) \\ &\Rightarrow (x = y) \end{aligned}$$

- وهي متعدية حيث أنّ:

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \leq y \\ \wedge \\ y \leq z \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} x - y \leq 0 \\ \wedge \\ y - z \leq 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (x - z \leq 0) \\ &\Rightarrow (x \leq y) \end{aligned}$$

إنّ هذا الترتيب كلي لأنّ: القضية ($\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \vee y \leq x$) صحيحة.

حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y ، إمّا $x - y \leq 0$ أو $x - y \geq 0$ بمعنى $x \leq y$ أو $y \leq x$.

4.1 التطبيقات

سندرس في هذا الجزء نوعا خاصا من العلاقات هي التطبيقات. إنَّ الهدف من هذا الموضوع هو التعرّف على مفهوم التطبيق، كيفية تعيين مركب تطبيقين، التمييز بين التطبيق المتباين والغامر والتقابل، مع التطرّق إلى التطبيق العكسي، ثمّ التعرف على الصورة المباشرة والصورة العكسية لتطبيق. وفي كلّ مرّة نعالج أمثلة تطبيقية لتوضيح هذه المفاهيم وكيفية تطبيقها.

تعريف: لتكن E و F مجموعتان.

تُسمى تطبيقا من المجموعة E نحو المجموعة F كلّ علاقة تُرْفَق بكل عنصر من E عنصرا وحيدا من F ، ونرمز له بأحد الرموز f, g, h, \dots

- فإذا كان f تطبيقا من E نحو F نكتب:

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

تُسمى E مجموعة البدء أو السوابق، و F مجموعة الوصول أو الصور، كما يُسمى العنصر x من E سابقة، و العنصر y من F صورة العنصر x بالتطبيق f .

أمثلة:

- إن العلاقة المُعرّفة بالشكل التالي:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = e^x$$

تطبيق، حيث أن لكل عدد حقيقي x قيمة وحيدة e^x .

- بينما العلاقة المُعرّفة بالشكل:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \ln(x)$$

ليست تطبيق، لأن العدد الحقيقي (-2) مثلا ليس له صورة.

تركيب تطبيقين: لتكن E, F, G ثلاث مجموعات، وليكن f تطبيقا من E نحو F و g تطبيقا من F نحو G ، تركيب التطبيقين f و g (بهذا الترتيب) هو التطبيق من E نحو G الذي يُرمز له بالرمز $g \circ f$ و المُعرّف كمايلي:

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

كما يمكن تلخيص هذا التركيب في المخطط التالي:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g[f(x)]$$

مثال: لنعتبر التطبيقين f و g المُعرّفين كما يلي:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad , \quad x \mapsto f(x) = 3x + 1$$

- عيّن كل من $g \circ f$ و $f \circ g$.

لدينا

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x + 1 \mapsto g(3x + 1) = \sqrt{9x^2 + 6x + 2}$$

وبالتالي

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 2}$$

وكذا لدينا

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \mapsto f(\sqrt{x^2 + 1}) = 3\sqrt{x^2 + 1} + 1$$

وبالتالي

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (f \circ g)(x) = 3\sqrt{x^2 + 1} + 1$$

عموماً $g \circ f \neq f \circ g$.

خواص التطبيق: ليكن f تطبيقاً من مجموعة E نحو مجموعة F .

أ- التباين:

تعريف: يكون التطبيق f متبايناً إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأكثر في E بالتطبيق f .

ملاحظات:

- يمكن صياغة تعريف التباين كمايلي:

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- وعملياً نستخدم الصيغة التالية في تعريف التباين (بالانتقال إلى العكس النقيض):

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- باستعمال حل المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x يكون التعريف بالصيغة التالية:

يكون التطبيق f متبايناً إذا وفقط إذا كان من أجل كل y من F ، المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x من

E تقبل على الأكثر حلاً في E .

- يكون التطبيق f ليس متبايناً إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

أمثلة:

(1) - لنعتبر التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x + 3$$

إن هذا التطبيق متبايناً لأن:

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(2) - لنعتبر التطبيق g المُعرّف كما يلي:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x^2$$

إن هذا التطبيق ليس متبايناً لأنه مثلاً من أجل $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$ ، يكون $2 \neq -2$ ولكن $g(2) = g(-2)$.
بمعنى $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \wedge g(x_1) = g(x_2)$

ب- العُمر:

تعريف: يكون التطبيق f غامراً إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأقل في E بالتطبيق f .
ملاحظات:

- يمكن صياغة تعريف الغامر كما يلي:

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

- باستعمال حل المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x يكون التعريف بالصيغة التالية:

يكون التطبيق f غامراً إذا وفقط إذا كان من أجل كل y من F ، المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x من E تقبل على الأقل حلاً في E .

- يكون التطبيق f ليس غامراً إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\exists y \in F, \forall x \in E, y \neq f(x)$$

أمثلة:

(1) - إن التطبيق f المُعرّف في المثال (1) السابق غامراً لأنه: من أجل كل عدد حقيقي y بحيث $y = f(x)$ يكون لدينا

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

مع $\frac{y-3}{2}$ هو عدد حقيقي، فالعدد x موجود في \mathbb{R} .

وبالتالي: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

مما يدلّ على أنه غامر.

(2) - لنعتبر التطبيق h المُعرّف كما يلي:

$$h : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

ليكن $y \in \mathbb{R}$ بحيث

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = 2y+1$$

فلاحظ أنه من أجل $y=1$ فإن x غير موجود، أي أن العدد 1 لا يقبل أية سابقة في $\mathbb{R}-\{2\}$ ، بمعنى

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}-\{2\}, y \neq h(x)$$

إذن التطبيق h ليس غامرا.

ج- التقابل:

تعريف: يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة وحيدة في E بالتطبيق f .

ملاحظات:

- باستعمال حل المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x يكون التعريف بالصيغة التالية:
يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كان من أجل كل y من F ، المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x من E تقبل حلاً وحيداً في E .
- حسب التعريف، يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كان متباينا وغامرا.
- يكون التطبيق f ليس تقابلا إذا وفقط إذا كان ليس متباينا أو ليس غامرا.

أمثلة:

- (1) - إن التطبيق f المُعرّف في المثال (1) السابق (في فقرتي التباين و الغمر)، وجدنا أنه متباين وغامر فهو تقابل.
- (2) - رأينا أن التطبيق g في المثال (2) السابق (فقرة التباين)، ليس متباينا فهو ليس تقابلا.
- كما رأينا أن التطبيق h في المثال (2) السابق (فقرة الغمر)، ليس غامرا فهو ليس تقابلا.

التطبيق العكسي لتقابل:

تعريف: إذا كان f تطبيقا تقابليا من E نحو F فإنه يقبل تطبيقا عكسيا يُرمز له بالرمز f^{-1} ، وهو مُعرّف من F نحو E كمايلي:

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

نتيجة: التطبيق العكسي لتقابل هو تقابل.

مثال: باعتبار التطبيق f المُعرّف كمايلي:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x + 3$$

تقابل (حسب ما سبق) فهو يقبل تطبيق عكسي، ولدينا (حسب فقرة الغمر) $y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$ وبالتالي

التطبيق العكسي للتطبيق f مُعرّف كمايلي:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

تمرين تطبيقي: نعتبر التطبيق f المُعرّف من \mathbb{R}^* في $\mathbb{R}-\{3\}$ كمايلي: $f(x) = \frac{3x-1}{x}$

- أثبت أن التطبيق f تقابلي، ثم عيّن تطبيقه العكسي.

الحل:

-إثبات أن التطبيق f تقابلي:

. التباين: لدينا

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^*)^2, f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{3x_1 - 1}{x_1} = \frac{3x_2 - 1}{x_2} \\ &\Rightarrow 3x_1x_2 - x_2 = 3x_1x_2 - x_1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2\end{aligned}$$

ومنه التطبيق f متباين.

. العُمر: ليكن $y \in \mathbb{R} - \{3\}$ بحيث $y = f(x)$

يكون لدينا

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{3x - 1}{x} \\ &\Leftrightarrow x(y - 3) = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1}{y - 3}, \quad (y \neq 3)\end{aligned}$$

ومنه x موجود في \mathbb{R}^* مهما كان y من $\mathbb{R} - \{3\}$.

إذن التطبيق f غامر.

وبما أن التطبيق f متباين و غامر فهو تقابل.

طريقة ثانية لإثبات التقابل بحل المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x من \mathbb{R}^* مع y عدد معلوم من $\mathbb{R} - \{3\}$:

لدينا (كما في إثبات الغامر)،

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{-1}{y - 3}, \quad (y \neq 3)$$

فالمعادلة $y = f(x)$ تقبل حلا وحيدا $x = \frac{-1}{y - 3}$ من \mathbb{R}^* .

إذن التطبيق f تقابل.

-و مادام التطبيق f تقابل فهو يقبل تطبيقا عكسيا f^{-1} مُعرّف كمايلي:

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{-1}{x - 3}$$

الصورة المباشرة: ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F ، ولتكن A مجموعة جزئية من E .

تُسمّى الصورة المباشرة للمجموعة A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F المُعرّفة كمايلي:

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

أو بالصيغة:

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A : y = f(x)\}$$

خواص: لتكن A_1 و A_2 مجموعتان جزئيتان من مجموعة E .

$$(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2)) \quad \text{أ-}$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \text{ب-}$$

البرهان:

أ- لنفرض $A_1 \subset A_2$ ونثبت أن $f(A_1) \subset f(A_2)$:

$$\forall y \in F, (y \in f(A_1)) \Rightarrow (\exists x \in A_1 : y = f(x))$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A_2 : y = f(x))$$

$$\Rightarrow (y \in f(A_2))$$

ومنه $f(A_1) \subset f(A_2)$

ب- لدينا

$$f(A_1) \cup f(A_2) = \{y \in F, \exists x \in A_1 : y = f(x)\} \cup \{y \in F, \exists x \in A_2 : y = f(x)\}$$

$$= \{y \in F, \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x)\}$$

$$= f(A_1 \cup A_2)$$

ومنه $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

أمثلة تطبيقية:

1) لنعتبر التطبيق f المُعرّف كمايلي:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

المطلوب: تعيين الصورة المباشرة لكل من: $[0,1]$ ، $[-1,0]$ ، $[-1,1]$ ، \mathbb{R} .

يمكن استعمال البيان المقابل لتعيين الصور المباشرة لهذه المجالات.

و يمكن استعمال الحصر بالنسبة للمجالين الأول والثاني.

كما يمكن استعمال إتجاه التغير: لدينا f متزايد على \mathbb{R}_+ و متناقص على \mathbb{R}_- .

كون f متزايد على $[0,1]$ فإن

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$$

و كون f متناقص على $[-1,0]$ فإن

$$f([-1,0]) = [f(0), f(-1)] = [0,1]$$

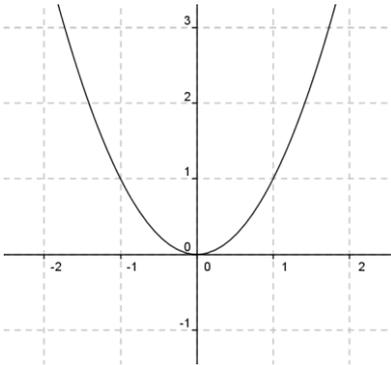
و كون f غير رتيب على $[-1,1]$ ، فلدينا $[-1,1] = [-1,0] \cup [0,1]$ وبالتالي:

$$f([-1,1]) = f([-1,0] \cup [0,1]) = f([-1,0]) \cup f([0,1]) = [0,1]$$

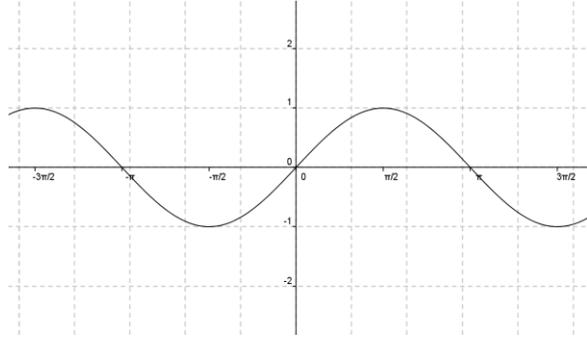
وبالمثل

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) \cup f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$$

أو بالقول، بما أن $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$ أي $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$ فإن $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.



بيان $f: (y = x^2)$



بيان g : $(y = \sin x)$

(2) لنعتبر التطبيق g المُعرّف كمايلي:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \sin x$$

المطلوب: تعيين الصورة المباشرة لكل من: \mathbb{R} ، $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ، $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

يمكن الاستعانة بالبيان المقابل لتحديد الصورة المباشرة المطلوبة.

كما يمكن استعمال بعض دساتير التحويل أو استعمال إتجاه التغير.

لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{لأن} \quad g(\mathbb{R}) = \{\sin x, x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$$

بما أن g متزايد على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن:

$$g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[g(0), g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right[= [0, 1[$$

و بما أن g متناقص على المجال $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ فإن:

$$g\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\right) = \left[g\left(\frac{3\pi}{2}\right), g(\pi)\right] =]-1, 0]$$

الصورة العكسية: ليكن f تطبيقاً من مجموعة E نحو مجموعة F ، ولتكن B مجموعة جزئية من F .
نُسَمِّي الصورة العكسية للمجموعة B وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من E المُعرّفة كمايلي:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

ملاحظة: الرمز $f^{-1}(B)$ في f لا يعني بالضرورة التطبيق العكسي إلا إذا كان f تقابل.

خواص: لتكن B_1 و B_2 مجموعتان جزئيتان من F .

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \text{أ-}$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \quad \text{ب-}$$

البرهان:

أ- لدينا

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) &= \{x \in E, f(x) \in B_1\} \cup \{x \in E, f(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in E, (f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2)\} \\ &= \{x \in E, f(x) \in (B_1 \cup B_2)\} \\ &= f^{-1}(B_1 \cup B_2) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \text{ومنه}$$

ب- لدينا

$$\begin{aligned}
f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) &= \{x \in E, f(x) \in B_1\} \cap \{x \in E, f(x) \in B_2\} \\
&= \{x \in E, (f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2)\} \\
&= \{x \in E, f(x) \in (B_1 \cap B_2)\} \\
&= f^{-1}(B_1 \cap B_2)
\end{aligned}$$

ومنه $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

أمثلة:

(1) - لنعتبر التطبيق f في المثال الأول السابق.

المطلوب: تعيين الصورة العكسية لكل من: 1، -1.

لدينا:

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R}, x^2 = -1\} = \emptyset$$

(2) - لنعتبر التطبيق g في المثال الثاني السابق.

المطلوب: تعيين الصورة العكسية لكل من: 0، 2.

لدينا:

$$g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}, \sin x = 0\} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

بينما

$$g^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R}, \sin x = 2\} = \emptyset$$

تمارين للحل:

- المجموعات:

التمرين الأول:

A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E . برهن صحة مايلي:

$$1. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$2. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$3. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$4. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$5. A - B = A \cap \overline{B}$$

6. تحقق من صحة الخواص السابقة إذا علمت أن :

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{3, 4\}, B = \{1, 2, 4\}, C = \{2, 3, 4\}$$

التمرين الثاني:

A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E . برهن صحة مايلي:

$$1. A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$$

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B \quad .2$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad .3$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C) \quad .4$$

$$A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset \quad .5$$

التمرين الثالث:

إذا كانت A_1, A_2, \dots, A_n مجموعة جزئية من E ، فبيّن أن:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \quad .1$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \quad .2$$

- **العلاقات:**

التمرين الرابع:

لتكن \mathfrak{R} العلاقة المعرفة على \mathbb{R} كمايلي:

$$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow (x^3 + 8)(y^2 + 1) = (y^3 + 8)(x^2 + 1)$$

- (1) أتحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$
- ب- استنتج قيمة x حتى تكون $x \mathfrak{R} (-2)$ (x لها علاقة مع -2).
- (2) بيّن أنّ \mathfrak{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{R} ، ثمّ عيّن صنف تكافؤ العدد 8.

التمرين الخامس:

\mathfrak{R} علاقة في \mathbb{R}^* معرفة كمايلي:

$$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

- بيّن أنّ \mathfrak{R} علاقة تكافؤ في \mathbb{R}^* ، ثمّ عيّن صنف تكافؤ عنصر a من \mathbb{R}^* .

التمرين السادس:

نعرف على \mathbb{R}^2 العلاقة \mathfrak{R} كمايلي:

$$(a, b) \mathfrak{R} (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$$

- بيّن أنّ \mathfrak{R} علاقة ترتيب في \mathbb{R}^2 ، وهل هذا الترتيب كليّ؟.

التمرين السابع:

نفس أسئلة التمرين السادس السابق إذا عرفت علاقة \mathfrak{R} في \mathbb{R} كمايلي: $a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a^3 - b^3 \geq 0$.

- التطبيقات:

التمرين الثامن: لنعتبر f التطبيق المعرّف من $\mathbb{R} - \{2\}$ في \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$

و ليكن التطبيق g المعرّف من \mathbb{R} في نفسها بالشكل $g(x) = x^2$.

1. هل f متباين؟ وهل هو غامر؟، مع التبرير

2. نفس الأسئلة بالنسبة للتطبيق g .

3. عيّن (إن كان ممكنا) $g \circ f$ ، $f \circ g$.

التمرين التاسع: E ، F ، G ثلاث مجموعات.

f تطبيق للمجموعة E في F و g تطبيق للمجموعة F في G . أثبت صحّة كل خاصية من الخواص التالية:

1. $(f \text{ متباين}) \Rightarrow (g \circ f \text{ متباين})$

2. $(g \text{ غامر}) \Rightarrow (g \circ f \text{ غامر})$

3. $(g \text{ متباين}) \Rightarrow (g \circ f \text{ متباين و } f \text{ غامر})$

4. $(f \text{ غامر}) \Rightarrow (g \circ f \text{ غامر و } g \text{ متباين})$.

التمرين العاشر: ليكن f التطبيق المعرّف من $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ في $[0, +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \sqrt{2x-3}$

و ليكن g التطبيق المعرّف من $\mathbb{R} - \{1\}$ في $\mathbb{R} - \{1\}$ كمايلي: $g(x) = \frac{x}{x-1}$

1. أثبت أن f تقابل وعين تطبيقه العكسي f^{-1} .

2. أثبت أن g تقابل وعين تطبيقه العكسي g^{-1} .

التمرين الحادي عشر: a ، b عدنان حقيقيان، $E = [a, +\infty[$ ، $F = [b, +\infty[$. f التطبيق المعرّف من E في F

حيث $f(x) = 3x^2 - 4$

1. عيّن أصغر قيمة ممكنة لكل من العددين a و b حتى يكون التطبيق f تقابلا.

2. نفس السؤال من أجل $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

التمرين الثاني عشر: نعتبر التطبيق f لمجموعة E في مجموعة F . A_1 ، A_2 مجموعتان جزئيتان من E

و B_1 ، B_2 مجموعتان جزئيتان من F . بيّن صحّة الخواص التالية:

1. $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$

2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

4. $(B_1 \subset B_2) \Rightarrow (f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2))$

5. $f(A_1 \cap A_2) \subset (f(A_1) \cap f(A_2))$

6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

الفصل الثاني: بنية حقل الأعداد الحقيقية على \mathbb{R}

مقدمة: نظرا لحاجة الرياضيات إلى تعريف مجموعة أعداد أوسع من مجموعة الأعداد الناطقة \mathbb{Q} ، وحتى نُدرك هذه الحاجة يكفي القول إن حل بعض المعادلات لا يُمكن أن يتم بدون هذا التوسيع. خُذ مثلا المعادلة $x^2 = 2$ ، إنَّها لا تقبل حلا في \mathbb{Q} .

بالفعل: لو استعملنا البرهان بالخُلف وفرضنا أنَّها تقبل حلا في \mathbb{Q} لكان هذا الحل الناطق يُكتب على الشكل الوحيد

$$x = \frac{p}{q} \text{ حيث } p \text{ و } q \text{ أوليان فيما بينهما، وبالتالي يكون لدينا } \frac{p^2}{q^2} = 2 \text{ أي } p^2 = 2q^2 \text{ وهذا يعني أن } p^2 \text{ زوجي،}$$

فنكتبه على الشكل $p^2 = 2k^2$ ، لنجد $q^2 = 2k^2$ فيكون كذلك q^2 زوجي، ونعلم أنَّه مادام p^2 و q^2 زوجيان فإن p و q زوجيان فيكونان غير أوليين فيما بينهما وهذا تناقض مع ما فرضناه، وبالتالي فحل المعادلة السَّابقة لا يكون عددا ناطقا.

لهذا يتطلب حل هذه المعادلة إدخال مجموعة أخرى من الأعداد تتضمن أعدادا غير ناطقة وهي التي نصفها بالأعداد الصمَّاء مثل العدد $\sqrt{2}$ أو $-\sqrt{2}$ واللذان يُمثَّلان حلَّي المعادلة السَّابقة. فمجموعة الأعداد الحقيقية مُكوَّنة من الأعداد الناطقة و الصمَّاء.

سننتقل في هذا الفصل إلى بنية مجموعة الأعداد الحقيقية المزوَّدة بعمليتي الجمع والضرب المألوفتين، كما رأينا في الفصل السابق في جزء العلاقات أن مجموعة الأعداد الحقيقية مُرتَّبة كُليا بالعلاقة (\leq) ، وهذا يقودنا إلى دراسة العناصر الحادَّة للمجموعات الجزئية في \mathbb{R} ومنها التعرّف على المجموعة المحدودة. كما نُدرج في هذا الفصل القيمة المطلقة والجزء الصحيح لعدد حقيقي وبعض خصائصهما، والتطرّق إلى تعريف المجال، مع ذكر أنواعه والعمليات على المجالات (تقاطع و اتحاد المجالات)، هذا نظرا لأهمية وتوظيف هذه المفاهيم في معارف مختلفة في الفصول اللاحقة.

1.2 عمليات و خواص:

$$(1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + y) + z = x + (y + z) \text{ (الجمع تجميعي في } \mathbb{R} \text{)}.$$

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x \text{ (العدد 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع في } \mathbb{R} \text{)}.$$

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = 0 \text{ (لكل عدد حقيقي } x \text{ نظير } (-x) \text{ بالنسبة لعملية الجمع في } \mathbb{R} \text{)}.$$

$$(4) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x \text{ (الجمع تبديلي في } \mathbb{R} \text{)}.$$

نُلخص الخواص السابقة بالقول: البنية $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبديلية، ونقرأ \mathbb{R} مزوَّدة بالجمع زمرة تبديلية.

$$(5) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \times y) \times z = x \times (y \times z) \text{ (الضرب تجميعي في } \mathbb{R} \text{)}.$$

$$(6) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x \text{ (العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب في } \mathbb{R} \text{)}.$$

$$(7) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1 \text{ (لكل عدد حقيقي } x \text{ نظير } \frac{1}{x} \text{ بالنسبة لعملية الضرب في } \mathbb{R}^* \text{)}.$$

$$(8) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \times y = y \times x \text{ (الضرب تبديلي في } \mathbb{R} \text{)}.$$

وفي هذه الحالة نقول أن البنية (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبديلية.

(9) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ (الضرب توزيعي على الجمع في \mathbb{R}).
 بجمع الخواص السابقة (1) - (9) نقول أن البنية $(\mathbb{R}, +, \times)$ حقل تبديلي.

نعلم مما سبق أن العلاقة (\leq) علاقة ترتيب كُلي في \mathbb{R} ، فنقول أن مجموعة الأعداد الحقيقية مُرتبة كُليا بهذه العلاقة.
2.2 العناصر الحادة: لتكن A مجموعة جزئية من \mathbb{R} .

- نقول أن A محدودة من الأعلى إذا وُجد عدد حقيقي a بحيث: $\forall x \in A, x \leq a$. يُسمّى a حاد أعلى للمجموعة A

- إذا قبلت مجموعة الحواد العليا للمجموعة A قيمة صغرى تُسميها الحد الأعلى للمجموعة A ، ونرمز له بالرمز $\sup A$ (أصغر الحواد العليا).

- إذا كانت المجموعة A محدودة من الأعلى وكان a حاد من الأعلى لهذه المجموعة وينتمي لها فإننا نسميه القيمة العظمى للمجموعة A ونرمز لها بالرمز $\max A$. $\max A = a \Leftrightarrow ((a \in A) \wedge (\forall x \in A, x \leq a))$.

- نقول أن A محدودة من الأدنى إذا وُجد عدد حقيقي b بحيث: $\forall x \in A, x \geq b$. يُسمّى b حاد أدنى للمجموعة A

- إذا قبلت مجموعة الحواد الدنيا للمجموعة A قيمة كبرى تُسميها الحد الأدنى للمجموعة A ، ونرمز له بالرمز $\inf A$ (أكبر الحواد الدنيا).

- إذا كانت المجموعة A محدودة من الأدنى وكان b حاد من الأدنى لهذه المجموعة وينتمي لها فإننا نسميه القيمة الصغرى للمجموعة A ونرمز لها بالرمز $\min A$. $\min A = b \Leftrightarrow ((b \in A) \wedge (\forall x \in A, x \geq b))$.

ملاحظة: نقول عن المجموعة A أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأدنى.
أمثلة:

(1) - مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} محدودة من الأدنى بالعدد 0 ولدينا $\min \mathbb{N} = \inf \mathbb{N} = 0$ ، لكنها ليست محدودة من الأعلى.

(2) - إذا اعتبرنا المجال $[1, 3]$ من \mathbb{R} فإننا نلاحظ أن:

- مجموعة الحواد العليا لهذا المجال هي: $[3, +\infty[$

- مجموعة الحواد الدنيا لهذا المجال هي: $]-\infty, 1]$

- $\min [1, 3] = \inf [1, 3] = 1$ ، $\max [1, 3] = \sup [1, 3] = 3$

(3) - و إذا اعتبرنا المجال $]1, 3[$ من \mathbb{R} فإننا نلاحظ أن:

- مجموعة الحواد العليا لهذا المجال هي: $[3, +\infty[$

- مجموعة الحواد الدنيا لهذا المجال هي: $]-\infty, 1]$

- $\min]1, 3[$ غير موجود ، $\max]1, 3[= \sup]1, 3[= 3$ ، $\inf]1, 3[= 1$ لكن

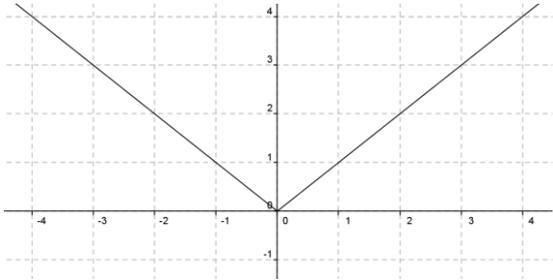
تطبيق: عيّن إن وُجد كل من الحد الأعلى، الحد الأدنى، القيمة العظمى و القيمة الصغرى للمجموعة A التالية:

$$A = \left\{ \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 1 \right\}$$

الحل: من $0 < x \leq 1$ نجد $1 < 1+x^2 \leq 2$ ومنه $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} < 1$ وبالتالي:
 $\min A = \inf A = \frac{1}{2}$ ، $\max A$ و $\sup A = 1$ غير موجود.

3.2 القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف: تُسمى القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x العدد الحقيقي الموجب الذي نرسم له بالرمز $|x|$ والمعروف بـ :



بيان دالة القيمة المطلقة: $(y = |x|)$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

بيانياً: تُمثل القيمة المطلقة بيانياً (الشكل المقابل) بنصفي

مستقيمين بنفس المبدأ (مبدأ المعلم).

$$\text{مثال: } |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \quad |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

خواص القيمة المطلقة:

(1) من أجل كل عدد حقيقي x : $|-x| = |x|$ ، $\sqrt{x^2} = |x|$ (حسب التعريف).

(2) من أجل كل عددين حقيقيين x و y :

$$|xy| = |x| \times |y| \quad \text{أ-}$$

$$\text{بالفعل: } |xy| = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2} = |x| \times |y|$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{ب-}$$

بالفعل:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\leq x^2 + y^2 + 2|xy|$$

$$= |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$= (|x| + |y|)^2$$

$$\text{وبالانتقال إلى الجذر: } |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\text{ج- مع } \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$$

$$\text{بالفعل: } \left| \frac{x}{y} \right| = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

(3) من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً a :

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

بالفعل: لدينا

$$|x| = a \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 0$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0$$

فلايجاد قيم x في كل حالة، ندرس إشارة الفرق $x^2 - a^2$ ، ونلخصها في الجدول التالي:

| | | | | | |
|-------------|-----------|------|-----|-----------|---|
| x | $-\infty$ | $-a$ | a | $+\infty$ | |
| $x^2 - a^2$ | + | 0 | - | 0 | + |

و حسب جدول الإشارة نحصل على المطلوب.

4.2 المجالات: إذا كان $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ حيث $a < b$ فإن المجموعات التالية:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

تُسمى على التوالي مجالاً مغلقاً، مفتوحاً، نصف مغلق (أو نصف مفتوح)، نصف مغلق (أو نصف مفتوح).

كما نتبى الرموز التالية (مجالات غير محدودة من الطرفين أو من طرف واحد):

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$

تطبيق: عين مايلي (تقاطع و إتحاد المجالات):

$$A_1 = [1, 3[\cap]2, 5]$$

$$A_2 = [1, 3[\cup]2, 5]$$

$$A_3 =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cap]-\frac{1}{2}, 7[$$

$$A_4 =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, 7[$$

الحل:

نُمثل بيانيا هذه المجالات على محور الأعداد الحقيقية لتعيين التقاطع و الإتحاد في كل مرة، لنجد:

$$A_4 =]-\infty, 7[\quad , A_3 = \emptyset \quad , A_2 = [1, 5] \quad , A_1 = [2, 3[$$

5.2 الجزء الصحيح لعدد حقيقي: ليكن x عدد حقيقي.

تعريف: يُسمى العدد الصحيح الوحيد n_0 الذي يُحقق $n_0 \leq x < n_0 + 1$ بالجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ونرمز له عادة بالرمز $E(x)$ أو $[x]$.

أمثلة:

يمكن الاستعانة بالبيان المقابل (بيان دالة الجزء الصحيح)

لإيجاد قيمة الجزء الصحيح لكل عدد حقيقي مُعطى.

$$0 \leq \frac{1}{2} < 0+1 \quad \text{لأن} \quad E\left(\frac{1}{2}\right) = 0 .$$

$$1 \leq \sqrt{2} < 1+1 \quad \text{لأن} \quad E(\sqrt{2}) = 1 .$$

$$-4 \leq -3.14 < -4+1 \quad \text{لأن} \quad E(-3.14) = -4 .$$

خواص:

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, E(n) = n \quad (\text{لأن } n \leq n < n+1)$$

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, E(x+n) = E(x) + n$$

بالفعل: لو فرض العدد الصحيح n_0 هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x (بمعنى $E(x) = n_0$) فيتحقق

$$n_0 \leq x < n_0 + 1 \quad \text{ومنه} \quad n_0 + n \leq x + n < n_0 + n + 1 \quad \text{وهذا يعني} \quad E(x+n) = E(x) + n .$$

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$$

بالفعل: من التعريف، يكون لدينا $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$ وبالتالي: $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

نعتبر المجموعة A الجزئية من \mathbb{R} حيث:

$$A = \left\{ x = 2 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(1) تحقق أنّ A مجموعة محدودة.

(2) عيّن إن وجدت الأعداد $\sup A$ ، $\inf A$ ، $\max A$ ، $\min A$.

التمرين الثاني:

نفس أسئلة التمرين الأول السابق بالنسبة للمجموعات التالية:

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{x} \in \mathbb{R}, \quad \frac{7}{5} < x \leq \sqrt{2} \right\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x - 6 \leq 0\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^4 < 81\}$$

$$.A_4 = \{x = -1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

التمرين الثالث:

. \mathbb{R} و B مجموعتان جزئيتان غير خاليتين ومحدودتان من \mathbb{R} .

برهن على صحة الاستلزامين التاليين:

$$\text{أ- } (A \subset B) \Rightarrow (\sup A \leq \sup B)$$

$$\text{ب- } (A \subset B) \Rightarrow (\inf A \geq \inf B)$$

التمرين الرابع:

لنعتبر h التطبيق المعرّف من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} كمايلي: $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$

(1) عيّن الصورة المباشرة لكل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[0, +\infty[$ بالتطبيق h .

(2) أثبت أنّ المجموعة A حيث $A = \left\{ \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R} \right\}$ محدودة في \mathbb{R} مُعيّنًا كل من $\sup A$ ، $\inf A$.

التمرين الخامس:

لنعتبر h التطبيق المعرّف من $\mathbb{R} - \{-2\}$ نحو \mathbb{R} كمايلي: $h(x) = |x-2| + \frac{4}{x+2}$

(1) عيّن الصورة المباشرة لكل من المجالين $[0, 2]$ و $[2, 6]$ بالتطبيق h .

(2) أثبت أنّ المجموعة A حيث $A = \left\{ |x-2| + \frac{4}{x+2}, x \in \mathbb{R} \right\}$ محدودة، مُعيّنًا كل من $\sup A$ ، $\inf A$.

التمرين السادس:

لتكن f دالة مُعرّفة على \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = |x+1| + |-x+3|$

(1) أكتب العبارة $f(x)$ دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

(2) ارسم (C_f) بيان الدالة f في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

(3) حل في \mathbb{R} المتراجحة $f(x) < 6$ ، ثمّ تحقق من النتيجة بيانياً.

الفصل الثالث: الدوال العددية لمتغير حقيقي

مقدمة و تمهيد: إنّ موضوع الدوال العددية له أهمية كبيرة في ميادين شتى كالفيزياء، الكيمياء، الاقتصاد، البيولوجيا،... فهي تُعتبر آلية للتعبير على وضعيات تدرس حدوث شيء ما (x) يتعلّق بشيء آخر (y) بالعلاقة $y = f(x)$ (كالمسافة بالنسبة للزمن)، في بعض الأحيان تكون معطيات هذه الوضعيات على شكل قيم متقطعة، وفي أحيان أخرى على شكل قيم مستمرة (يكون التعبير فيها بواسطة مجالات)، في هذه الحالة نضطر إلى إدراج بعض المفاهيم التي تُعطي للنتائج المستخلصة من هذه الوضعيات أكثر دقة وواقعية، كالنهاية (على الأطراف)، الاستمرار (لتتبع طبيعة النتائج المستخرجة في مسيرتها، فاستمرار وضعيتها إذا تواصلت دون حدوث انقطاعات مفاجئة في مسيرتها، كذلك الحال القول عن دالة إنّها مستمرة إذا كان أيّ تغيير طفيف يطرأ على المتغير x يُؤاكيه سلوك مُماثل لـ $(y = f(x))$ ، مع إدراج نظرية القيم المتوسطة والتي من شروطها الاستمرار وأهميتها تكمن في إمكانية وجود قيم لـ (x) المُرتبطة بقيمة معلومة لـ (y) (إمكانية وجود حلول للمعادلة $f(x) = k$ مع k قيمة معلومة)، كما يمكن توظيف أو ترجمة هذه المفاهيم بيانياً لتوضيح الصورة أكثر عن تلك النتائج المُستخلصة وسهولة التعبير عليها. نُقدّم في هذا الفصل الجوانب المُحيطة بالدوال نعرض فيها: مجموعة التعريف، الدالة الدورية، الزوجية، الفردية و المحدودة، إتجاه التغير.

قبل أن نستعرض هذه الجوانب، نُقدّم أولاً تعريف للدالة العددية لمتغير حقيقي.

تعريف: نسمي دالة عددية لمتغير حقيقي كل علاقة f تُرَفّق بكل عنصر x من \mathbb{R} عنصراً واحداً على الأكثر $y = f(x)$ في \mathbb{R} ونكتب

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

- إذا كانت f و g دالتان عدديتان لمتغير حقيقي فإن $f + g$ ، $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ مع $g \neq 0$ ، λf حيث λ عدد حقيقي، هي دوال عددية لمتغير حقيقي.

1.3 مجموعة التعريف: مجموعة تعريف الدالة العددية f لمتغير حقيقي هي مجموعة الأعداد من \mathbb{R} التي لها صور في \mathbb{R} ونرمز لها بالرمز D_f .

أمثلة: في كل ممايلي f دالة عددية للمتغير الحقيقي x .

(1) - إذا كانت $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x + 1$ ، فالدالة f كثيرة حدود، وهي مُعرّفة على \mathbb{R} ومنه $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

(2) - إذا كانت $f(x) = \frac{x+3}{x^2-2}$ ، فالدالة f ناطقة، وتكون مُعرّفة من أجل قيم x التي تجعل المقام لا يُساوي الصفر

$$(x^2 - 2 \neq 0) \text{ ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

(3) - إذا كانت $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ، فالدالة f جذرية، وتكون مُعرّفة من أجل قيم x التي تجعل ما داخل الجذر أكبر أو

$$\text{يساوي الصفر } (x^2 - 1 \geq 0) \text{ ومنه } D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

(4) - إذا كانت $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x-3}\right)$ ، فالدالة f لوغاريتمية، وتكون مُعرّفة من أجل قيم x بحيث $\frac{2-x}{x-3} > 0$ ومنه $D_f =]2,3[$.

ملاحظة: حسب تعريف كل من الدالة والتطبيق، إن كل تطبيق دالة، والعكس ليس دائما صحيح. فتكون الدالة تطبيقا إذا كانت مجموعة تعريفها تساوي مجموعة بدئها.

2.3 الدالة الدورية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي مُعرّفة على المجموعة D .

نقول عن الدالة f إنها دورية على D إذا وُجد عدد حقيقي موجب تماما t يُحقق مايلي:

$$\forall x \in D, (x+t) \in D \wedge (x-t) \in D, f(x+t) = f(x)$$

- يُسمى العدد t دورا لها، وهو أصغر عدد حقيقي موجب تماما يُحقق ما سبق.

ملاحظة: في المستوي المنسوب إلى معلم (O, \vec{u}, \vec{v}) .

إذا كان t دورا للدالة f و (C_f) تمثيلها البياني، فإن كل نقط المنحنى (C_f) التي فواصلها من الشكل $(x+tk)$ حيث

$(k \in \mathbb{Z})$ لها نفس الترتيب $f(x)$ ، ولرسم المنحنى (C_f) يكفي رسمه في مجال طول دوره t ثم إتمامه باستعمال

إنسحابات أشعتها $kt\vec{u}$.

أمثلة:

(1) - الدالتان: الجيب (\sin) و جيب التمام (\cos) ، دوريتان على \mathbb{R} ودور كل منهما 2π .

$$\text{بالفعل: } \forall x \in \mathbb{R}, (x+2\pi) \in \mathbb{R} \wedge (x-2\pi) \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

$$\text{وكذا } \forall x \in \mathbb{R}, (x+2\pi) \in \mathbb{R} \wedge (x-2\pi) \in \mathbb{R}, \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

(2) - لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كمايلي: $f(x) = \sin(\pi x)$. بين أنها دورية مُعينا دورها.

نفرض أنها دورية ودورها t ، فهو يُحقق $f(x+t) = f(x)$ أي $\sin(\pi(x+t)) = \sin(\pi x)$ معناه $\pi t = 2\pi$

ومنه $t = 2$.

بالفعل: الدالة f دورية على \mathbb{R} ودورها 2، لأن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+2) \in \mathbb{R} \wedge (x-2) \in \mathbb{R}, \sin(\pi(x+2)) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin(\pi x)$$

(3) - لنعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كمايلي: $g(x) = x - E(x)$. بين أنها دورية مُعينا دورها.

نفرض أنها دورية ودورها t ، فهو يُحقق $g(x+t) = g(x)$ أي $x+t - E(x+t) = x - E(x)$

ومنه $E(x+t) = E(x) + t$ معناه $t \in \mathbb{Z}$ ، وبما أنه أصغر عدد حقيقي موجب تماما كونه دور فإن $t = 1$.

بالفعل: الدالة g دورية على \mathbb{R} ودورها 1، لأن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+1) \in \mathbb{R} \wedge (x-1) \in \mathbb{R}, g(x+1) = x+1 - E(x+1) = x+1 - E(x) - 1 = x - E(x) = g(x)$$

3.3 الدالة الزوجية: لتكن f دالة عددية مُعرّفة على مجموعة D .

تكون الدالة f زوجية على D إذاتحقق مايلي:

$$\forall x \in D, (-x) \in D \wedge f(-x) = f(x)$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f زوجية وكان (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد فإن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

4.3 الدالة الفردية: لتكن f دالة عددية مُعرّفة على مجموعة D .

تكون الدالة f فردية على D إذا تحقق مايلي:

$$\forall x \in D, (-x) \in D \wedge f(-x) = -f(x)$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f فردية وكان (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم (O, \vec{u}, \vec{v}) فإن المبدأ O هو مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

أمثلة: في كل ممايلي f دالة عددية للمتغير الحقيقي x .

(1) إذا كانت $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$ فإن $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

في هذه الحالة $f(x) = f(-x)$ ، $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$ ، وبالتالي f دالة زوجية.

(2) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x$ فإن $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

في هذه الحالة $f(x) = -f(-x)$ ، $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$ ، وبالتالي f دالة فردية.

(3) إذا كانت $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ فإن $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

في هذه الحالة $(-x) \notin D_f, \exists x \in D_f$ (حيث أن العدد 2 من D_f لكن -2 لا ينتمي إلى D_f) ، وبالتالي f دالة لا زوجية و لا فردية.

5.3 الدالة المحدودة:

تعريف 1: f دالة عددية معرّفة على مجموعة D (جزء من \mathbb{R}).

تكون الدالة f محدودة إذا كانت المجموعة $f(D)$ (الصورة المباشرة المحتواة في \mathbb{R}) محدودة.

تعريف 2: f دالة عددية معرّفة على مجموعة D (جزء من \mathbb{R}).

نقول عن الدالة f أنها محدودة إذا وُجد ثابت حقيقي موجب تماما M بحيث $|f(x)| \leq M, \forall x \in D$.

أمثلة:

(1) الدالة العددية $f: x \mapsto \sin x$ حيث f محدودة على \mathbb{R} لأن $|\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) الدالة العددية $g: x \mapsto \ln x$ حيث g ليست محدودة على \mathbb{R}_+^* لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(3) الدالة العددية $h: x \mapsto x - E(x)$ حيث h محدودة على \mathbb{R} .

بالفعل: نعلم أن

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$$

لنجد

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x - E(x) < 1$$

أي $0 \leq h(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ وهو المطلوب.

6.3 إتجاه تغير دالة: f دالة مُعرّفة على مجال I من \mathbb{R} .

- تكون f متزايدة على I إذا تحقق مايلي:
 $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- تكون f متناقصة على I إذا تحقق مايلي:
 $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- تكون f ثابتة على I إذا تحقق مايلي:
 $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

ملاحظة:

- إذا كان في التعريفين الأولين المتباينة الثانية تامّة فنقول أن f متزايدة تماما (متناقصة تماما على الترتيب) على I

- إذا كانت f إما متزايدة فقط أو متناقصة فقط على I فنقول أن f رتيبة على I .

دراسة مثال: لتكن الدالة العددية f المعرفة كمايلي: $f: x \mapsto \frac{3}{x-1}$

المطلوب: دراسة إتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجموعة تعريفها $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

- على المجال $]1, +\infty[$: ليكن العدان x_1 و x_2 من المجال $]1, +\infty[$ حيث $x_1 < x_2$

$$\text{ومنه } 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \text{ إذن } \frac{3}{x_1 - 1} > \frac{3}{x_2 - 1}$$

و بالتالي f متناقصة تماما على $]1, +\infty[$.

- على المجال $]-\infty, 1[$: ليكن العدان x_1 و x_2 من المجال $]-\infty, 1[$ حيث $x_1 < x_2$

$$\text{ومنه } x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \text{ إذن } \frac{3}{x_1 - 1} > \frac{3}{x_2 - 1}$$

و بالتالي f متناقصة تماما على $]-\infty, 1[$.

النتيجة: الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$.

نسبة التزايد: نسبة تزايد الدالة f بين العددين الحقيقيين المختلفين x_1 و x_2 من المجال I هي النسبة

$$\theta = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

ولدينا النتائج التالية:

- تكون f متزايدة على I إذا تحقق مايلي:
 $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \neq x_2: \theta \geq 0$
- تكون f متناقصة على I إذا تحقق مايلي:
 $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \neq x_2: \theta \leq 0$
- تكون f ثابتة على I إذا تحقق مايلي:
 $\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \neq x_2: \theta = 0$

دراسة مثال: إن نسبة تزايد الدالة f في المثال السابق بين العددين المختلفين x_1 و x_2 في كل مجال من مجالي تعريفها هي:

$$\theta = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-3}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

فلاحظ أن $\theta < 0$ على كل مجال من المجالين $]-\infty, 1[$ ، $], 1, +\infty[$ ، ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty, 1[$ ، $], 1, +\infty[$.

تمارين للحل:

نعتبر في كل ممّا يلي الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x .

التمرين الأول:

عيّن مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة ممّا يلي:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (3) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^2-5x+4}} \quad (2) \quad f(x) = \frac{3}{x^3+x^2-2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|-1} \quad (6) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-5x+4}} \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{E(x)-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \quad (8) \quad f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}) \quad (7)$$

التمرين الثاني: (اختيار من مُتعدّد)

عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الأقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

(1) مجموعة تعريف الدالة $x \mapsto \ln(|x|-1)$ هي:

$$]0, +\infty[\quad (أ) \quad]1, +\infty[\quad (ب) \quad]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad (ج)$$

(2) تكون الدالة $x \mapsto \frac{x-x^3}{\sqrt{x^2(x+3)(3-x)}}$ على $]-3, 0[\cup]0, 3[$:

(أ) فردية (ب) زوجية (ج) لا فردية و لا زوجية

(3) الدالة $x \mapsto \frac{\sin^2 x - x^4}{3\cos x}$ زوجية على المجال:

$$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad (أ) \quad]0, \frac{\pi}{2}[\quad (ب) \quad]-\frac{\pi}{2}, 0[\quad (ج)$$

(4) الدالة $x \mapsto \sin \frac{2}{3}x - 3\sin x$ دورية على \mathbb{R} ودورها هو:

$$2\pi \quad (أ) \quad 3\pi \quad (ب) \quad 6\pi \quad (ج)$$

التمرين الثالث:

بيّن أن الدالة f دورية معينة دورها في كل حالة ممّا يلي:

$$f(x) = \cos 2x - 4 \cos x \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \sin \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) \quad (2)$$

$$f(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \quad (3)$$

التمرين الرابع:

أدرس إن كانت الدالة f زوجية أو فردية أو غير ذلك في كل حالة ممّا يلي :

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos 3x}{x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \quad (4)$$

الفصل الرابع: نهايات الدوال

مقدمة: في هذا الفصل نتطرق إلى النهايات للدوال، فنسرد تعريف لأنواع النهايات لتقريب مفهوم النهاية (نهاية منتهية وغير منتهية عند عدد حقيقي، نهاية منتهية وغير منتهية عند اللانهاية)، ثم نركز على الجانب التطبيقي وهو حساب النهايات باستخدام القواعد المناسبة، مع إدراج تطبيقات متنوعة هدفها كيفية تطبيق القواعد المُدرجة واكتساب الطرق المختلفة لإزالة حالات عدم التعيين.

1.4 نهاية منتهية عند عدد حقيقي: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح I من \mathbb{R} يشمل العدد a .

تعريف 1: نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من \mathbb{R} عند a إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{ونكتب}$$

ملاحظة: إثبات أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ باستخدام التعريف يتمثل في إيجاد α بدلالة ε و a .

مثال: لنثبت أن $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$ باستخدام التعريف، أي نثبت أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: |x - 1| < \alpha \Rightarrow |(2x + 1) - 3| < \varepsilon$$

$$\text{ليكن } \varepsilon > 0 \text{ بحيث } |(2x + 1) - 3| < \varepsilon$$

وبالتالي

$$|(2x + 1) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

فيكفي أخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

تعريف 2 (النهاية من اليمين): نعتبر في هذه الحالة المجال I من الشكل $I = [a, a + \delta[$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من \mathbb{R} عند a من اليمين (أو عند a بقيم أكبر) إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: 0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \quad \text{ونكتب}$$

تعريف 3 (النهاية من اليسار): نعتبر في هذه الحالة المجال I من الشكل $I =]a - \delta, a]$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من \mathbb{R} عند a من اليسار (أو عند a بقيم أصغر) إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: 0 < -(x - a) < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{ونكتب}$$

ملاحظات:

(1) - النهاية إن وُجدت فهي وحيدة.

(2) - نقول عن f أنها تقبل نهاية عند a إذا كانت النهاية من اليمين تُساوي النهاية من اليسار عند a .

فلاإثبات أن دالة لاتقبل نهاية عند عدد حقيقي، يُمكن أن تُبين أن النهاية من اليمين لا تُساوي النهاية من اليسار عند هذا العدد.

$$\text{مثال: لنعتبر الدالة } f \text{ المُعرّفة على } \mathbb{R} - \{2\} \text{ بـ: } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

نُلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} = 12$$

فالدالة f تقبل نهاية (تساوي) 12 عند 2.

مثال آخر: بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ غير موجودة.

2.4 نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح I من \mathbb{R} يشمل العدد a .

تعريف 1: نقول عن f أنها تؤول إلى $+\infty$ عند a إذا تحقق مايلي:

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0: |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ونكتب}$$

تعريف 2: نقول عن f أنها تؤول إلى $-\infty$ عند a إذا تحقق مايلي:

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0: |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{ونكتب}$$

3.4 نهاية منتهية عند اللانهاية:

تعريف 1: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $[\delta, +\infty[$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من \mathbb{R} عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0: x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ونكتب}$$

تعريف 2: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $]-\infty, \delta]$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من \mathbb{R} عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0: x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{ونكتب}$$

مثال: لنُبين باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

أي نشبت أن

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0: x > B \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

ليكن $\varepsilon > 0$ بحيث $\frac{1}{x} < \varepsilon$

وبالتالي يكون لدينا

$$x \in]0, +\infty[\text{ مع } \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$. B = \frac{1}{\varepsilon} \text{ فنختار}$$

4.4 نهاية غير منتهية عند اللانهاية:

تعريف 1: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $]\delta, +\infty[$ حيث $\delta > 0$. نقول عن f أنها تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall A > 0, \exists B > 0: x > B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ ونكتب}$$

تعريف 2: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $]-\infty, \delta[$ حيث $\delta > 0$. نقول عن f أنها تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall A > 0, \exists B > 0: x < -B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ونكتب}$$

$$\text{مثال: لنُبين باستعمال التعريف أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

أي نثبت أن

$$\forall A > 0, \exists B > 0: x < -B \Rightarrow x^2 > A$$

ليكن $A > 0$ (كبير بالقدر الكافي) بحيث $x^2 > A$ ومنه

$$x \in]-\infty, 0[\text{ مع } \begin{aligned} x^2 > A &\Leftrightarrow |x| > \sqrt{A} \\ &\Leftrightarrow x < -\sqrt{A} \end{aligned}$$

$$. B = \sqrt{A} \text{ فنختار}$$

ملاحظة: لإثبات أن نهاية f عند a ($+\infty$ أو $-\infty$) غير موجودة، يكفي إيجاد متتاليتين (x_n) و (y_n) لهما نفس النهاية a ($+\infty$ أو $-\infty$)، بينما نهايتي المتتاليتين $f(x_n)$ و $f(y_n)$ مختلفتين.

مثال تطبيقي: لنثبت أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ غير موجودة.

لتكن المتتاليتين (x_n) و (y_n) المُعرّفتين بـ:

$$y_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ و } x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty \text{ لدينا}$$

لكن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

فهما مختلفتان، ممّا يعني أن النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ غير موجودة.

5.4 العمليات الجبرية على النهايات: f و g دالتان عدديتان، l ، l' عددان حقيقيان و a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، ندرّج: ح ع ت، اختصارا للكتابة حالة عدم تعيين.

- نهاية المجموع:

| | | | | | | |
|--|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ | l | l | l | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ح ع ت |

- نهاية الجداء:

| | | | | | | | | | |
|---|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ | l | $l > 0$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $l < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ∞ |
| $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) =$ | ll' | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ح ع ت |

- نهاية الجداء:

| | | | | | | | | | | |
|---|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ | l | l | l | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ∞ | ∞ | 0 |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$ | $l' \neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | 0 | ∞ | 0 |
| $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) =$ | $\frac{l}{l'}$ | 0 | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ∞ | ح ع ت | ح ع ت |

حالات عدم التعيين: هناك أربع حالات عدم التعيين وهي: $+\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، $\frac{0}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{0}$.

ولإزالتها ننتج بعض الطرق منها: الضرب والقسمة في المرافق، الاختزال، استعمال العدد المشتق،...

قواعد إجرائية:

- النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ أو $-\infty$.

- النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ: $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 - 1}$

لدينا حالة عدم تعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة الاجرائية الثانية السابقة نتحصل على

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

نهاية دالة مركبة: f و g دالتان عدديتان، a ، b و c تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ وكانت $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

مثال: نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right)$ ونريد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

نلاحظ أن h هي مركب الدالتين f و g بهذا الترتيب ($h = g \circ f$) حيث $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}$ و $g(x) = \sin x$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ وكانت $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$.

النهايات بالمقارنة: f ، g و h ثلاث دوال مُعرّفة على مجال مفتوح I يشمل a .

$$(1) - \text{إذا كانت } \forall x \in I, g(x) \leq f(x) \text{ وكانت } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$(2) - \text{إذا كانت } \forall x \in I, g(x) \geq f(x) \text{ وكانت } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$(3) - \text{إذا كانت } \forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ وكانت } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

ملاحظة: تبقى هذه القواعد صحيحة عند $+\infty$ أو $-\infty$.

دراسة أمثلة:

$$(1) - \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } f(x) = x + \sin x$$

$$\text{نعلم أنه: } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{ومنه } \forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$(2) - \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ: } f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{نعلم أنه: } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{ومنه } \forall x \in]0, +\infty[, \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

تطبيقات متنوعة:

$$\text{تطبيق 1: لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} - \{-2, 1\} \text{ بـ: } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$$

- أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

الحل:

مجموعة تعريف هذه الدالة هي:

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$$

- النهاية عند $-\infty$ ، $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

- النهاية عند -2 : في البداية هناك حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ ، فنستعمل التحليل ثم الاختزال لإزالتها

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+1}{x-1} = -\frac{5}{3}$$

- النهاية عند 1: في هذه الحالة ندرس إشارة المقام و نُقسّم النهاية من اليمين ومن اليسار عند 1

| | | | | |
|---------------|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | 1 | $+\infty$ |
| $x^2 + x - 2$ | $+$ | 0 | $-$ | $+$ |

وبالتالي:

$$\left((x^2 + x - 2) \rightarrow 0^-, (x^3 + 2x^2 + x + 2) \rightarrow 6 \right) \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\left((x^2 + x - 2) \rightarrow 0^+, (x^3 + 2x^2 + x + 2) \rightarrow 6 \right) \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

تطبيق 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x}$.

- أدرس نهايات الدالة f (عند $+\infty$ و $-\infty$).

الحل:

- النهاية عند $+\infty$: في البداية هناك حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$ ، فنستعمل المرافق لإزالتها

(بالضرب والقسمة)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = 1 \end{aligned}$$

- النهاية عند $-\infty$: بنفس الطريقة نجد

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = -1 \end{aligned}$$

تطبيق 3: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$.

- احسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

معلومة: العدد المشتق للدالة f عند عدد a مُعرّف كمايلي: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

الحل:

في البداية نلاحظ أن هناك حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ ، فنستعمل تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto \cos x$ عند 0 لإزالتها

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = -\sin 0 = 0$$

حيث $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos x)' = -\sin x$

- بنفس الطريقة يمكن حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1$$

حيث $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x)' = \cos x$

تطبيق 4: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4, 0[\cup]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

- احسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

الحل:

في البداية نلاحظ أن هناك حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ ، فنستعمل تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto \sqrt{x+4}$ عند 0 لإزالتها

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{0+4}}{x - 0} = \frac{1}{2\sqrt{0+4}} = \frac{1}{4}$$

حيث $\forall x \in]-4, 0[\cup]0, +\infty[, (\sqrt{x+4})' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$

تمارين للحل:

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ على كل نهاية ممايلي، مع التعليل:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4}{x^2 + 2x + 4} = 3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 6x + 7}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$(4) \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ فإن } \forall x \in \mathbb{R}^*, -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$(5) \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ فإن } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x - 1$$

$$(6) \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x^2$$

التمرين الثاني:

احسب النهاية في كل حالة من الحالات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x+2}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x+2x)}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{x^2+x+4}) \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) \quad (10)$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = \frac{4+\sin x}{x^2}$

(1) عيّن عدنان حقيقيان a و b بحيث: $\forall x \in \mathbb{R}, a \leq 4+\sin x \leq b$

(2) بيّن أن: $\forall x \in \mathbb{R}^*, u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ ، حيث u و v دالتان يُطلب تعيينهما.

(3) استنتج النهايتين التاليتين: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(4) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

التمرين الرابع:

(1) بيّن أن: $\forall x \in \mathbb{R}, 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \sin x \geq 3\sqrt{x}$

(2) استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x} + \sqrt{x} \sin x)$

التمرين الخامس:

(1) بيّن أن: $\forall x \in \mathbb{R}^*, u(x) < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq v(x)$ ، حيث u و v دالتان يُطلب تعيينهما.

(2) استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$

الفصل الخامس: الدوال المُستمرّة

مقدمة: في هذا الفصل نُدرج الاستمرار، بتقديم مفهوم الاستمرار عند قيمة تُمَّ على مجال، تمديد دالة بالاستمرار عند قيمة والتطرّق إلى نظرية القيم المتوسطة في جانبيها الجبري و البياني، ومنها إلى نظرية الدوال المستمرة والرتيبة تماما ودورها في وجود ووحدانية حل المعادلة $f(x) = \lambda$ على مجال، كذلك من أهداف هذا الفصل كيفية تعيين صورة مجال بواسطة دالة مستمرة ورتيبة تماما.

1.5 تعريف الاستمرار عند قيمة: f دالة عددية مُعرّفة على مجال مفتوح I يشمل العدد الحقيقي a .

نقول عن f أنها مُستمرّة عند a إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

ملاحظات:

(1) - القول أن f مُستمرّة عند a (حسب تعريف النهاية) معناه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

(2) - إذا تحقق $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ نقول أن f مُستمرّة من اليمين عند a .

(3) - إذا تحقق $\lim_{x \leftarrow a} f(x) = f(a)$ نقول أن f مُستمرّة من اليسار عند a .

(4) - تكون f مُستمرّة عند a إذا وفقط إذا كانت مُستمرّة من اليمين و من اليسار عند a .

(5) - تكون f مُستمرّة على المجال المفتوح I من \mathbb{R} إذا كانت مُستمرّة عند كل قيمة من هذا المجال.

(6) - تكون f مُستمرّة على المجال المغلق $[a, b]$ من \mathbb{R} إذا كانت f مُستمرّة على المجال المفتوح $]a, b[$ و مُستمرّة من اليمين عند a و مُستمرّة من اليسار عند b .

أمثلة:

(1) - الدالة $|x|$ مُستمرّة على \mathbb{R} .

(2) - الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ مُستمرتان على \mathbb{R} .

(3) - الدالة $E(x)$ مُستمرّة على $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

تطبيق: f دالة مُعرّفة على \mathbb{R} كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

أدرس استمرار f عند 0 .

الحل:

لدينا $f(0) = e^0 = 1$.

- $\lim_{x \leftarrow 0} f(x) = \lim_{x \leftarrow 0} (-x) = 0 \neq f(0)$ ومنه f غير مستمرّة من اليسار عند 0 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = 1 = f(0)$ ومنه f مستمرّة من اليمين عند 0 .

إذن f غير مستمرّة عند 0 .

العمليات الجبرية على الدوال المستمرة:

f و g دالتان مستمرتان عند عدد حقيقي a ، وليكن α ، β عدداً حقيقيين ثابتان.

- الدالة $\alpha f + \beta g$ مستمرة عند a .

- الدالة $f \times g$ مستمرة عند a .

- إذا كانت $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة عند a .

استمرار تركيب دالتين:

ليكن I و J جزءان من \mathbb{R} ، $f: I \rightarrow J$ و $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ دالتين وليكن a عدداً من I .

إذا كانت f مستمرة عند a و g مستمرة عند $f(a)$ فإن $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ مستمرة عند a .

نتائج:

- كل دالة كثير حدود مستمرة على \mathbb{R} .

- كل دالة ناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

2.5 التمديد بالاستمرار:

a عدد حقيقي و I مجال من \mathbb{R} يشمل a .

f دالة معرفة و مستمرة عند كل قيمة من $I - \{a\}$ ، إذا قبلت الدالة f نهاية منتهية l عند a نقول أن f تقبل

امتداداً بالاستمرار عند a ، والدالة \tilde{f} المعرفة على I كمايلي:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I - \{a\} \\ l, & x = a \end{cases}$$

تسمى امتداد الدالة f بالاستمرار عند a .

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* كمايلي: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ، فهي غير معرفة عند 0 و مستمرة على $\mathbb{R} - \{0\}$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ فإن الدالة f تقبل امتداداً بالاستمرار عند 0 ، والدالة \tilde{f} المعرفة على \mathbb{R} كمايلي:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

هي امتداد الدالة f بالاستمرار عند 0 .

3.5 نظرية القيم المتوسطة

أ-نظرية القيم المتوسطة (الحالة الخاصة):

إذا كانت الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $[a, b]$ و كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي

c من المجال $[a, b]$ بحيث $f(c) = 0$.

التفسير البياني: f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم (O, \vec{u}, \vec{v}) ، إذا كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة على الأقل فاصلتها c محصورة بين a و b وهو ما يفسر $f(c) = 0$.

ب- نظرية القيم المتوسطة (الحالة العامة):

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$.

من أجل كل عدد حقيقي λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c) = \lambda$.

نتائج:

- إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ فإن العدد c في النظريتين يكون وحيدا.

- إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I من \mathbb{R} فإن صورة المجال I بواسطة هذه الدالة هو المجال $f(I)$ من \mathbb{R} .

مثال: الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ مستمرة و رتيبة تماما (متناقصة تماما) على كل مجال I من المجالين $]-\infty, 1[$ ، $]1, +\infty[$.

- إذا كان $I = [0, 1[$ فإن $f(I) =]-\infty, -1]$.

- إذا كان $I = [-1, 0]$ فإن $f(I) = [-1, 0]$.

- إذا كان $I = [2, +\infty[$ فإن $f(I) =]1, 3]$.

4.5 الدوال المستمرة والرتيبة تماما:

نظرية: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

البرهان: نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ و ليكن λ عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة (الحالة العامة)، يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c) = \lambda$.

لإثبات الوحدانية نستعمل البرهان بالخلف، نفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c') = \lambda$. يكون لدينا حينئذ $c \neq c'$ و $f(c) = f(c')$ ، وهذا تناقض كون f رتيبة تماما على المجال $[a,b]$. وبالتالي يوجد عدد حقيق وحيد c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c) = \lambda$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = \lambda$. ملاحظة: تبقى النظرية السابقة قائمة على مجال مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

أمثلة:

(1)- لنبين أن المعادلة $x^3 - 3x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا بين 0 و 1.

فنعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ، لدينا الشروط التالية:

- الدالة f مستمرة على $[0,1]$.

- $f(0) \times f(1) = 1 \times (-1) = -1 < 0$

- f رتيبة تماما (متناقصة تماما) على $[0,1]$.

فحسب النظرية السابقة المعادلة $f(x)=0$ (أي $x^3-3x+1=0$) تقبل حلا وحيدا بين 0 و 1.

(2) - لتكن الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ ب: $f(x)=\frac{-2}{x+1}$.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على $]-1,+\infty[$ و لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي λ من المجال $]-\infty,0[$ ، المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $]-1,+\infty[$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

(1) f دالة مُعرّفة كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

أ- عين مجموعة تعريفها.

ب- أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها.

(2) نفس الأسئلة السابقة، إذا عُرِّفت الدالة f كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

f دالة مُعرّفة كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \alpha}{x^2 + 4}, & x > 0 \\ \sqrt{2x^2 + 1}, & x \leq 0 \end{cases}$$

- عين العدد الحقيقي α بحيث تكون الدالة f مستمرة عند 0.

التمرين الثالث:

f دالة مُعرّفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

(1) أدرس استمرارية الدالة f عند 0.

(2) أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها.

التمرين الرابع:

أدرس إمكانية قبول الدالة f إمتدادا بالاستمرار عند القيمة a في كل حالة ممايلي:

$$a = 2 \quad , f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad (2) \qquad a = 0 \quad , f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$. a = 0 \quad , f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (4) \qquad a = 0 \quad , f(x) = \frac{1}{1+e^x} \quad (3)$$

التمرين الخامس:

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كمايلي:

| | | | | | |
|--------|-----------|------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | -2 | 3 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 1 | -3 | 4 | 3 |

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في \mathbb{R} ؟، مع التبرير.

التمرين السادس:

أثبت أن للمعادلة $e^{-x} = x$ حل وحيد محصور بين العددين 0 و 1.

التمرين السابع:

باستعمال نظرية القيم المتوسطة، بين أن المعادلة $xe^{\sin x} = \cos x$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

التمرين الثامن:

نعتبر الدالتين $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g: x \mapsto -x^3$.

- بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب في مستوٍ منسوب إلى معلم

يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-\frac{7}{8} < \alpha < -\frac{3}{4}$.

التمرين التاسع:

f دالة معرفة على المجال $[0,1]$ وتأخذ قيمها في المجال $[0,1]$.

(1) برهن على وجود عدد حقيقي α من المجال $[0,1]$ بحيث يكون $f(\alpha) = \alpha$.

(تُسمى النقطة ذات الفاصلة α بالنقطة الصامدة).

(2) فسّر هندسياً هذه النتيجة.

3) هل تبقى النتائج السابقة صحيحة على مجال $[a, b]$ حيث $a < b$ ؟.

التمرين العاشر:

برهن أن كل كثير حدود درجته فردية ينعدم مرّة على الأقل في \mathbb{R} .

الفصل السادس: الدوال العكسية

مقدمة: بالاعتماد على دراسة سابقة في الفصل الأول في جزء التطبيقات، أن التطبيق إذا كان تقابل (متباين وغامر) فهو يقبل تطبيق عكسي، كما رأينا كيفية تعيينه. بالمقابل فإن الدالة العددية التي مجموعة بدئها هي مجموعة تعريفها أو جزء منها هي تطبيق، فبإمكاننا التحدث على الدالة العكسية في هذه الحالة إذا توفرّ التباين والغامر، وحسب خصائص الدالة سنرى في هذا الفصل أنه إذا كانت مستمرة فهي غامرة وإذا كانت رتيبة تماما فهي متباينة، فبهذين الشرطين (مستمرة ورتيبة تماما) تقبل دالة عكسية.

في الجزء الثاني، سندرس كيفية تعيين الدوال العكسية للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام و الظل) وهي على التوالي (قوس الجيب، قوس جيب التمام وقوس الظل) ثم نعرض كيفية استنتاج بعض خصائصها (مجموعة التعريف، إتجاه التغير، تعيين صور لأعداد...). إنطلاقا من خصائص الدوال المثلثية المرافقة لها.

في الجزء الثالث، نعرض الدوال الزائدية (الجيب الزائدي، جيب التمام الزائدي والظل الزائدي) وبعض من دساتير تحويلها، كما نعرض نهاياتها واشتقاقها بالاعتماد على مشتقة الدالة الأسية. ثم ندرس كيفية الحصول على دوالها العكسية وهي على التوالي (عمدة الجيب الزائدي، عمدة جيب التمام الزائدي وعمدة الظل الزائدي).

1.6 الدالة العكسية لدالة مستمرة ورتيبة تماما

حسب ما سبق (الفصل الخامس، فقرة الدوال المستمرة والرتيبة تماما) لدينا النتيجتين التاليتين:

(1) - إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على مجال I من \mathbb{R} ، عندئذ تكون f متباينة على I .
بالفعل: لو فرضنا عددين مختلفين x_1 و x_2 من I بحيث $x_1 < x_2$ ، وبما أن f رتيبة تماما على I فإن
 $f(x_1) < f(x_2)$ (f متزايدة تماما) أو $f(x_1) > f(x_2)$ (f متناقصة تماما) فينتج مايلي:
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

مما يعني أن f متباينة على I .

(2) - إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I من \mathbb{R} ، عندئذ تكون f غامرة من I نحو المجال $f(I)$.
بالفعل: فحسب تعريف المجال $f(I)$ الذي يُمثل صورة المجال I بواسطة الدالة المستمرة f

$$\forall y \in f(I), \exists x \in I: y = f(x)$$

مما يعني أن f غامرة من I نحو $f(I)$.

(3) من النتيجتين (1) و (2) السابقتين يكون لدينا مايلي:

إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I من \mathbb{R} ، عندئذ تكون الدالة f تقابلية من I نحو المجال $f(I)$.

ينتج من ذلك، وبالاعتماد على التطبيق العكسي لتقابل، النظرية التالية.

نظرية: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I من \mathbb{R} ، فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} لها الخاصيتين التاليتين:

- الدالة f^{-1} مُعرّفة على المجال $f(I)$ وتأخذ قيمها في المجال I .

- الدالة f^{-1} مُستمرة ورتبية تماما على المجال $f(I)$ ولها نفس إتجاه تغير الدالة f .

البرهان: حسب النتيجة (3) السابقة، الدالة f تقابلية من I نحو المجال $f(I)$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $f(I)$ نحو I ، والدالة f^{-1} تقابلية فهي إذن مُستمرة ورتبية تماما على المجال $f(I)$.

ومن جهة أخرى، من أجل كل عددين y_1 و y_2 من $f(I)$ بحيث $y_1 \neq y_2$ ، يوجد عددين x_1 و x_2 من I بحيث $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f(x_2)$ وهذا يكفيء أيضا $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ، $x_2 = f^{-1}(y_2)$ ، فيكون لدينا، مع ملاحظة $x_1 \neq x_2$ ، $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ ، $f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$

و هذا يعني أن نسبة تزايد الدالة f^{-1} بين العددين الحقيقيين المختلفين y_1 و y_2 من المجال $f(I)$ هي مقلوب نسبة تزايد الدالة f بين العددين الحقيقيين المختلفين x_1 و x_2 من المجال I ، فلهما نفس الإشارة وهذا ما يُفسّر أن الدالة f^{-1} لها نفس إتجاه تغير الدالة f .

نتيجة: في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس، المنحنى المُمثل لدالة و المنحنى المُمثل لدالتها العكسية متناظران بالنسبة للمنصف الأول (المستقيم ذو المعادلة $y = x$).

تطبيق: f دالة مُعرّفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

- بيّن أن الدالة f تقبل دالة عكسية على المجال $[0, +\infty[$ يُطلب تعيينها.

الحل:

- دالة ناطقة فهي مُستمرة على المجال $[0, +\infty[$.

- f متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} > 0 \right)$

بما أن الدالة f مستمرة ورتبية تماما (متزايدة تماما) على المجال $[0, +\infty[$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} مُعرّفة على المجال $[-1, 1[$ (حيث $f([0, +\infty[) = [-1, 1[$).

فالدالة العكسية f^{-1} مُعرّفة من $[-1, 1[$ نحو $[0, +\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0, +\infty[$ و y من $[-1, 1[$ فإن

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

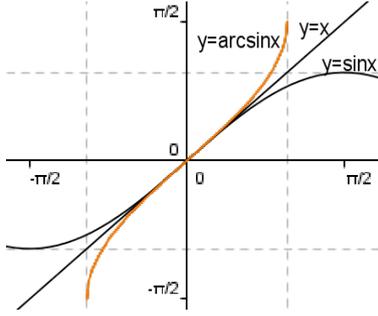
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \vee x = -\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

و بما ان x من $[0, +\infty[$ فإن $x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$ ، فالدالة العكسية f^{-1} مُعرّفة كمايلي:

$$f^{-1}: [-1, 1[\rightarrow [0, +\infty[$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

2.6 الدوال المثلثية و دوالها العكسية



أ- الجيب و قوس الجيب (Sin و $Arc\ sin$):

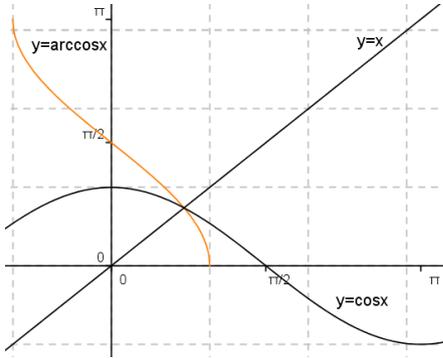
لنعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto f(x) = \sin x$$

بما أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} نرمز لها

بالرمز $Arc\ sin$ وهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1, 1]$ و تأخذ قيمها في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ حيث



$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1, 1]: y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

ب- جيب التمام و قوس جيب التمام (Cos و $Arc\ cos$):

لنعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

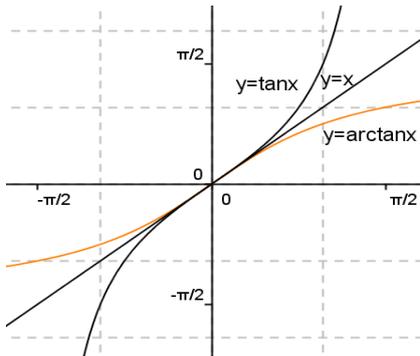
$$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

بما أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $[0, \pi]$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} نرمز لها

بالرمز $Arc\ cos$ وهي مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-1, 1]$ و تأخذ قيمها في المجال $[0, \pi]$ حيث

$$\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1]: y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$$



ج- الظل و قوس الظل (Tan و $Arc\ tan$):

لنعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = \tan x$$

بما أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} نرمز لها بالرمز $Arctan$ وهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال

$]-\infty, +\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ حيث

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]-\infty, +\infty[: y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$$

نتائج:

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x \quad (1)$$

بالفعل: حسب تعريف قوس الجيب، $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1, 1]: y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$

يكون لدينا $\arcsin(\sin x) = \arcsin y = x$

- وبالمثل $\forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin y) = y$

$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x$ - (2)

بالفعل: حسب تعريف قوس جيب التمام، $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1]: y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$

يكون لدينا $\arccos(\cos x) = \arccos y = x$

- وبالمثل $\forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos y) = y$

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arctan(\tan x) = x$ - (3)

بالفعل: حسب تعريف قوس الظل، $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in]-\infty, +\infty[: y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$

يكون لدينا $\arctan(\tan x) = \arctan y = x$

- وبالمثل $\forall y \in]-\infty, +\infty[, \tan(\arctan y) = y$

تطبيق 1: أحسب قوس الجيب (\arcsin) وقوس جيب التمام (\arccos) لكل من 0، 1، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الحل:

- حسب تعريف قوس الجيب، $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1, 1]: y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$

يكون لدينا $x = \arcsin 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x = 0$ إذن $\arcsin 0 = 0$.

و أيضا $x = \arcsin \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x = \frac{\pi}{6}$ إذن $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

و كذلك $x = \arcsin 1 \Leftrightarrow \sin x = 1$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x = \frac{\pi}{2}$ إذن $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

و لدينا كذلك $x = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x = \frac{\pi}{4}$ إذن $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

-بنفس الكيفية، يكون لدينا:

$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ ، $\arccos 1 = 0$ ، $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ، $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

تطبيق 2: أحسب قوس الظل ($\arctan x$) لكل من 0، 1.

الحل:

- حسب تعريف قوس الظل، $\forall y \in]-\infty, +\infty[: y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$ ، $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

يكون لدينا $x = \arctan 0 \Leftrightarrow \tan x = 0$ و $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

ومنه $x = 0$ إذن $\arctan 0 = 0$.

وأيضاً $x = \arctan 1 \Leftrightarrow \tan x = 1$ و $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

ومنه $x = \frac{\pi}{4}$ إذن $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

3.6 الدوال الزائدية و دوالها العكسية

أ- الدوال الزائدية: نُعرّف الدوال التالية:

- الجيب الزائدي: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ، $x \in \mathbb{R}$

- جيب التمام الزائدي: $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ، $x \in \mathbb{R}$

- الظل الزائدي: $thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ، $x \in \mathbb{R}$

نتائج:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $ch^2x - sh^2x = 1$

بالفعل:

$$\forall x \in \mathbb{R}، ch^2x - sh^2x = \frac{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)}{4} = 1$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

بالفعل: من النتيجة السابقة ($\forall x \in \mathbb{R}$ ، $ch^2x - sh^2x = 1$)، وبقسمة الطرفين على ch^2x ، نحصل على المطلوب.

- بما أن $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $sh(-x) = -shx$ ، فالجيب الزائدي (sh) دالة فردية.

- بما أن $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $ch(-x) = chx$ ، فجيب التمام الزائدي (ch) دالة زوجية.

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $(shx)' = chx$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $(chx)' = shx$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $(thx)' = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

بالفعل: يُمكن التأكد من ذلك بالاعتماد على: $(e^x)' = e^x$ ، $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ، $(\frac{shx}{chx})'$

- من تعريف الدوال الزائدية يُمكن التأكد من النهايات التالية:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} shx = -1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} shx = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} chx = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} chx = +1$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} thx = -1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} thx = 1$

ب- الدوال العكسية للدوال الزائدية:

- عمدة الجيب الزائدي ($Argsh$):

لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, (shx)' = chx \text{ وبالتالي}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (shx)' > 0$$

مما ينتج أن الدالة

$$sh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto shx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على \mathbb{R} فهي تقبل

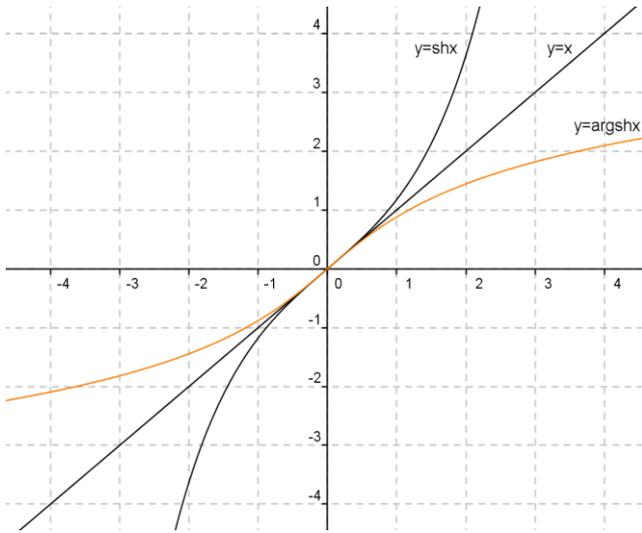
دالة عكسية، نرسم لها بالرمز $Argsh$ حيث

$$Argsh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto argshx$$

وهي مستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R} و تأخذ قيمها في \mathbb{R} وتُحقق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y = shx \Leftrightarrow x = argshy$$



- عمدة جيب التمام الزائدي ($Argch$):

لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, (chx)' = shx = \frac{e^{-x}(e^x+1)(e^x-1)}{2}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, (chx)' > 0 \text{ وبالتالي}$$

مما ينتج أن الدالة

$$ch :]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$$

$$x \mapsto chx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $]0, +\infty[$ فهي تقبل دالة عكسية، نرسم لها بالرمز $Argch$ حيث

$$Argch :]1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto argchx$$

وهي مستمرة و متزايدة تماما على $]1, +\infty[$ و تأخذ قيمها في $]0, +\infty[$ وتُحقق

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall y \in]1, +\infty[: y = chx \Leftrightarrow x = argchy$$

- عمدة الظل الزائدي ($Argth$):

لدينا

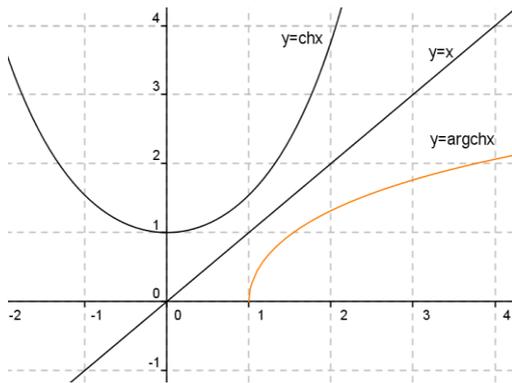
$$\forall x \in \mathbb{R}, (thx)' = \frac{1}{ch^2x}$$

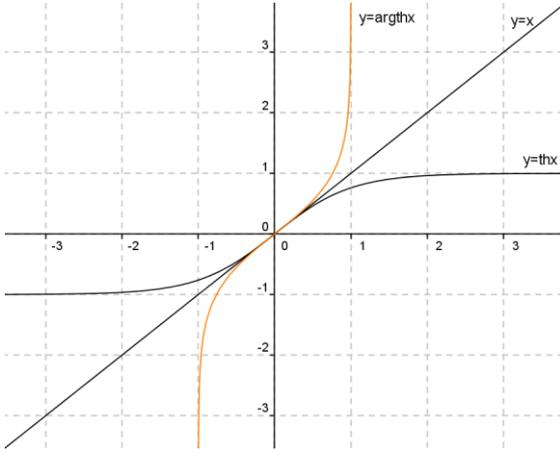
$$\forall x \in \mathbb{R}, (thx)' > 0 \text{ وبالتالي}$$

مما ينتج أن الدالة

$$th :]-\infty, +\infty[\rightarrow]-1, 1[$$

$$x \mapsto thx$$





مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على \mathbb{R}

فهي تقبل دالة عكسية، نرسم لها بالرمز $Argth$ حيث

$$Argth :]-1,1[\rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$x \mapsto rthx$$

وهي مستمرة و متزايدة تماما على $]-1,1[$ و تأخذ قيمها في \mathbb{R}

و تُحقق

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[, \forall y \in]-1,1[: y = thx \Leftrightarrow x = argthy$$

نتائج:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arg shx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad -$$

بالفعل: لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: y = \arg shx \Leftrightarrow x = shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \vee e^y = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

وبما أن

$$x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \quad \text{و} \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{فإن}$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{ومنه}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arg shx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{وهذا يعني أن}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \arg chx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad -$$

بالفعل: لدينا

$$\forall x \in [1, +\infty[, \forall y \in [0, +\infty[: y = \arg chx \Leftrightarrow x = chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \vee e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

في هذه الحالة، نلاحظ أن

$$x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \quad \text{و} \quad x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$$

وبالتالي:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \vee y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0 \quad \text{فإن} \quad (x \geq 1 \text{ حيث}) \quad x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$$

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \leq 0 \quad \text{فإن} \quad x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \leq 1$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{ومن كون} \quad y \geq 0 \quad \text{يكون لدينا}$$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ وهذا يعني أن

$$\forall x \in]-1, 1[$$
, $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ -

بالفعل: لدينا

$$\forall x \in]-1, 1[$$
, $\forall y \in \mathbb{R} : y = \operatorname{argth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$

$$\Leftrightarrow e^y - e^{-y} = x(e^y + e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = 1+x$$

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{ومنه} \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{فإن} \quad (x \in]-1, 1[\text{ حيث } \frac{1+x}{1-x} > 0$$

$$\forall x \in]-1, 1[$$
, $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ وهذا يعني أن

تطبيق 1:

- عين مجموعة تعريف الدالة f المعرفة في كل حالة من الحالتين التاليتين:

$$f(x) = \operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] \quad \text{ب-} \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{4}\right) \quad \text{أ-}$$

الحل:

أ- تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كانت $-1 \leq \frac{1-x}{4} \leq 1$ أي $-3 \leq x \leq 5$

فمجموعة تعريف هذه الدالة هي $D_f = [-3, 5]$.

ب- تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كانت $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1 \wedge x \neq 0$

أي $x > 0$ معناه $\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \wedge x \neq 0$

فمجموعة تعريف هذه الدالة هي $D_f =]0, +\infty[$.

تطبيق 2: إذا علمت أن $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، فبين أن

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

الحل:

لنعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}_+^* بـ: $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

فينتج أن الدالة f ثابتة، لذا يُمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* , f(x) = c \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي،}$$

فيوضع $x = 1$ يكون $f(1) = c$ وبالتالي $f(x) = f(1) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

بمعنى $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 2 \arctg 1$ أي $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$ وهو المطلوب.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, 1]$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

- بين أن الدالة f تقابل من $[0, 1]$ في مجال يُطلب تعيينه، ثم عين عندئذ دالتها العكسية.

التمرين الثاني:

f دالة معرفة على المجال $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} يُطلب تعيين مجموعة تعريفها $(D_{f^{-1}})$.

التمرين الثالث: (بعض دساتير التحويل للدوال الزائدية)

(1) - بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x, y لدينا:

$$sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y) \quad -$$

$$ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y) \quad -$$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$sh(2x) = 2sh(x)ch(x) \quad -$$

$$ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) \quad -$$

(2) إذا علمت أن: $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ (تمّ برهانها حسب ما سبق)، فاستنتج أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(2x) = 2ch^2(x) - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(2x) = 2sh^2(x) + 1$$

التمرين الرابع:

عين مجموعة تعريف الدالة f المعرفة في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = \arctg\left(\frac{x-1}{x+3}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1+x}{x}\right) \quad (1)$$

$$f(x) = \arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{4}\right) \quad (3)$$

التمرين الخامس:

- إذا علمت أن

$$\forall x \in [-1, 1], \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$$

فبيّن أن

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

- نعتبر الآن المعادلة

$$\arcsin x = \arccos 2x \quad \text{ذات المجهول الحقيقي } x.$$

عيّن D مجموعة تعريفها ثم قم بحلّها.

التمرين السادس:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كمايلي :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(1) بيّن أن $D_f = \mathbb{R}$ (مجموعة تعريف الدالة f).

(2) برهن أن الدالة f فردية.

(3) أثبت أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} يُطلب تعيين مجموعة تعريفها.

(4) أ- بيّن أن: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arg shx$

ب- استنتج عبارة الدالة العكسية f^{-1} .

التمرين السابع:

أثبت صحة مايلي:

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(2 \arcsin x) = 2x \sqrt{1-x^2} \quad (1)$$

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1 \quad (2)$$

$$\forall x \in [-1, 1], \sin^2\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \frac{1-x}{2} \quad (3)$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \arg sh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \ln x \quad - \quad (4)$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \arg sh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = -\ln(-x) \quad -$$

(مع العلم أن: $\forall x \in \mathbb{R}, \arg shx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.)

التمرين الثامن:

(1) بنفس طريقة إثبات العبارة $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (التمرين الخامس السابق)

بيّن أن $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

(2) حل في \mathbb{R} المعادلتين التاليتين:

$$chx = 2 \quad \text{أ-}$$

$$\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}) \quad \text{ب-}$$

قسم الجبر 1

✓ البنى الجبرية

✓ الفضاءات الشعاعية

✓ التطبيقات الخطية

الفصل السابع: البنى الجبرية

مقدمة: درسنا في علم الحساب العمليات العددية الأساسية وأبرزها عمليتا الجمع والضرب، في كل عملية من هاتين العمليتين يُقابل كل ثنائية من الأعداد عدداً آخر (حاصل جمعهما أو ضربهما). سندرس في هذا الفصل نمط أعم من العمليات على مجموعات العناصر بحيث تُشكل العمليات المألوفة (الجمع والضرب) حالة خاصة من هذه العمليات الرياضية التي يُطلق عليها اسم العمليات الجبرية أو قوانين التركيب. والعمليات الجبرية نوعان، العملية الداخلية (قانون التركيب الداخلي) والعملية الخارجية (قانون التركيب الخارجي).

إن علم الجبر يدرس أنظمة رياضية يتألف كل منها من مجموعة عناصر (ليست بالضرورة أعداد فقد تكون أشعة، دوال، مصفوفات وغيرها) ومن عمليات مُعرّفة على هذه المجموعة تشترك مع العمليات الحسابية المألوفة ببعض الخواص (كالتبديل، التجميع،...)، وقد أُطلق على هذه الأنظمة الرياضية اسم البنى الجبرية. فالبنية الجبرية تعني تزويد مجموعة E غير خالية من العناصر بعدد من العمليات واحدة أو أكثر داخلية أو خارجية مع مجموعة من الخواص التي تُحقّقها هذه العمليات على عناصر المجموعة E . من أهم البنى الجبرية والتي سنعالجها في هذا الفصل الزمرة وهي مجموعة مُزوّدة بعملية داخلية واحدة لها خواص مُحدّدة، والحلقة والحقل كل منهما عبارة عن مجموعة مُزوّدة بعمليتين داخليتين بخواص مُعيّنة، والفضاء الشعاعي (في الفصل الثاني) وهو مجموعة مُزوّدة بعمليتين إحداها داخلية والأخرى خارجية.

1.7 العملية الداخلية (قانون التركيب الداخلي):

تعريف: E مجموعة غير خالية. تُسمى عملية داخلية في مجموعة E كل تطبيق للمجموعة $E \times E$ نحو E ،

ونرمز لها بأحد الرموز التالية: $*$ ، Δ ، \circ ، $+$ ، \times ، ...

- فإذا كانت $*$ عملية داخلية في مجموعة E نكتب:

$$*: E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

مثلاً: عملية الجمع في \mathbb{R} هي عملية داخلية في \mathbb{R} ، ولدينا:

$$+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

خواص: لتكن $*$ و Δ عمليتان داخليتان في مجموعة E .

أ-التبديلية: تكون العملية $*$ تبديلية في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = y * x$$

ب-التجميعية: تكون العملية $*$ تجميعية في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x * y) * z = x * (y * z)$$

ج-التوزيعية: تكون العملية Δ توزيعية على $*$ في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x \Delta (y * z) = (x \Delta y) * (x \Delta z) \wedge (y * z) \Delta x = (y \Delta x) * (z \Delta x)$$

د-العنصر الحيادي: يكون العنصر e من E حيادي بالنسبة للعملية $*$ في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x$$

ه-العنصر النظير: ليكن e العنصر الحيادي بالنسبة للعملية $*$ في E ، وليكن x من E .

يكون العنصر x' من E نظير x بالنسبة للعملية $*$ في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$x * x' = x' * x = e$$

ملاحظة: إذا كانت العملية $*$ تبديلية في E ، ففي الخاصية ج نكتفي بإحدى العلاقتين في تعريف التوزيعية، و في الخاصيتين د و ه نكتفي بأحد الطرفين الأولين في تعريف كل من العنصر الحيادي و العنصر النظير. **خاصية 1:** العنصر الحيادي إن وُجد فهو وحيد.

البرهان: إذا فرضنا e و e' عنصران حياديان بالنسبة للعملية $*$ في E ، فيكون لدينا من جهة $e * e' = e$ (حيث e' عنصر حيادي) و من جهة أخرى $e * e' = e'$ (حيث e عنصر حيادي)، فينتج أن $e = e'$. **خاصية 2:** إذا كانت العملية تجميعية، فإن العنصر النظير إن وُجد فهو وحيد.

البرهان: إذا فرضنا x' و x'' عنصران نظيران للعنصر x من E بالنسبة للعملية التجميعية $*$ في E ، و ليكن e العنصر الحيادي لهذه العملية في E فيكون لدينا:

$$.x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

أمثلة:

(1)- الجمع (+) و الضرب (\times) عمليتان تبديليتان و تجميعيتان في \mathbb{R} .

الضرب توزيعي على الجمع في \mathbb{R} . العدد 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة للجمع في \mathbb{R} . العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة للضرب في \mathbb{R} . العدد $(-x)$ هو نظير العدد x من \mathbb{R} بالنسبة للجمع في \mathbb{R} . العدد $\frac{1}{x}$ هو نظير العدد x من \mathbb{R}^* بالنسبة للجمع في \mathbb{R}^* .

(2)- الطرح (-) عملية ليست تبديلية و ليست تجميعية في \mathbb{R} .

بالفعل: يوجد مثلا الأعداد 1، 2، 3 من \mathbb{R} بحيث: $1 - 2 \neq 2 - 1$ وكذا $1 - (2 - 1) \neq (1 - 2) - 1$.

(3)- الطرح (-) عملية ليست داخلية في \mathbb{N} .

بالفعل: يوجد مثلا العددين 1، 2 من \mathbb{N} بحيث: $(1 - 2) \notin \mathbb{N}$.

(4)- لتكن E مجموعة غير خالية. الإتحاد (\cup) و التقاطع (\cap) عمليتان تبديليتان و تجميعيتان وكلاهما توزيعي على الآخر في $P(E)$ (مجموعة أجزاء المجموعة E). المجموعة الخالية (\emptyset) هي العنصر الحيادي بالنسبة للإتحاد في $P(E)$ و المجموعة E هي العنصر الحيادي بالنسبة للتقاطع في $P(E)$.

2.7 الزمرة:

تعريف: E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$. نقول أن $(E, *)$ زمرة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

أ- العملية $*$ تجميعية.

ب- يوجد في E عنصر حيادي بالنسبة للعملية $*$.

ج- كل عنصر من E يقبل نظيرا في E بالنسبة للعملية $*$.

ملاحظة: بالإضافة إلى الشروط السابقة، إذا كانت $*$ تبديلية نقول أن $(E, *)$ زمرة تبديلية.

أمثلة:

(1) $(\mathbb{R}, +)$ ، $(\mathbb{Q}, +)$ ، $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبديلية، بينما $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة لعدم وجود العنصر النظير (الشرط (ج) غير مُحقق).

(2) (\mathbb{R}, \times) ليست زمرة، لأن العدد 0 من \mathbb{R} لا يقبل نظير بالنسبة لعملية الضرب في \mathbb{R} .

(3) (\mathbb{Q}^*, \times) زمرة تبديلية.

الزمرة الجزئية:

تعريف: لتكن $(E, *)$ زمرة و H مجموعة جزئية من E .

نقول عن $(H, *)$ أنها زمرة جزئية من $(E, *)$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

أ- $\forall (x, y) \in H^2, (x * y) \in H$ (مُستقرة بالنسبة إلى $*$).

ب- $e \in H$ ، حيث e هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $*$ في E .

ج- $\forall x \in H, x' \in H$ ، حيث x' نظير x بالنسبة للعملية $*$ في E .

أمثلة:

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{R}, +)$.

(2) $(2\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$.

(3) $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ ، لاختلال الشرط (ج) لأنه يوجد مثلا العدد 3 من \mathbb{N} نظيره (-3) بالنسبة للجمع في \mathbb{Z} لا ينتمي إلى \mathbb{N} .

3.7 الحلقة:

تعريف: مجموعة غير خالية مزودة بالعمليتين الداخليتين $*$ و Δ . نقول أن $(E, *, \Delta)$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

أ- $(E, *)$ زمرة تبديلية.

ب- Δ تجميعية في E .

ج- Δ توزيعية على $*$ في E .

ملاحظة:

- بالإضافة إلى الشروط السابقة، إذا كانت Δ تبديلية نقول أن $(E, *, \Delta)$ حلقة تبديلية.

- بالإضافة إلى الشروط السابقة، إذا كانت لعملية Δ عنصرا محايدا في E نقول أن $(E, *, \Delta)$ حلقة واحدة.

أمثلة:

(1) $(\mathbb{R}, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدة.

(2) $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدة.

(3) $(\mathbb{N}, +, \times)$ ليست حلقة لأن $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة (الشرط (أ) غير مُحقق).

الحلقة الجزئية:

تعريف: لتكن $(E, *, \Delta)$ حلقة و B مجموعة جزئية من E .

نقول عن $(B, *, \Delta)$ أنها حلقة جزئية من $(E, *, \Delta)$ إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

أ- $(B, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$.

ب- $\forall (x, y) \in B^2, (x \Delta y) \in B$ (B مُستقرة بالنسبة إلى Δ).

أمثلة:

(1) $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R}, +, \times)$.

(2) $(\mathbb{N}, +, \times)$ ليست حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \times)$ لأن $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$.

4.7 الحقل:

تعريف: E مجموعة غير خالية مزودة بالعمليتين الداخليتين $*$ و Δ . نقول أن $(E, *, \Delta)$ حقل إذا تحقق مايلي:

أ- $(E, *, \Delta)$ حلقة واحدة.

ب- المجموعة $E - \{e\}$ غير خالية وكل عنصر منها يقبل نظيرا بالنسبة إلى Δ (e هو العنصر المحايد للعملية $*$).

ملاحظة: بالإضافة إلى الشرطين السابقين، إذا كانت Δ تبديلية نقول أن $(E, *, \Delta)$ حقل تبديلي.

أمثلة:

(1) $(\mathbb{R}, +, \times)$ حقل تبديلي.

(2) $(\mathbb{Q}, +, \times)$ حقل تبديلي.

(3) $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ليست حقل لأن عناصر المجموعة $\mathbb{Z} - \{0\}$ لا تقبل نظائر بالنسبة إلى \times (ماعداد العدد 1).

تطبيق: لتكن $*$ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الناطقة \mathbb{Q} مُعرّفة كمايلي:

$$x * y = x + y + 2xy$$

- أثبت أن الثنائية $(\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}, *)$ زمرة تبديلية.

الحل: - في البداية نتأكد من أن العملية $*$ داخلية في المجموعة $\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$.

بالفعل: من أجل كل عددين x و y من $\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$ ، نُبين أن $(x + y + 2xy) \in \mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$ أي نُبين أن

$$x + y + 2xy \neq -\frac{1}{2}$$

لنثبت ذلك بالخلف، نفرض أن $x + y + 2xy = -\frac{1}{2}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$x(1+2y) = -\frac{1}{2}(1+2y) \text{ أي } (x + \frac{1}{2})(1+2y) = 0$$

فينتج أن $x = -\frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{2}$ وهذا تناقض كون x و y من $\mathbb{Q} - \{-\frac{1}{2}\}$

إذن $(x + y + 2xy) \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ، فالعملية * داخلية في $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

- العملية * تبديلية في المجموعة $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$: لنُبين أن

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)^2, x * y = y * x$$

ليكن x و y من $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ، لدينا:

$$\begin{aligned} x * y &= x + y + 2xy \\ &= y + x + 2yx \\ &= y * x \end{aligned}$$

ومنه * تبديلية في $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

- العملية * تجميعية في المجموعة $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$: لنُبين أن

$$\forall (x, y, z) \in \left(\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)^3, (x * y) * z = x * (y * z)$$

ليكن x ، y و z من $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ، لدينا من جهة

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y + 2xy) * z \\ &= (x + y + 2xy) + z + 2(x + y + 2xy)z \\ &= x + y + 2xy + z + 2xz + 2yz + 4xyz \dots (1) \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z + 2yz) \\ &= x + (y + z + 2yz) + 2x(y + z + 2yz) \\ &= x + y + z + 2yz + 2xy + 2xz + 4xyz \dots (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) ينتج أن $(x * y) * z = x * (y * z)$

ومنه * تجميعية في $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

- العنصر المحايد للعملية * في المجموعة $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$: ليكن e العنصر المحايد للعملية * في $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ،

فيتحقق مايلي: $\forall x \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, x * e = x$

أي $x + e + 2xe = x$ $\forall x \in \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ، بمعنى $(1 + 2x)e = 0$ ، إذن $e = 0$ (حيث $1 + 2x \neq 0$) .

ومنه 0 هو العنصر المحايد للعملية * في $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

- لكل عنصر من $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ نظير بالنسبة للعملية * في $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$: ليكن x' نظير العنصر x من $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بالنسبة للعملية *، فيتحقق ما يلي:

$$x * x' = 0 \text{ أي } x + x' + 2xx' = 0 \text{ بمعنى } x' = \frac{-x}{1+2x} \text{ و هو عنصر من } \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \text{ (حيث } 1+2x \neq 0 \text{، مع}$$

ملاحظة أن $\frac{-x}{1+2x} \neq -\frac{1}{2}$ لأنه لو كان $\frac{-x}{1+2x} = -\frac{1}{2}$ لكان $2x = 1+2x$ وهذا غير ممكن).

فلكل عنصر من $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ نظير بالنسبة للعملية * في $\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

وبالتالي: زمرة تبديلية $\left(\mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, *\right)$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

Δ عملية داخلية في \mathbb{N} معرفة كمايلي :

$$a \Delta b = a^2 + b^2$$

(1) احسب مايلي: $2 \Delta 1$ ، $5 \Delta 3$ ، $(3 \Delta 1) \Delta 5$ ، $3 \Delta (1 \Delta 5)$.

(2) هل Δ تبديلية؟ وهل هي تجميعية؟ مع التبرير.

(3) هل هناك عنصر حيادي بالنسبة للعملية Δ ؟.

التمرين الثاني:

* و Δ عمليتان داخليتان في \mathbb{N} معرفتان كمايلي :

$$a \Delta b = 2ab \text{ و } a * b = a + 2b$$

(1) أدرس خاصيتي التبديل والتجميع لكل من * و Δ .

(2) بين أن Δ توزيعية على *، و أن * ليست توزيعية على Δ .

التمرين الثالث:

Δ عملية داخلية في المجموعة $\mathbb{R} - \{2\}$ معرفة كمايلي:

$$x \Delta y = (x - 2)(y - 2) + 2$$

- أثبت أن $(\mathbb{R} - \{2\}, \Delta)$ زمرة تبديلية.

التمرين الرابع:

x, y عدنان حقيقيان من المجال $I =]-1, 1[$.

(1) تحقق من أن: $\forall (x, y) \in I^2, 1 + xy > 0$ (تأكد أولاً من أن $|xy| < 1$)

ثم اثبت أن:

$$\forall (x, y) \in I^2, -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$$

$$.x * y = \frac{x+y}{1+xy} \quad \text{لتكن } * \text{ عملية داخلية في } I \text{ معرفة كمايلي:}$$

- أثبت أن $(I, *)$ زمرة تبديلية.

التمرين الخامس:

لتكن $*$ و Δ عمليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} كمايلي:

$$a * b = a + b - 1$$

$$a \Delta b = a + b - ab$$

(1) أثبت أن $(\mathbb{Z}, *, \Delta)$ حلقة.

(2) هل هذه الحلقة حقل؟، برّر جوابك.

التمرين السادس:

لتكن المجموعة K المعرفة كمايلي:

$$K = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

ونعرّف عمليتي الجمع والضرب على K كمايلي:

من أجل كل عددين x و y من K حيث $x = a + b\sqrt{2}$ ، $y = c + d\sqrt{2}$ لدينا:

$$x + y = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$$

$$xy = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$$

- أثبت أن $(K, +, \times)$ حقل تبديلي.

التمرين السابع:

نعتبر $(E, *)$ زمرة غير تبديلية، ولتكن a, b و c عناصر معلومة من E . نرمز بـ a^{-1} لنظير a من E بالنسبة

للعلمية $*$.

- أوجد العناصر x من E في كل حالة من الحالات التالية:

$$\text{أ- } a * x = b$$

$$\text{ب- } a * x * b = c * b$$

$$\text{ج- } a * x * b = b * c$$

الفصل الثامن: الفضاءات الشعاعية

مقدمة وتمهيد: نُعالج في هذا الفصل نوعا آخر من البنى الجبرية ميزته أنه مُزوّد بعمليتين داخلية وخارجية تُسمّيه الفضاء الشعاعي. ولهذا الموضوع أهمية كبيرة نظرا لتطبيقاته المُتنوعة في الفيزياء والميكانيك على سبيل المثال. ونودّ قبل كل شيء أن نُؤكّد على أنّ ما نُسميه شعاعا فيما سيأتي ليس فقط ذاك الشعاع المعروف بقطعة مستقيمة مُوجّهة والمُتميّزة بالمنحى والاتجاه والطويلة أو المعيار، بل هو كائن جبري مُجرّد يُمكن أن لا يحمل أي معنى فيزيائي (استعمال الشعاع لتمثيل كمية فيزيائية كالقوة مثلا)، لكنّه تعميما للشعاع في الفيزياء والميكانيك، فهو عموما عبارة عن قائمة عناصر (مُكوّنات) مُرتّبة تسمّى مركّبات هذا الشعاع.

ومن هذا المُنتطلق سنُعالج في هذه المقدمة بُنية الفضاء الشعاعي الذي يتمثل في مجموعة الأشعّة في المستوي (أو الفضاء) ثمّ نُعمّم هذه البنية الجبرية بشكل مُجرّد، نزوّد هذه المجموعة (كما هو معلوم في دراستنا في المرحلة الثانوية) بعملية جمع الأشعّة وهي عملية داخلية في هذه المجموعة (مجموع شعاعين هو شعاع) ويمكن التأكيد باستعمال مركّبات الشعاع أن هذه العملية تبديلية، تجميعية، ولها عنصر حيادي (الشعاع المعدوم $\vec{0}$) ولكل شعاع نظير بالنسبة للجمع (نظير الشعاع \vec{u} هو الشعاع $-\vec{u}$) وهذا يعني أنّ مجموعة الأشعّة المُزوّدة بعملية الجمع زمرة تبديلية. كما نعلم أن حاصل ضرب الشعاع \vec{u} بعدد حقيقي λ هو الشعاع $\lambda \cdot \vec{u}$ ، إنّ هذه العملية هي عملية خارجية في مجموعة الأشعّة تتمتع بالخواص التالية: من أجل كل شعاعين \vec{u} و \vec{v} وكل عددين حقيقيين λ و μ لدينا:

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u}$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

فبتحقّق هذه الخواص بالنسبة للعمليتين الواردتين سابقا، نقول أن مجموعة الأشعّة في المستوي (أو الفضاء) لها بُنية فضاء شعاعي، فهو أول مثال عن هذه البنية.

في بداية هذا الفصل سنقوم بإعطاء تعريفا عاما للفضاء الشعاعي، يليه التعرّف على بعض المفاهيم على الأشعّة: الارتباط والاستقلال الخطيان، التوليد، ثمّ التطرّق إلى الأسس والأبعاد للفضاءات الشعاعية.

1.8 تعريف الفضاء الشعاعي: لنعتبر $(K, +, \cdot)$ حقل تبديلي (K يُمثل عادة \mathbb{R} مجموعة الأعداد الحقيقية أو \mathbb{C}

مجموعة الأعداد المركبة). و لتكن E مجموعة غير خالية، مُزوّدة بقانون تركيب داخلي (عملية داخلية) نرمز لها

بالرمز $(+)$ و قانون تركيب خارجي (عملية خارجية) نرمز لها بالرمز (\cdot) حيث:

$$\cdot: K \times E \rightarrow E$$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

نقول أن المجموعة E (المزوّدة بالعمليتين الداخلية $+$ والخارجية \cdot) فضاء شعاعي على الحقل K إذا تحقّق ما يلي:

أ- زمرة تبديلية. $(E, +)$

ب- من أجل كل x و y من E و كل λ و μ من K ، لدينا:

$$-(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad -$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x \quad -$$

$$1_K \cdot x = x \quad - \text{ (حيث } 1_K \text{ العنصر المحايد للعملية في } K \text{).}$$

ملاحظات:

- عناصر E تُسمى أشعة و عناصر K سلميات.

- تُسمى الكتابة $\lambda \cdot x$ بضرب الشعاع x بالسلمي λ و نكتب λx .

- $\forall \lambda \in K, \lambda 0 = 0$ (0 الشعاع المعلوم في E)، وذلك لأن من $\lambda x = \lambda(x + 0) = \lambda x + \lambda 0$ نجد $\lambda 0 = 0$

- $\forall x \in E, 0x = 0$ ، وذلك لأن من $0x = (0+0)x = 0x + 0x$ نجد $0x = 0$

$$\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee x = 0 \quad -$$

أمثلة:

(1) - كل حقل تبديلي K هو فضاء شعاعي على K .

(2) - V مجموعة الأشعة في المستوي (أو الفضاء) المألوف هي فضاء شعاعي على \mathbb{R} ، حيث:

$$\text{جمع الأشعة هي عملية داخلية في } V \text{ (} \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V^2, \vec{u} + \vec{v} \in V \text{)}$$

و ضرب شعاع بعدد حقيقي هي عملية خارجية في V ($\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in V : \lambda \vec{u} \in V$)

فيواسطة هاتين العمليتين يمكن التحقق من تعريف الفضاء الشعاعي.

(3) - \mathbb{R}^2 فضاء شعاعي على \mathbb{R} ، حيث:

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

يمكن تمثيل الأشعة هندسيا باختيار معلما (O, \vec{i}, \vec{j}) في المستوي، و تُرفق بكل عنصر $x = (x_1, x_2)$ من \mathbb{R}^2 النقطة

A

حيث $\vec{OA} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$. وإذا كانت النقطة B تمثل الشعاع $y = (y_1, y_2)$ فإن المجموع $z = x + y$ يُمثل بالنقطة C

$$\text{حيث } \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

- **تعميم:** \mathbb{R}^n ، $(n \in \mathbb{N}^*)$ فضاء شعاعي على \mathbb{R} .

(4) - لتكن $E = \mathfrak{S}(I, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال العددية المُعرّفة على المجال I من \mathbb{R} .

تُعرّف مجموع دالتين f و g كما يلي:

$$\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

كما تُعرّف ضرب دالة بعدد حقيقي λ كما يلي:

$$\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

إنّ المجموعة E المُزوّدة بهاتين العمليتين (الأولى داخلية والثانية خارجية) لها بنية فضاء شعاعي على \mathbb{R} .

الفضاء الشعاعي الجزئي:

تعريف: لتكن E فضاء شعاعي على الحقل K و F مجموعة جزئية من E .

نقول أن F فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق ما يلي:

أ- $F \neq \emptyset$ (يجب أن تحتوي على الأقل على 0_E ، العنصر المحايد للعملية الداخلية في E).

ب- $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$ (مستقرة بالنسبة للعملية الداخلية +).

ج- $\forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x \in F$ (مستقرة بالنسبة للعملية الخارجية \cdot).

ملاحظات:

- عمليا للتأكد من أن $F \neq \emptyset$ ، نتحقق من أن 0_E ينتمي إلى F .

بالفعل: إذا كان F فضاء شعاعي جزئي فإن $0_E \in F$ ، وباستعمال العكس النقيض، إذا كان $0_E \notin F$ فإن F ليس فضاء شعاعي جزئي.

- يمكن كتابة الشرطين (ب) و (ج) كما يلي:

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \lambda x + \mu y \in F$$

أمثلة:

(1) - $\{0_E\}$ فضاء شعاعي جزئيان من E .

(2) - $\mathbb{R} \times \{0\}$ فضاء شعاعي جزئي من \mathbb{R}^2 ، حيث $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$.

بالفعل: من الواضح أن $(0, 0)$ ينتمي إلى $\mathbb{R} \times \{0\}$ و بالتالي $\mathbb{R} \times \{0\} \neq \emptyset$ ، ثم من أجل $(x, 0)$ ، $(y, 0)$ من $\mathbb{R} \times \{0\}$ ومن أجل λ ، μ من \mathbb{R} لدينا: $\lambda(x, 0) + \mu(y, 0) = (\lambda x + \mu y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

(3) - إذا كانت $E = \mathfrak{S}(I, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال العددية المُعرّفة على المجال I من \mathbb{R} ، وهي فضاء شعاعي على \mathbb{R} حسب المثال السابق، و إذا فرضنا $F = C(I, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال المُستمرة على I فإن F فضاء شعاعي جزئي من E .

2.8 الأسس و الأبعاد: لنفرض في كل ما يأتي أن E فضاء شعاعي على الحقل K (\mathbb{R} أو \mathbb{C}).

أ- المزج الخطي:

تعريف: نسمي مزجا خطيا للأشعة x_1, x_2, \dots, x_n من الفضاء الشعاعي E كل شعاع من الشكل:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ سلميات من K .

مثال: ليكن $E = \mathbb{R}^2$ و ليكن الشعاع (1,2) من E .

لدينا الكتابة التالية: $(1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1)$

فنقول أن الشعاع (1,2) هو مزج خطي للشعاعين (1,0) و (0,1).

ب- العائلة المولدة:

تعريف: نقول أنّ العائلة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مولدة للفضاء الشعاعي E إذا كُتب كل شعاع من E كمزج خطي لهذه العائلة، بمعنى:

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

ونكتب $E = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

أمثلة:

(1) - ليكن $E = \mathbb{R}^2$. الشعاعان $v = (1, 0)$ و $w = (1, 1)$ يولدان الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^2 .

بالفعل: ليكن $u = (x, y)$ شعاع من \mathbb{R}^2 ، ولنبين وجود α ، β من \mathbb{R} بحيث $u = \alpha v + \beta w$ ، وهذا يؤدي إلى حل الجملة:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y \end{cases}$$

وهي تقبل حل وحيد $\alpha = x - y$ و $\beta = y$ وهذا مهما يكن x و y من \mathbb{R} ، ومنه $\mathbb{R}^2 = \langle v, w \rangle$.

(2) - ليكن $E = \mathbb{R}^3$. وليكن $e_1 = (1, 0, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0)$ ، $e_3 = (0, 0, 1)$ ثلاث أشعة من الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^3 . فمن أجل كل شعاع $u = (x, y, z)$ من \mathbb{R}^3 لدينا:

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3 \end{aligned}$$

وبالتالي: $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

ج- الإرتباط والإستقلال الخطيان:

تعريف:

(1) - نقول أنّ الأشعة x_1, x_2, \dots, x_n من الفضاء الشعاعي E مرتبطة خطيا إذا وجدت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ سلميات من K ليست كلّها معدومة بحيث يكون: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

(2) - نقول أنّ الأشعة x_1, x_2, \dots, x_n من الفضاء الشعاعي E مستقلة خطيا (حرّة) إذا لم تكن مرتبطة خطيا، بمعنى:

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n, (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0)$$

أمثلة:

(1) - في \mathbb{R}^4 ، لتكن الأشعة $u = (1, 0, 0, 0)$ ، $v = (1, 1, 1, 0)$ ، $w = (0, 1, 1, 0)$.

نلاحظ أنّ: $v = u + w$ ، كما يمكن كتابتها على الشكل: $u - v + w = 0$

وبالتالي الأشعة u ، v ، w مرتبطة خطيا.

(2) - في \mathbb{R}^3 الأشعة $u = (1, 3, 1)$ ، $v = (0, 1, -1)$ ، $w = (2, 5, 3)$ مرتبطة خطيا، لأن: $-2u + v + w = 0$.

بالفعل: لتكن α ، β ، γ أعداد حقيقية تُحقق مايلي: $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

وهذه الأخيرة تكافئ الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

إن حلول هذه الجملة من الشكل $\{(-2\gamma, \gamma, \gamma), \gamma \in \mathbb{R}\}$ ، ويكون لدينا

$$\gamma(-2u + v + w) = 0$$

فبفرض $\gamma \neq 0$ نجد $-2u + v + w = 0$ ، وهو ما يُفسّر أنّ الأشعة u ، v ، w مرتبطة خطيا.

(3) - في \mathbb{R}^3 الأشعة $e_1 = (1, 0, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0)$ ، $e_3 = (0, 0, 1)$ مستقلة خطيا، لأنه إذا كان

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \quad (\text{مع العلم أنّ } 0 \text{ في } \mathbb{R}^3 \text{ يمثل الشعاع المعدوم } (0, 0, 0))$$

فإنه ينتج:

$$(\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

أي

ومنه

د- أساس الفضاء الشعاعي:

تعريف: نقول أن العائلة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تُشكّل أساسا للفضاء الشعاعي E إذا كانت مولّدة لـ E ومستقلّة خطيا في E .

مثال 1: ليكن $E = K$ (وهو فضاء شعاعي على K)، وليكن $\{0\} \subset K$.

لدينا من أجل كل عنصر x من K ، $x = \left(\frac{x}{a}\right)a$ ، وبالتالي $K = \langle a \rangle$ و بما أن $\{a\}$ مستقلة خطيا (حيث

$$(\lambda a = 0 \Rightarrow \lambda = 0)$$

فإن $\{a\}$ أساس لـ K .

ملاحظة: هذا المثال يُوضّح أنّه يمكن لفضاء شعاعي أن يتمتع بعدد غير منته من الأسس (لأن a عنصر كفي غير معدوم من K)

مثال 2: في \mathbb{R}^2 العائلة $B = \{e_1, e_2\}$ حيث $e_1 = (1, 0)$ ، $e_2 = (0, 1)$ تُشكّل أساسا لـ \mathbb{R}^2 ، ويُسمّى بالأساس القانوني لـ \mathbb{R}^2 .

بالفعل:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 \quad \text{حيث } B \text{ مولّدة لـ } \mathbb{R}^2$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha e_1 + \beta e_2 = 0 = (0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad \text{حيث } B \text{ مستقلة خطيا}$$

مثال 3: في \mathbb{R}^3 العائلة $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ حيث $e_1 = (1, 0, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0)$ ، $e_3 = (0, 0, 1)$ تُشكّل أساسا لـ \mathbb{R}^3 ، (حيث B مولّدة و مستقلة خطيا حسب الأمثلة السابقة) ويُسمّى هذا الأساس بالأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 .

مثال 4: ليكن $E = \mathbb{C}$ (مجموعة الأعداد المركبة) هي فضاء شعاعي على \mathbb{R} . الشعاعان 1 و i حيث $i^2 = -1$ يُشكّلان أساسا لـ \mathbb{C} .

بالفعل:

$$\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle \quad \text{بما أن } \forall x \in \mathbb{C}, x = \alpha + \beta i = \alpha \cdot 1 + \beta i$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad \text{حيث } 1 \text{ و } i \text{ مستقلان خطيا}$$

تطبيق 1: بيّن أن الشعاعان $u = (1, 2)$ ، $v = (3, 1)$ يُشكّلان أساسا للفضاء الشعاعي \mathbb{R}^2 على الحقل \mathbb{R} .

الحل:

(1) الشعاعان u و v يُولّدان \mathbb{R}^2 : لنبيّن أنّه من أجل كل شعاع $x = (x_1, x_2)$ من \mathbb{R}^2 يوجد عدنان α و β من \mathbb{R} بحيث يكون $x = \alpha u + \beta v$.

ليكن $x = (x_1, x_2)$ من \mathbb{R}^2 بحيث $x = \alpha u + \beta v$ ، والتي تُكافئ الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = x_1 \\ 2\alpha + \beta = x_2 \end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أن: $\beta = \frac{2x_1 - x_2}{5}$ ، $\alpha = \frac{-x_1 + 3x_2}{5}$

ومنه $\mathbb{R}^2 = \langle u, v \rangle$.

(2) - الشعاعان u و v مستقلان خطيا: فمن أجل كل عددين α و β من \mathbb{R} بحيث $\alpha u + \beta v = 0$ ، والتي تكافئ الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أن: $\alpha = \beta = 0$

ومنه الشعاعان u و v مستقلان خطيا.

إذن $\{u, v\}$ تُشكّل أساسا لـ \mathbb{R}^2 ، وهو المطلوب.

تطبيق 2: بين أن العائلة $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ حيث $v_1 = (1, 1, 0)$ ، $v_2 = (1, 0, 1)$ ، $v_3 = (0, 1, 1)$ ، تُشكّل أساسا للفضاء الشعاعي \mathbb{R}^3 على \mathbb{R} .

الحل:

- إن العائلة B مستقلة خطيا، وهذا مُحقق لأن

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

- العائلة B مولدة لـ \mathbb{R}^3 ، وهذا مُحقق لأن

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} v_1 + \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2} v_2 + \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{2} v_3$$

فالعائلة B تُشكّل أساسا لـ \mathbb{R}^3 .

نظرية (تمييز الأساس):

تُشكّل العائلة $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ أساسا للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا كان أي شعاع من E يُكتب بصورة وحيدة كمزج خطي لهذه العائلة.

البرهان:

• لنفرض أن العائلة $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تُشكّل أساسا لـ E ، وليكن x شعاعا من E فيكون

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad \dots(1)$$

لنثبت أن هذه العبارة وحيدة:

إذا فرضنا عبارة أخرى للشعاع x على الشكل التالي

$$x = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \dots + \lambda'_n x_n \quad \dots(2)$$

فمن (1) و (2) ينتج

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)x_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)x_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n)x_n = 0$$

و بما أن الأشعة x_n, \dots, x_2, x_1 مستقلة خطيا نجد

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = \lambda_2 - \lambda'_2 = \dots = \lambda_n - \lambda'_n = 0$$

أي

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 = \lambda'_2, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$$

- لنفرض أن أي شعاع من E يُكتب بصورة وحيدة كمزج خطي للعائلة B ولنبيّن أن هذه العائلة تُشكّل أساسا لـ E . من الفرض لدينا $E = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ، فيكفي إثبات الإستقلال الخطي للعائلة B .
ليكن

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

و التي يمكن أن نكتبها على الشكل التالي:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$$

ولكون العبارة $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$ وحيدة نجد

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

فالعائلة B مستقلة خطيا، إذن هذه العائلة تُشكّل أساسا لـ E .

ملاحظات:

- إذا كانت الأشعة x_n, \dots, x_2, x_1 تُشكّل أساسا للفضاء الشعاعي E وكان x شعاعا من E فإن

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

و تُسمّى السّلميات $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ بمركبات x بالنسبة للأساس $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- في \mathbb{R}^2 ، إذا مثلنا هندسيا $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ باختيار معلما (O, \vec{i}, \vec{j}) للمستوي فإن الشعاعين $e_1 = (1, 0)$ ،

$e_2 = (0, 1)$ يمثلان شعاعي أساس المعلم \vec{i}, \vec{j} .

وأنه إذا كان الشعاع $x = (x_1, x_2)$ من \mathbb{R}^2 و المرفق بالنقطة A من المستوي فإن

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

ويكون

$$\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$$

هـ - بُعد الفضاء الشعاعي:

تعريف 1: القول أن E فضاء شعاعي ببعد منته على K إذا كان هذا الفضاء الشعاعي يتولّد عن عدد منته من أشعته.

مثلا: رأينا أن \mathbb{R}^2 يتولّد عن الشعاعين $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$ ، فالفضاء الشعاعي \mathbb{R}^2 ببعد منته.

تعريف 2: إذا كان E فضاء شعاعي ببعد منته على K ، فجميع أسس E لها نفس عدد الأشعة، يُسمى هذا العدد ببعد

الفضاء الشعاعي E ونرمز له بالرمز $\dim E$.

أمثلة: من الأمثلة السابقة نجد

- كون $E = K$ فضاء شعاعي على K فإن $\dim K = 1$.

- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ، $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ، $\dim \mathbb{R}^n = n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

ملاحظات:

- نصلح على أن $\dim\{0_E\} = 0$.

- يُسمى كل فضاء شعاعي ذا البعد 1 بمستقيم شعاعي.

- يُسمى كل فضاء شعاعي ذا البعد 2 بمستوي شعاعي.

نظرية (بُعد جُداء فضاءين شعاعيين): إذا كان E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ببُعدين منتهيين فإن

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

البرهان: بداية يمكن التأكد من أن الجداء $E \times F$ هو فضاء شعاعي على الحقل K ، بالنسبة للعمليات التاليتين:

$$\forall ((x, y), (x', y')) \in (E \times F)^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall \lambda \in K, \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

لنفرض الآن أن $\dim E = n$ و $\dim F = m$ حيث n و m عددان طبيعيين غير معدومين.

لإثبات النتيجة المطلوبة يكفي أن نبين أن $E \times F$ يقبل أساسا عدد عناصره $n + m$.

لتكن العائلة $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ أساسا لـ E و العائلة $B' = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ أساسا لـ F .

ليكن (x, y) من $E \times F$ ، فبالتالي كل من x و y يُكتب بصورة وحيدة على شكل مزج خطي للأشعة x_1, \dots, x_n و

الأشعة y_1, y_2, \dots, y_m على الترتيب، و يُمكن أن نكتب

$$(x, y) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in K^{n+m} \quad \text{حيث}$$

كما يُمكن كتابة العبارة الأخيرة على الشكل:

$$(x, y) = \lambda_1(x_1, 0) + \lambda_2(x_2, 0) + \dots + \lambda_n(x_n, 0) + \mu_1(0, y_1) + \mu_2(0, y_2) + \dots + \mu_m(0, y_m)$$

معنى ذلك أن العائلة $\{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_n, 0), (0, y_1), (0, y_2), \dots, (0, y_m)\}$ مولدة لـ $E \times F$.

بقي أن نثبت أنها مستقلة خطيا، لذلك نفرض أن

$$\lambda_1(x_1, 0) + \lambda_2(x_2, 0) + \dots + \lambda_n(x_n, 0) + \lambda_{n+1}(0, y_1) + \lambda_{n+2}(0, y_2) + \dots + \lambda_{n+m}(0, y_m) = 0_{E \times F} = (0_E, 0_F)$$

وبالتالي:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_{n+1} y_1 + \lambda_{n+2} y_2 + \dots + \lambda_{n+m} y_m) = (0_E, 0_F)$$

فينتج أن

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \\ \lambda_{n+1} y_1 + \lambda_{n+2} y_2 + \dots + \lambda_{n+m} y_m = 0_F \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n+m} = 0 \quad \text{ومنه}$$

العائلة $\{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_n, 0), (0, y_1), (0, y_2), \dots, (0, y_m)\}$ أساسا لـ $E \times F$ ، عدد عناصرها $n + m$

$$\text{معناه} \quad \dim(E \times F) = n + m = \dim E + \dim F$$

تطبيق: نعتبر في \mathbb{R}^3 الأشعة التالية $v_1 = (1, 1, 2)$ ، $v_2 = (1, -1, 0)$ ، $v_3 = (0, 0, -1)$ و الشعاع $u = (1, 1, 1)$.

(1) ما هي مركبات الشعاع u بالنسبة للأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 ؟

(2) بين أن الأشعة v_1 ، v_2 و v_3 تُشكّل أساسا لـ \mathbb{R}^3 .

(3) أوجد مركبات الشعاع u بالنسبة لهذا الأساس الجديد.

الحل:

(1) الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 : $\{e_1, e_2, e_3\}$ حيث $e_1 = (1, 0, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0)$ ، $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$u = (1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

فمركبات الشعاع u بالنسبة للأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 هي 1، 1، 1 على الترتيب.

(2) - إثبات أن الأشعة v_1, v_2, v_3 تُشكّل أساساً لـ \mathbb{R}^3 :
 - الأشعة v_1, v_2, v_3 تُؤدّد \mathbb{R}^3 : لنبيّن أنّه من أجل كل شعاع $x = (x_1, x_2, x_3)$ من \mathbb{R}^3 توجد α, β, γ من \mathbb{R} بحيث يكون $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$.

ليكن $x = (x_1, x_2, x_3)$ من \mathbb{R}^3 بحيث يكون $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ ، وهي تكافئ الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ \alpha - \beta = x_2 \\ 2\alpha - \gamma = x_3 \end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أنّ: $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ، $\beta = \frac{x_1 - x_2}{2}$ ، $\gamma = x_1 + x_2 - x_3$.

ومنه $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

- الأشعة v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً: فمن أجل كل α, β, γ من \mathbb{R} بحيث يكون $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ ، والتي تكافئ الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أنّ: $\alpha = \beta = \gamma = 0$

ومنه الأشعة v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً.

إذن الأشعة v_1, v_2, v_3 تُشكّل أساساً لـ \mathbb{R}^3 .

(3) - إيجاد مركبات الشعاع u بالنسبة للأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$: هناك طريقتين

- الطريقة الأولى: حسب الإجابة عن السؤال 2، لدينا:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x = \frac{x_1 + x_2}{2} v_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} v_2 + (x_1 + x_2 - x_3) v_3$$

وبالتالي:

$$u = (1, 1, 1) = \frac{1+1}{2} v_1 + \frac{1-1}{2} v_2 + (1+1-1) v_3 = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

- الطريقة الثانية: لدينا من جهة $u = (1, 1, 1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$

ومن جهة أخرى، نكتب أشعة الأساس القانوني بدلالة الأشعة v_1, v_2, v_3 .

لدينا:

$$v_1 = (1, 1, 2) = 1e_1 + 1e_2 + 2e_3$$

$$v_2 = (1, -1, 0) = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3$$

$$v_3 = (0, 0, -1) = 0e_1 + 0e_2 - 1e_3$$

فنحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + 2e_3 = v_1 \\ e_1 - e_2 = v_2 \\ -e_3 = v_3 \end{cases}$$

والتي تكافئ:

$$\begin{cases} e_1 = \frac{v_1 + v_2 + 2v_3}{2} \\ e_2 = \frac{v_1 - v_2 + 2v_3}{2} \\ e_3 = -v_3 \end{cases}$$

$$u = e_1 + e_2 + e_3 = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3 \quad \text{ومنه}$$

فمركبات الشعاع u بالنسبة للأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي $1, 0, 1$ على الترتيب.

النتيجة: مركبات الشعاع u في \mathbb{R}^3 هي كالتالي:

$$- \quad u = (1, 1, 1) \quad \text{بالنسبة للأساس } \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$- \quad u = (1, 0, 1) \quad \text{بالنسبة للأساس } \{v_1, v_2, v_3\}.$$

تمارين للحل:

التمرين الأول:

بيّن أنّ مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} هي فضاء شعاعي على الحقل \mathbb{R} بالنسبة لعملية الجمع في \mathbb{C} ولعملية ضرب عددمركب بعدد حقيقي والمعرفتين كمايلي:

$$(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') i$$

$$\lambda(\alpha + \beta i) = \lambda\alpha + \lambda\beta i$$

حيث $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \lambda$ أعداد حقيقية و $i^2 = -1$.

التمرين الثاني:

بيّن إن كانت كل مجموعة من المجموعات التالية فضاء شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^3 على الحقل \mathbb{R} يُطلب تعيين أساسا له ويُعده في حالة الإيجاب:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 2020\}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

التمرين الثالث:

في الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^3 ، أكتب الشعاع $u = (1, 2, 4)$ على شكل مزج خطي للأشعة $v_1 = (1, 2, 0)$ ، $v_2 = (-1, 1, 3)$ ، $v_3 = (0, 2, 4)$.

التمرين الرابع:

في الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^4 ، ميّز في مجموعتي الأشعة التاليتين المرتبطة منها خطيا عن المستقلة خطيا:

$$E_1 = \{(1, 2, 1, 2), (0, 1, 1, 0), (1, 4, 3, 2)\}$$

$$E_2 = \{(1, 2, -1, 1), (0, 1, -1, 2), (2, 1, 0, 3), (1, 1, 0, 0)\}$$

التمرين الخامس:

برهن أنه إذا كانت الأشعة u ، v ، w من فضاء شعاعي على الحقل \mathbb{R} مستقلة خطيا فإن الأشعة $u+v$ ، $u-v$ ، $u-2v+w$ مستقلة خطيا.

التمرين السادس:

من أجل كل عدد حقيقي x ، نعتبر العددان المركبان التاليان:

$$u = (1-i)x + 3i \quad \text{و} \quad v = ix - \frac{3}{2}(1+i) \quad \text{حيث} \quad i^2 = -1$$

- بين أن u و v مستقلان خطيا على حقل الأعداد الحقيقية، ومرتبطان خطيا على حقل الأعداد المركبة.

التمرين السابع:

لتكن P_3 مجموعة كثيرات الحدود ذات الدرجة 3 على الحقل \mathbb{R} .

(1) برهن أن P_3 فضاء شعاعي على الحقل \mathbb{R} .

(2) بين ما إذا كانت الأشعة الثلاثة التالية مستقلة خطيا:

$$2t^3 - 4t^2 + 9t + 5, \quad t^3 - t^2 + 4t + 2, \quad t^3 - 3t^2 + 5t + 1$$

التمرين الثامن:

أثبت أن الأشعة $u = (1; 1; 1)$ ، $v = (1; 2; 3)$ و $w = (2; -1; 1)$ تُشكّل أساسا لـ \mathbb{R}^3 .

التمرين التاسع:

ليكن F الفضاء الشعاعي الجزئي من \mathbb{R}^4 والموّلد بواسطة الأشعة:

$$u = (2; 1; 3; 1), \quad v = (1; 2; 0; 1), \quad w = (-1; 1; -3; 0)$$

(أو بالكتابة $F = \langle u, v, w \rangle$)

(1) - تحقق من أن $v = u + w$ ، وهل العائلة $B = \{u, v, w\}$ مستقلة خطيا؟.

(2) - عيّن أساسا لـ F وكذا بُعد F .

التمرين العاشر:

أوجد بُعد F الفضاء الشعاعي الجزئي من \mathbb{R}^4 والمعرف كمايلي:

$$F = \langle (1, 2, 1, 0), (-1, 1, -4, 3), (2, 3, 3, -1), (0, 1, -1, 1) \rangle$$

التمرين الحادي عشر:

بيّن أنّ العائلة $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ تُشكّل أساسا لـ \mathbb{R}^3 علما أن $e'_1 = e_1$ ، $e'_2 = e_1 + 2e_2$ ، $e'_3 = e_3$

مع كون العائلة $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ هي الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 .

الفصل التاسع: التطبيقات الخطية

مقدمة: بعد أن رأينا في الفصل السابق مفهوم الفضاء الشعاعي لدراسة بنية مجموعة ما مَزوَّدة بعمليتين داخليّة وخارجيّة يتم تعريفهما على عناصر هذه المجموعة كما تطرّفنا إلى بعض الخصائص للفضاءات الشعاعية كتشكيل الأساس ومن ثم معرفة بُعد الفضاء الشعاعي، سنهتم في هذا الفصل بالتطبيقات الخطية المُعرّفة على الفضاءات الشعاعية المُنتهية البُعد. فالتطبيق الخطي هو علاقة بين فضاءين شعاعيين، في البداية نتعرّف على مفهومه ثمّ التطرّق إلى نواة وصورة التطبيق الخطي مع إدراج بعض النظريات التي تُميّز هذين المفهومين، كما سنرى العمليات الجبرية على التطبيقات الخطية، ثمّ التطرّق إلى ميزة التطبيق الخطي إن كان متبايناً، غامراً أو تقابلاً وكيفية نقل أساس من فضاء شعاعي إلى آخر وفق هذه الميزة، مع معالجة في كلّ مرّة أمثلة وتطبيقات مُتنوعة لتوضيح هذه المعارف والمفاهيم.

فيما يلي نفرض أن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K .

1.9 تعريف التطبيق الخطي: نقول عن التطبيق f من E نحو F أنه خطي إذا تحقق مايلي:

$$أ- \quad \forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$ب- \quad \forall \lambda \in K, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

ملاحظات:

- إنّ العبارتين في (أ) و (ب) تُكافئان العبارة التالية:

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

بالفعل: من جهة، إذا تحققت العبارتين في (أ) و (ب) (حسب التعريف) فينتج:

$$\begin{aligned} \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x) + f(\beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى (عكسياً)، ليكن f تطبيق من E نحو F يُحقق:

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$\text{بأخذ } \alpha = \beta = 1 \text{ نجد } f(x + y) = f(x) + f(y)$$

و بأخذ $\beta = 0$ نجد $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ، وبالتالي f تطبيق خطي.

- نرسم لمجموعة التطبيقات الخطية من E نحو F بالرمز $L(E, F)$.

- إذا كان f تطبيق خطي و تقابلي من E نحو F قلنا أنه تشاكل.

نتيجة: ليكن f تطبيق خطي من E نحو F ، لدينا:

$$(1) \quad f(0_E) = 0_F$$

$$(2) \quad \forall x \in E, f(-x) = -f(x)$$

البرهان:

(1) - بوضع $\lambda = 0_K$ في العبارة (ب) من التعريف نجد

$$f(0_E) = f(0_K x) = 0_K f(x) = 0_F$$

(2) - بوضع $\lambda = -1$ في العبارة (ب) من التعريف نجد

$$f(-x) = f((-1)x) = (-1)f(x) = -f(x)$$

ملاحظة: إذا كان $f(0_E) \neq 0_F$ فإن f ليس تطبيق خطي.

أمثلة:

(1) - ليكن a ثابت حقيقي، إن التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = ax$$

هو تطبيق خطي.

بالفعل:

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha x + \beta y) = a(\alpha x + \beta y)$$

$$= \alpha(ax) + \beta(ay)$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

(2) - التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = x - y$$

هو تطبيق خطي.

بالفعل:

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall ((x, y), (x', y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = f((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'))$$

$$= \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y'$$

$$= \alpha(x - y) + \beta(x' - y')$$

$$= \alpha f((x, y)) + \beta f((x', y'))$$

العمليات على التطبيقات الخطية:

E, F و G فضاءات شعاعية على الحقل K .

(1) - إذا كان f و g تطبيقان خطيان من E في F وكان λ عدد من K فإن $f + g$ و λf تطبيقان خطيان من E في F

F مُعرّفين كما يلي:

$$\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in E, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

(2) - إذا كان f تطبيقا خطيا من E في F و g تطبيقا خطيا من F في G فإن $g \circ f$ تطبيقا خطيا من E في G .

(3) - $(L(E, F), +, \cdot)$ فضاء شعاعي على الحقل K .

(4) - إذا كان f تشاكل من E في F فإن f^{-1} تشاكل من F في E .

2.9 نواة و صورة تطبيق خطي:

ليكن f تطبيق خطي من E نحو F .

تعريف 1: نُسَمِّي مجموعة الأشعة x من E حيث $f(x) = 0_F$ بنواة التطبيق الخطي f و نرمز لها بالرمز $Kerf$ ، ونكتب:

$$Kerf = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

تعريف 2: نُسَمِّي مجموعة الأشعة $f(x)$ حيث $x \in E$ (وهي مجموعة جزئية من F) بصورة التطبيق الخطي f و نرمز لها بالرمز Imf ، ونكتب:

$$Imf = \{y \in F, \exists x \in E : y = f(x)\} = f(E)$$

أمثلة تطبيقية:

(1) - في المثال 1 السابق، التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = ax$$

- إذا كان $a = 0$ (هو التطبيق المعدوم)، في هذه الحالة: $Kerf = \mathbb{R}$ و $Imf = \{0\}$.

- إذا كان $a \neq 0$ ، في هذه الحالة: $Kerf = \{0\}$ و $Imf = \mathbb{R}$.

(2) - في المثال 2 السابق، التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = x - y$$

المطلوب: تعيين $Kerf$ و Imf .

- تعيين $Kerf$:

$$Kerf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$$

$$= \{(x, x) / x = y\}$$

$$= \{x(1, 1), x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1, 1) \rangle$$

$$= \text{المؤودة بالشعاع } \langle (1, 1) \rangle.$$

- تعيين Imf :

$$Imf = \{f((x, y)) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(x - y)1 / x - y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle 1 \rangle$$

$$= \mathbb{R}$$

نظرية:

(1) - $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من E .

(2) - Imf فضاء شعاعي جزئي من F .

البرهان:

- (1) - نعلم أن $f(0_E) = 0_F$ ، معناه $0_E \in \text{Ker}f$ ومنه $\text{Ker}f \neq \emptyset$.
 - ومن أجل كل x و x' من $\text{Ker}f$ فإن $f(x+x') = f(x) + f(x') = 0_F$ بمعنى $(x+x') \in \text{Ker}f$.
 - وكذلك من أجل كل x من $\text{Ker}f$ فإن $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0_F$ بمعنى $\lambda x \in \text{Ker}f$.
 (2) - نعلم أن $f(0_E) = 0_F$ ، معناه $0_F \in \text{Im}f$ ومنه $\text{Im}f \neq \emptyset$.
 - ومن أجل كل y و y' من F يوجد x و x' من E بحيث كل $y = f(x)$ و $y' = f(x')$ ومنه $y + y' = f(x) + f(x') = f(x+x')$ ، $x+x' \in E$ ومعناه $y + y' \in \text{Im}f$.
 - وكذلك $\forall \lambda \in K, \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$ ، $\lambda x \in E$ معناه $\lambda y \in \text{Im}f$.

تطبيق: ليكن f التطبيق المُعرّف كمايلي:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = (2x - 4y, x - 2y)$$

(1) - بين أن f تطبيق خطي.

(2) - عيّن $\text{Ker}f$ و $\text{Im}f$.

الحل:

(1) - لدينا من جهة

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall ((x, y), (x', y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')) \\ &= (2(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - 2(\alpha y + \beta y')) \\ &= (2\alpha x - 4\alpha y + 2\beta x' - 4\beta y', \alpha x - 2\alpha y + \beta x' - 2\beta y') \quad \dots(1) \end{aligned}$$

و من جهة أخرى:

$$\begin{aligned} \alpha f((x, y)) + \beta f((x', y')) &= \alpha(2x - 4y, x - 2y) + \beta(2x' - 4y', x' - 2y') \\ &= (2\alpha x - 4\alpha y + 2\beta x' - 4\beta y', \alpha x - 2\alpha y + \beta x' - 2\beta y') \quad \dots(2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) ينتج أن f تطبيق خطي.

(2) - تعيين $\text{Ker}f$:

$$\text{Ker}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (0, 0)\}$$

ولدينا:

$$f((x, y)) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

ومنه

$$f((x, y)) = (0, 0) \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

بيانيا: هي إحداثيات نقط المستقيم ذو المعادلة $x - 2y = 0$.

ويكون لدينا

$$\begin{aligned} \text{Ker}f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\} \\ &= \{(2y, y), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2, 1) \rangle \\ &= (\text{المُولدة بالشعاع } (2, 1)). \end{aligned}$$

- تعيين $\text{Im}f$:

$$\begin{aligned} \text{Im}f &= \{f((x, y)) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(2x - 4y, x - 2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(2x, x) + (-4y, -2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(2, 1) - 2y(2, 1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x - 2y)(2, 1) / x - 2y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2, 1) \rangle \\ &= (\text{المُولدة بالشعاع } (2, 1)). \end{aligned}$$

نظرية: ليكن f تطبيق خطي من E في F .

$$(1) \quad \text{Im} f = f(E) \iff \text{Ker} f = \{0_E\}$$

$$(2) \quad \text{Ker} f = \{0_E\} \iff \text{Im} f = F$$

البرهان:

(1) - إذا كان f تطبيق غامر فإن $f(E) = F$ أي $\text{Im}f = F$ ، والعكس صحيح.

(2) - ليكن f تطبيق متباين، وليكن $x \in \text{Ker}f$ أي $f(x) = 0_F$.

بما أن f تطبيق خطي فإن $f(0_E) = 0_F$ ، وبالتالي $f(x) = f(0_E)$ فينتج أن $x = 0_E$ ، إذن $\text{Ker}f = \{0_E\}$.

- عكسيا: ليكن $\text{Ker}f = \{0_E\}$. فمن أجل كل x_1 و x_2 من E بحيث $f(x_1) = f(x_2)$ أي $f(x_1) - f(x_2) = 0$

معناه $f(x_1 - x_2) = 0$ (لأن f تطبيق خطي)، فينتج أن $x_1 - x_2 = 0_E$ أي $x_1 = x_2$ فالتطبيق f متباين.

تطبيق: ليكن f التطبيق المُعرّف كمايلي:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = (x, x, y)$$

(1) - بين أن f تطبيق خطي.

(2) - هل f متباين؟، وهل هو غامر؟ - برّر جوابك.

الحل:

(1) - لدينا

$$\begin{aligned}\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall ((x, y), (x', y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (\alpha x, \alpha x, \alpha y) + (\beta x', \beta x', \beta y') \\ &= \alpha f((x, y)) + \beta f((x', y'))\end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي.

(2) - حتى يكون f متباين يكفي أن نُبين أن $\text{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{(0, 0)\}$.

لدينا

$$\begin{aligned}\text{Ker} f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f((x, y)) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, x, y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \wedge y = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}\end{aligned}$$

إذن f تطبيق متباين.

- حتى يكون f غامر يجب أن يكون $\text{Im} f = F$.

لكننا نلاحظ مثلا أن الشعاع $(1, 2, 3)$ من \mathbb{R}^3 و $(1, 2, 3) \notin \text{Im} f$ (حيث أن كل شعاع من $\text{Im} f$ هو من الشكل (x, x, y)) ومنه $\text{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ ، إذن f ليس غامر.

3.9 التطبيقات الخطية والفضاءات الشعاعية ذات البعد المنته:

فيما يلي نفرض أن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K حيث $\dim E = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

نظرية 1: إذا كانت العائلة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا لـ E و كانت v_1, v_2, \dots, v_n أشعة من E فإنه يوجد تطبيق خطي

وحيث f من E في F بحيث يكون $f(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$.

البرهان: ليكن x و y شعاعان من E فيكون لدينا:

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \quad \text{و} \quad y = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n$$

ولیکن f تطبيق من E في F بحيث $f(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

- إن f تطبيق خطي، لأن

$$\begin{aligned}\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha \lambda_1 u_1 + \alpha \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha \lambda_n u_n + \beta \mu_1 u_1 + \beta \mu_2 u_2 + \dots + \beta \mu_n u_n) \\ &= f((\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1) u_1 + (\alpha \lambda_2 + \beta \mu_2) u_2 + \dots + (\alpha \lambda_n + \beta \mu_n) u_n) \\ &= (\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1) v_1 + (\alpha \lambda_2 + \beta \mu_2) v_2 + \dots + (\alpha \lambda_n + \beta \mu_n) v_n \\ &= \alpha \lambda_1 v_1 + \alpha \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha \lambda_n v_n + \beta \mu_1 v_1 + \beta \mu_2 v_2 + \dots + \beta \mu_n v_n \\ &= \alpha (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) + \beta (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y)\end{aligned}$$

- لإثبات الوحدة: نفرض g تطبيق خطي من E في F بحيث يكون $g(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$.

من أجل x من E فيكون لدينا: $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ سلميات من K .
وبما أن g تطبيق خطي فإن:

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2) + \dots + \lambda_n g(u_n) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \\ &= f(x) \end{aligned}$$

فمن أجل كل x من E يكون $g(x) = f(x)$.

نظرية 2: إذا كانت العائلة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا لـ E و كانت v_1, v_2, \dots, v_n أشعة من F وكان f تطبيق خطي من E في F بحيث يكون $f(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$ فإن:

(1) يكون التطبيق f متباينا إذا وفقط إذا كانت الأشعة v_1, v_2, \dots, v_n مستقلة خطيا.

(2) يكون التطبيق f غامرا إذا وفقط إذا كانت الأشعة v_1, v_2, \dots, v_n مولدة لـ F .

(3) يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كانت العائلة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا لـ F .

البرهان:

نعلم أن (3) هو نتيجة لـ (1) و (2)، فيكفي أن نبرهن (1) و (2).

(1) من أجل كل شعاع x من E يكون $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ مع $f(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$.
-إذا كانت الأشعة v_1, v_2, \dots, v_n مستقلة خطيا فإن:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f &\Rightarrow f(x) = 0_F \\ &\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_F \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \\ &\Rightarrow x = 0_E \end{aligned}$$

ومنه $\text{Ker } f = \{0_E\}$ إذن التطبيق f متباين.

-نفرض الآن التطبيق f متباين و ليكن $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_F$
فينتج $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = 0_F$.

وبما أن f متباين فإن $\text{Ker } f = \{0_E\}$ ، وبالتالي $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$

ولما كانت العائلة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا لـ E فإن $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ أي أن الأشعة v_1, v_2, \dots, v_n مستقلة خطيا.

(2) - إذا كانت الأشعة v_1, v_2, \dots, v_n مولدة لـ F ، فكل شعاع y من F يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

ومنه

$$y = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n)$$

معناه $y \in \text{Im } f$ أي f غامر.

-إذا كان f غامر، فبفرض y من F يوجد x من E بحيث يكون $y = f(x)$.

ولما كان

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

فيكون

$$y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

معناه الأشعة v_1, v_2, \dots, v_n مولدة لـ F .

يمكن صياغة الشطر (3) من النظرية السابقة على الشكل التالي:

f تتشاكل من E في F إذا وفقط إذا كانت صورة أساس في E بالتطبيق f أساس في F .

تطبيق: ليكن $\{e_1, e_2\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ الأساسين القانونيين للفضائين الشعاعيين \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 على الحقل \mathbb{R} على الترتيب.

- عيّن التطبيق الخطي f من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R}^3 الذي يُحقّق $f(e_1) = 2e'_2 + e'_3$ و $f(e_2) = e'_2 - e'_1$.

الحل:

نعلم أن: $e_1 = (1, 0)$ ، $e_2 = (0, 1)$ ، $e'_1 = (1, 0, 0)$ ، $e'_2 = (0, 1, 0)$ ، $e'_3 = (0, 0, 1)$.

- من $f(e_1) = 2e'_2 + e'_3$ فإن $f(e_1) = (0, 2, 1)$.

- ومن $f(e_2) = e'_2 - e'_1$ فإن $f(e_2) = (-1, 1, 0)$.

فمن أجل (x, y) من \mathbb{R}^2 وكون f تطبيق خطي، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} f((x, y)) &= f(xe_1 + ye_2) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) \\ &= x(0, 2, 1) + y(-1, 1, 0) \\ &= (-y, 2x + y, x) \end{aligned}$$

وبالتالي التطبيق الخطي f مُعرّف كما يلي:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto f((x, y)) = (-y, 2x + y, x) \end{aligned}$$

رتبة تطبيق خطي:

فيما يلي نفرض أن E و F فضائين شعاعيين ببُعدين منتهيين على الحقل K ، و f تطبيق خطي من E في F .

تعريف: نُسمّي بُعد $f(E)$ برتبة التطبيق الخطي f وندلّ عليها بالرمز $rg(f)$ و نكتب $rg(f) = \dim(\text{Im}f)$.

نظرية: إذا كان f تطبيق خطي من E في F فإن:

$$\dim E = \dim \text{Ker}f + rg(f)$$

البرهان:

- إذا كان $\text{Ker}f = \{0_E\}$ فإن f متباين (حسب ما سبق)، وبالتالي التطبيق f يُصبح تقابلا من E في $f(E)$.

ومنه: $\dim E = \dim f(E) = rg(f)$.

- إذا كان $\text{Ker}f \neq \{0_E\}$ ، لنفرض العائلة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا لـ $\text{Ker}f$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و العائلة $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

أساسا لـ $f(E)$ حيث $p \in \mathbb{N}^*$ ، كما نفرض أن $u_{n+p}, \dots, u_{n+2}, u_{n+1}$ أشعة من E تُحقّق $f(u_{n+i}) = v_i$ من أجل

$$1 \leq i \leq p$$

ثمّ لنبيّن أنّ العائلة $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p}\}$ أساسا لـ E :

لأجل ذلك، نفرض أن (1) $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} u_{n+p} = 0$

وبما أن f تطبيق خطي فإن (2) $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} u_{n+p}) = 0$

وبما أن $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ شعاع من $\text{Ker} f$ فإن (3) $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = 0$

من العلاقتين (2)، (3) وكون f تطبيق خطي فإن $\lambda_{n+1} v_1 + \lambda_{n+2} v_2 + \dots + \lambda_{n+p} v_p = 0$

و بما أن $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ أساسا لـ $f(E)$ فإن $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n+p} = 0$

فُتصبح العلاقة (1) كما يلي: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$

وبما أن $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا لـ $\text{Ker} f$ فإن $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

وبالتالي: إذا تحققت العلاقة (1) ينتج أن $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n+p} = 0$

و هذا يعني أن الأشعة $u_{n+p}, \dots, u_{n+1}, u_n, \dots, u_2, u_1$ مُستقلة خطيا.

لنأخذ الآن شعاع كفي x من E و لنفرض $y = f(x)$ ، و بما أن $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ أساسا لـ $f(E)$ فيمكن أن نكتب

$y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p$ ، وبفرض $x' = \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \dots + \alpha_p u_{n+p}$ نجد $y = f(x')$ ، وبالتالي

$$f(x - x') = 0$$

وهذا يعني أن $x - x' \in \text{Ker} f$ ، فيكتب الشعاع $x - x'$ على الشكل التالي: $x - x' = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$

وهذا يُؤدّي إلى $x = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \dots + \alpha_p u_{n+p}$

و هذا يعني أن الأشعة $u_{n+p}, \dots, u_{n+1}, u_n, \dots, u_2, u_1$ مُولدة لـ E ، فهي تُشكّل أساسا لـ E

مما يعني أن: $\dim E = \dim \text{Ker} f + \dim f(E)$

أي $\dim E = \dim \text{Ker} f + \text{rg}(f)$.

نتيجة: إذا كان f تطبيق خطي من E في F فإن:

$$- (\dim E = \text{rg}(f)) \Leftrightarrow (f \text{ متباين})$$

$$- (\dim F = \text{rg}(f)) \Leftrightarrow (f \text{ غامر})$$

بالفعل:

- ليكن f متباين، فهذا يُكافيء أن $\text{Ker} f = \{0_E\}$ أي $\dim \text{Ker} f = 0$ ومنه $\dim E = \text{rg}(f)$.

- ليكن f غامر، فهذا يُكافيء أن $f(E) = F$ ومنه $\dim F = \text{rg}(f)$.

تطبيق 1: نعتبر التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (3x - 4y, x - y)$$

(1) - بيّن أن f تطبيق خطي.

(2) - عيّن $\text{Ker} f$ و $\text{Im} f$ ، ثم $\text{rg}(f)$.

الحل:

(1) - إثبات أن f تطبيق خطي:

لدينا

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall ((x, y), (x', y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')) \\ &= (3(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y')) \\ &= (\alpha(3x - 4y) + \beta(3x' - 4y'), \alpha(x - y) + \beta(x' - y')) \\ &= \alpha(3x - 4y, x - y) + \beta(3x' - 4y', x' - y') \\ &= \alpha f((x, y)) + \beta f((x', y')) \end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي.

(2) - تعيين $\text{Ker} f$:

$$\begin{aligned} \text{Ker} f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f((x, y)) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y = 0\} \\ &= \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

- تعيين $\text{Im} f$:

$$\begin{aligned} \text{Im} f &= \{f((x, y)) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(3x - 4y, x - y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(3x, x) + (-4y, -y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(3, 1) - y(4, 1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \langle (3, 1), (4, 1) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{لدينا: } \text{rg}(f) = \dim \text{Im} f = 2$$

ملاحظة: لاحظ صحة العلاقة $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker} f + \text{rg}(f)$ حيث $\dim \text{Ker} f = 0$.

تطبيق 2: رأينا في تطبيق سابق، كيفية إنشاء التطبيق الخطي f المُعرّف كما يلي:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = (-y, 2x + y, x)$$

و المطلوب الآن الإجابة عن السؤالين التاليين:

(1) - بين أن $\text{Im} f$ مستوي شعاعي يُطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

(2) - هل f متباين؟، علّل.

الحل:

(1) - تُعيّن $\text{Im} f$:

$$\begin{aligned}
\text{Im}f &= \{f((x,y)) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(-y, 2x+y, x) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(0, 2x, x) + (-y, y, 0) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{x(0, 2, 1) - y(-1, 1, 0) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \langle (0, 2, 1), (-1, 1, 0) \rangle
\end{aligned}$$

و بالتالي يكون لدينا: $\dim \text{Im}f = 2$

إذن $\text{Im}f$ مستوي شعاعي.

-تعيين المعادلة الديكارثية للمستوي الشعاعي $\text{Im}f$:

$$\text{نضع } f((x,y)) = (X,Y,Z) \text{، فيُصبح } (X,Y,Z) = (-y, 2x+y, x) \text{ معناه}$$

$$\begin{cases} X = -y \\ Y = 2x + y \\ Z = x \end{cases}$$

و التي يُمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\begin{cases} X = -y \\ Y = 2x + y \\ -2Z = -2x \end{cases}$$

و بجمع هذه المعادلات طرفا لطرف نجد:

$$X + Y - 2Z = 0$$

وهي تُمثّل المعادلة الديكارثية للمستوي الشعاعي $\text{Im}f$.

(2) - لمعرفة إن كان التطبيق f متباينا أم لا، هناك طريقتين على الأقل.

الطريقة الأولى: نستعمل نظرية البعد $(\dim E = \dim \text{Ker}f + \text{rg}(f))$.

لدينا في هذه الحالة: $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker}f + \text{rg}(f)$ ومنه $\dim \text{Ker}f = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rg}(f)$

أي $\dim \text{Ker}f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Im}f$ و بالتالي $\dim \text{Ker}f = 0$ ، فالتطبيق f متباين.

الطريقة الثانية: بتعيين $\text{Ker}f$.

يُمكن التأكد في هذه الحالة أن: $\text{Ker}f = \{(0,0)\}$ ، فالتطبيق f متباين.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

نعتبر التطبيقين f و g المعرفين كما يلي:

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x,y) &\mapsto (x-y, 0) & (x,y) &\mapsto (2x+y, x+y)
\end{aligned}$$

(1) بيّن أنّ التطبيقين f و g خطيين.

(2) عيّن كل من التطبيقين $2f$ ، $f \circ g$ حيث $f^3 = f \circ f \circ f$

(3) جد نواة وصورة كل تطبيق من التطبيقين الخطيين f و g ، معينا بُعد كل منها.

(4) أي من التطبيقين f و g تشاكل من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R}^2 ؟، علّل.

التمرين الثاني:

نعتبر التطبيق f من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^2 المعرفة كمايلي:

$$f((x, y, z)) = (-x + y + z, x - y + z)$$

و التطبيق g من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R}^3 المعرفة كمايلي:

$$g((x, y)) = (y, x, x + y)$$

(1) بين أن التطبيقين f و g خطيين.

(2) عيّن $\text{Im}f$ ، $\text{Ker}f$ ، $\text{Im}g$ و $\text{Ker}g$ مع تعيين أبعادها.

(3) عيّن $f \circ g$ و $g \circ f$.

التمرين الثالث:

نعتبر التطبيق f من \mathbb{R}^2 في \mathbb{C} (مجموعة الأعداد المركبة) المعرفة كمايلي:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = x + iy$$

(1) بين أن f تطبيق خطي.

(2) - عيّن $\text{Im}f$ ، $\text{Ker}f$ ، وهل أن f تقابل؟.

- تحقق من أن: $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker}f + \text{rg}(f)$

(3) إذا كان $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ الأساس القانوني في \mathbb{R}^2 ، فأوجد أساسا في \mathbb{C} .

التمرين الرابع:

ليكن f تطبيقا خطيا كيفيا من \mathbb{R} في \mathbb{R} ، ولنعتبر التطبيق g المعرفة من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R}^2 كمايلي:

$$g((x, y)) = (x, y - f(x))$$

(1) أثبت أن التطبيق g خطي، ثم عيّن $\text{Im}g$ و $\text{Ker}g$.

(2) هل g تقابلي؟ - إذا كان الجواب بنعم عيّن g^{-1} .

التمرين الخامس:

لتكن العائلة $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساسا لـ \mathbb{R}^3 ولنعتبر الأشعة e'_1, e'_2, e'_3 من \mathbb{R}^3 حيث:

$$e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + 2e_2, e'_3 = 2e_2 + 3e_3$$

(1) أثبت أن العائلة $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ أساسا لـ \mathbb{R}^3 .

(2) ليكن f التطبيق الخطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^3 والمعرفة بـ:

$$f(e_1) = e'_1, f(e_2) = e'_2, f(e_3) = e'_3$$

أ- هل أن التطبيق f تقابلي؟ علّل.

ب- إذا كان الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ هو الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 ، فعين عبارة التطبيق الخطي f .

التمرين السادس:

لتكن العائلة $\{e_1, e_2, e_3\}$ هي الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 ، وليكن f التطبيق الخطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^3 حيث

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + 2e_2 + e_3, \quad f(e_3) = 2e_1 - e_2 + e_3$$

(1) عيّن عبارة التطبيق الخطي f ، وماهي رتبته؟.

(2) استنتج بُعد $Ker f$ ، ثم أوجد $Ker f$.

التمرين السابع:

ليكن f تطبيق خطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^3 والمعرف كما يلي:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (x + y, x + z, x - z)$$

(1) احسب $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ و $f(e_3)$ حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ هي الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 .

(2) أ- أثبت أن الأشعة $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ ، $f(e_3)$ مستقلة خطياً.

ب- عيّن $Im f$.

ج- هل f تقابل؟، علّل.

(3) عيّن التطبيق $f \circ f = f^2$ ، وتحقق أنه خطي.

التمرين الثامن:

(1) أثبت أن الأشعة التالية تُشكل أساساً لـ \mathbb{R}^3 :

$$u_1 = (1, -2, 0), \quad u_2 = (1, -3, 0), \quad u_3 = (0, 0, 1)$$

(2) ليكن f التطبيق الخطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^3 المعرف كما يلي:

$$f(e_1) = (1, -2, 0), \quad f(e_2) = (0, -1, -1), \quad f(e_3) = (2, 1, 3)$$

أ- احسب كل من $f(u_1)$ ، $f(u_2)$ ، $f(u_3)$.

ب- عيّن عبارة التطبيق الخطي f ، واستنتج أساساً لـ $f(\mathbb{R}^3)$ و رتبة التطبيق f .

ج- عيّن $Ker f$.

التمرين التاسع:

ليكن f تطبيق خطي من \mathbb{R}^2 في \mathbb{R}^3 .

باستعمال الأساسين القانونيين في \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 ، أوجد عبارة التطبيق الخطي f بحيث يكون:

$$f((1, -1)) = (-1, -2, 5), \quad f((2, -3)) = (0, 5, 4)$$

التمرين العاشر:

ليكن E فضاء شعاعياً على حقل K ، وليكن f و g تطبيان خطيان من E في E .

أثبت أن $f(Ker(g \circ f)) = Kerg \cap Im f$.