برنامج مقياس تحليل1- السداسي الأول

Analyse 1	**تحليل1**
Chapitre 1: Corps des nombres réels a. Axiomatique de R : opérations et propriétés, ordre, majorant et minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum. b. Axiome de la borne supérieure c. Valeur absolue d. Partie entière d'un nombre réel e. Axiome d'Archimède	**المحور 1: حقل الأعداد الحقيقية** أ. مسلّمات المجموعة $\mathbb{R}$: عمليات وخواص، ترتيب، حد من الأعلى، حد من الأسفل، الحد الأعلى، الحد الأسفل، العنصر الأكبر العنصر الأصغر ب. مسلّمة الحد الأعلى ج. القيمة المطلقة د. الجزء الصحيح لعدد حقيقي ه. مبدأ أرخميدس
Chapitre 2: Suites réelles a. Définition d'une suite réelle, exemples, suites bornées, suites monotones, suites extraites. b. Convergence et divergence des suites et propriétés. c. Limite inférieure et limite supérieure d'une suite. d. Convergence des suites monotones. e. Suites adjacentes f. Théorème de Bolzano-Weierstass g. Théorème d'encadrement h. Suites de Cauchy	**المحور 2: المتتاليات العددية** أ. تعريف المتتالية العددية، أمثلة، المتتاليات المحدودة، المتتاليات الرتيبة، المتتاليات المستخرجة. ب. تقارب وتباعد المتتاليات وخواص ج. النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية د. تقارب المتتاليات الرتيبة ه. المتتاليتان المتجاورتان و. نظرية بولزانو–فايرشتراس ز. نظرية الحصر ح. متتالية كوشي
Chapitre 3: Limites et continuité des fonctions a. Définition d'une application, d'une fonction b. Fonctions bornées et fonctions monotones c. Limite d'une fonction d. Continuité d'une fonction e. Opérations sur les fonctions continues f. Continuité uniforme g. Théorèmes fondamentaux : valeur intermédiaire, Weierstrass et Heine h. Inversion des fonctions monotones et continues i. Suites récurrentes et fonctions continues	**المحور 3: نهايات واستمرارية الدوال** أ. تعريف التطبيق – الدالة ب. الدوال المحدودة و الدوال الرتيبة ج. نهاية دالة د. استمرارية دالة ه. الاستمرار المنتظم و. عمليات على الدوال المستمرة ز. نظريات أساسية: القيم المتوسطة– فايرشتراس و هاين ح. عكس الدوال الرتيبة والمستمرة ط. المتتاليات التراجعية والدوال المستمرة
Chapitre 4: Dérivation a. Définition et propriétés b. Interprétation géométrique de la dérivée c. Opérations sur les dérivées et formule de Leibniz d. Théorème de Rolle **e.** Théorème des accroissements finis et applications, règle de l'Hospital	**المحور 4: الاشتقاقية** أ. تعريف وخواص ب. التفسير الهندسي للعدد المشتق ج. عمليات على المشتقات و دستور ليبنيز. د. نظرية رول ه. نظرية التزايدات المنتهية وتطبيقاتها، قاعدة لوبيتال
Chapitre 5: Fonctions élémentaires a. Fonctions trigonométriques et leurs inverses b. Fonctions hyperboliques et leurs inverses	**المحور 5: الدوال الأوّلية** أ. الدوال المثلثية ودوالها العكسية ب. الدوال الزائدية ودوالها العكسية
<u>مواقع في النت</u>: **1.** http://exo7.emath.fr/un.html **2.** http://www.bibmath.net/ <u>كلمات مفتاحية للبحث في النت</u>: Analyse réelle – Analyse L1 – Analyse S1 – Analyse1 – – تحليل1 – تحليل حقيقي– كل محور وأي عنصر منه	<u>مراجع مقترحة</u>: (موجودة بالمكتبة الجامعية): **1.** التحليل1 تذكير بالدروس وتمارين محلولة عدد300 بابا حامد – بن حبيب ترجمة عبد الحفيظ مقران ديوان المطبوعات الجامعية **2.** الرياضيات والاعلام الآلي – التحليل جزء1 جزء2 أبو بكر خال سعدالله **3.** عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) جزأين 1 و 2 السنة أولى وثانية جامعي– قادة علاّب **4.** الرياضيات في الجامعة التحليل دروس وتمارين محلولة جزأين الاستاذ علي حميدة والأستاذ عبد الوهاب بيبي

	مراجع أجنبية: **1.** J.-M. Monier, Analyse PCSI-PTSI, Dunod, Paris 2003. **2.** Y. Bougrov et S. Nikolski, Cours de Mathématiques Supérieures, Editions Mir, Moscou, 1983. **3.** N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980. **4.** B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Cours d'analyse, Librairie Armand Colin, Paris, 1976. **5.** J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 2, Edition Dunod, 1978.

I- مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$:

1. تذكير: نرمز بـ: $\mathbb{N}$ لمجموعة الأعداد الطبيعية وبـ: $\mathbb{Z}$ لمجموعة الأعداد الصحيحة و أخيرا بـ: $\mathbb{Q}$ لمجموعة الأعداد الناطقة والمعرفة كما يلي:

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}/\ p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{Z}^*\right\}$. ويكون لدينا $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$. نعلم أنّ المجموعة $\mathbb{Z}$ أنشئت لحل بعض المسائل الجبرية من الشكل $x+2=0$

والمجموعة $\mathbb{Q}$ وسعت مجال حل مسائل من الشكل التالي: $3x+2=0$ مع ذلك سنرى أنّ هذه المجموعة تعجز عن احتواء حلول بعض المسائل الأخرى

أمثلة: $2\in\mathbb{Q},\ \frac{1}{3}\in\mathbb{Q},-\frac{5}{4}\in\mathbb{Q},$

2. تمييز الأعداد الناطقة:

مبرهنة: يكون العدد a ناطقا إذا وفقط إذا كان: 1) للعدد a جزء عشري منته أو 2) للعدد a كتابة عشرية دورية

أمثلة: $1)\ \frac{5}{40}=0.125\in\mathbb{Q},\quad 2)-1.3333...\in\mathbb{Q},\ 5,23271271...\in\mathbb{Q},\ 3)\ e\simeq 2.7128\notin\mathbb{Q}$

تطبيق: (الانتقال من الكتابة العشرية إلى الكتابة الكسرية)

اثبت أنّ العدد $a=1,520212021......$ عدد ناطق.

الحلّ: لنثبت أنّ العدد a يكتب على الشكل $a=\frac{p}{q}/\ p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{Z}^*$

لدينا $a=1,520212021......$ ومنه $10a=15,20212021......(1)$

ويكون لدينا كذلك $100000a=152021,20212021.....(2)$ وبطرح (1) من (2) نجد

$$100000a-10a=152021,2021.....-15,2021....\Rightarrow 99990a=152006\Rightarrow a=\frac{152006}{99990}$$

2. مبرهنة: لا تمتع المعادلة $x^2-2=0...(1)$ بحل في المجموعة $\mathbb{Q}$

II- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

1. تعريف: المعادلة (1) لا تقبل حلولا ناطقة وهذا يبرر توسيع مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ إلى مجموعة تسمّى مجموعة الأعداد الحقيقية ورمز ها $\mathbb{R}$ تقبل فيها المعادلة (1) حلولا غير ناطقة أو صماء نرمز لهذه المجموعة التي تحوي هذه الحلول بـ: $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ونكتب: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$

2. خواص المجموعة $\mathbb{R}$: لتكن b,a و c أعدادا حقيقية

1.2. خواص الجمع:

1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$)

2) $a+0=0+a=a$ (العدد 0 هو العنصر الحيادي لعملية الجمع في $\mathbb{R}$)

3) $a+(-a)=(-a)+a=0$ (لكل عدد حقيقي a نظير بالنسبة للجمع في $\mathbb{R}$ نرمز له بـ: $-a$)

4) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\ a+b=b+a$ (الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$)

نلخّص الخواص السابقة بالقول أنّ $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبديلية وتقرأ $\mathbb{R}$ مزودة بالجمع زمرة تبديلية.

2.2. خواص الضرب:

5) $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ (الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$)

6) $a\times 1=1\times a=a$ (العدد 1 هو العنصر الحيادي لعملية الضرب في $\mathbb{R}$)

7) $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$ (لكل عدد حقيقي غير معدوم a مقلوب بالنسبة للضرب في $\mathbb{R}^*$ نرمز له بـ: $\frac{1}{a}$)

8) $a\times b=b\times a$ (الضرب تبديلي في $\mathbb{R}$)

نستنتج من الخواص السابقة أنّ $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبديلية.

3.2. خاصية التوزيع:

9) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ (الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$).

نخلص من كل الخواص السابقة 1)- 9) بأنّ $(\mathbb{R},+,\times)$ حقل تبديلي.

3. خواص الترتيب في $\mathbb{R}$:

العلاقة $\le$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تملك الخواص التالية :

10) $\forall a\in\mathbb{R}:\quad a\le a$ (العلاقة $\le$ انعكاسية في $\mathbb{R}$).

11) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\quad (a\le b)\wedge(b\le a)\Rightarrow a=b$ (العلاقة $\le$ ضد تناظرية في $\mathbb{R}$).

12) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\quad (a\le b)\wedge(b\le c)\Rightarrow(a\le c)$ (العلاقة $\le$ متعدية في $\mathbb{R}$).

13) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\quad (a\le b)\vee(b\le a)$

14) $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:\quad (a\le b)\wedge(c\le d)\Rightarrow a+c\le b+d$

15) $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:\quad (0\le a\le b)\wedge(0\le c\le d)\Rightarrow a\times c\le b\times d$

الخواص الثلاثة الأولى 10) - 12) تبين أنّ العلاقة $\le$ علاقة ترتيب في $\mathbb{R}$ والترتيب كلّيّ حسب الخاصية 13).

ونقول أن مجموعة الأعداد الحقيقية مرتبة ترتيبا كليا. بالنسبة لكل من الخاصيتين 14) و15) تبين أن علاقة الترتيب $\le$ متلائمة مع الجمع والضرب في $\mathbb{R}$.

4. المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$:

1.4. تعاريف: لتكن A مجموعة جزئية وغير خالية من $\mathbb{R}$.

- نقول أنّ A محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا تحقق: $\exists a\in\mathbb{R},\ \forall x\in A: x\le a$ يسمّى العدد a حاد من الأعلى لـ: A
- نقول أنّ A محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا تحقق: $\exists b\in\mathbb{R},\ \forall x\in A: x\ge b$ العدد b يسمّى حاد من الأسفل لـ: A
- نقول أنّ A محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

  ونكتب A محدودة $\Leftrightarrow\ \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in A: b\le x\le a$
- تكون A محدودة إذا وفقط إذا تحقق: $\exists a>0\ ,\ \forall x\in A: |x|\le a$
- إذا كانت A محدودة من الأعلى فإنّ أصغر الحواد من الأعلى يسمّى الحد الأعلى ونرمز له بالرمز $\sup A$
- إذا كانت A محدودة من الأسفل فإنّ أكبر الحواد من الأسفل يسمّى الحد الأسفل ونرمز له بالرمز $\inf A$
- يكون العدد الحقيقي a عنصرا أكبرا للمجموعة A إذا كان: $a\in A,\ \forall x\in A: x\le a$ والعنصر الأكبر إن وجد فهو وحيد ونرمز له بالرمز $\max A$.
- يكون العدد الحقيقي b عنصرا أصغرا للمجموعة A إذا كان: $b\in A,\ \forall x\in A: x\ge b$ والعنصر الأصغر إن وجد فهو وحيد ونرمز له بالرمز $\min A$.

ملاحظات:

1) إذا قبلت مجموعة A عنصرا أكبرا فإن $\max A = \sup A$.كذلك إذا قبلت مجموعة A عنصرا أصغرا فإن $\min A = \inf A$

2) إذا كانت A غير محدودة من الأعلى نقول أنّ $\sup A = +\infty$ وإذا كانت A غير محدودة من الأسفل نقول أنّ $\inf A = -\infty$

أمثلة:

1) مجموعة الأعداد الطبيعية محدودة من الأسفل بـ 0 وبالتالي: $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$ ولكنّها غير محدودة من الأعلى وبالتالي: $\sup \mathbb{N} = +\infty$ و $\max \mathbb{N}$ غير موجود.

2) مجموعة الأعداد الصحيحة غير محدودة ومنه: $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ ، $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ ، $\min \mathbb{Z}$ و $\max \mathbb{Z}$ غير موجودان.

3) لتكن $A = [-1, 4]$ من الواضح أنّ: A مجموعة محدودة و $\min A = \inf A = -1$ و $\max A = \sup A = 4$

4) لتكن $A = [2, 5[$ من الواضح أنّ: A مجموعة محدودة و $\min A = \inf A = 2$ ، $\sup A = 5$ و $\max A$ غير موجود.

5) لتكن $A = \left\{ \frac{1}{n} /\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \frac{1}{n} \leq 1$ وبالتالي A مجموعة محدودة ولدينا $\max A = \sup A = 1$ و $\inf A = 0$ و $\min A$ غير موجود.

2.4. الخاصية المميزة للحد الأعلى والحد الأسفل:

1) إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ و M عددا حقيقيا فإنّ:
$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

2) إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ و m عددا حقيقيا فإنّ:
$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : m + \varepsilon > x \geq m \end{cases}$$

البرهان:

1) نفرض أنّ $M = \sup A$.إذا العدد الحقيقي M هو أصغر الحواد العليا لـ A في $\mathbb{R}$.ليكن $\varepsilon > 0$ ، العدد $M - \varepsilon$ غير حاد من الأعلى لـ A وبالتالي يوجد $x \in A$ بحيث: $M - \varepsilon < x$ و بما أنّ M حاد من الأعلى لـ A إذا $M - \varepsilon < x \leq M$ $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leq M$

نفرض أنّ: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leq M$. لنثبت أنّ M أصغر الحواد العليا لـ A . نفرض أنّ هذا غير محقق أي يوجد عدد آخر M' حاد من الأعلى لـ A بحيث: $\forall x \in A : x \leq M' < M$ نختار: $\varepsilon = M - M' > 0$ إذا حسب الفرضية: $M - \varepsilon < x \leq M$

وبما أنّ: $M - \varepsilon = M - (M - M') = M'$ نجد: $\exists x \in A : M' < x \leq M$. وهذا يناقض فرضية M' حاد من الأعلى لـ A . وبالتالي لا يوجد حاد من الأعلى M' أصغر من M . بنفس الطريقة نثبت الخاصية 2).

مثال: لتكن المجموعة $A = \{x_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}\ /\ n \in \mathbb{N}\}$. لنعيّن $\sup A$ و $\inf A$.

A مجموعة جزئية غير خالية ومحدودة من $\mathbb{R}$ لأنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq 2n < 2n + 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{2n}{2n+1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 0 \leq \frac{1}{2} \times \frac{2n}{2n+1} < \frac{1}{2} \times 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq x_n < 1$$

وبالتالي: A محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومن الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ و لدينا $0 \leq \frac{1}{2} \leq \inf A \leq \sup A \leq 1$ و بما أنّ $\frac{1}{2} \in A$

إذا $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$

لنثبت أنّ: $\sup A = 1$. العدد 1 حاد من الأعلى للمجموعة A . يكفي أن نثبت أنّ: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in A,\ x_n > 1 - \varepsilon$

والتي تكافئ $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1} > 1-\varepsilon$

من أجل $\varepsilon > 0$ لدينا

$$\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1} > 1-\varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1} > -\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n+1-2n}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2n+1} < 2\varepsilon \Rightarrow 2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow 2n > \frac{1}{2\varepsilon}-1 \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$$

إذا يوجد $n = E\left(\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)+1$ وبالتالي $\sup A = 1$ (E هو رمز دالة الجزء الصحيح).

طريقة ثانية: لنثبت أنّ: $\sup A = 1$. لدينا $x_n = \frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = 1-\frac{1}{4n+2}$

نفرض أن $\sup A \neq 1$ وبالتالي: $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : 1-\frac{1}{4n+2} \leq \alpha < 1$ ومنه بعد الحساب نجد $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq \frac{2\alpha-1}{4-4\alpha}$

وهذا تناقض كون المجموعة $\mathbb{N}$ غير محدودة من الأعلى وبالتالي $\sup A = 1$

3.4. خاصية الحد الأعلى والحد الأسفل:

1. كلّ مجموعة جزئية A غير خالية من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى تقبل حدّا أعلى sup.
2. كلّ مجموعة جزئية A غير خالية من $\mathbb{R}$ محدودة من الأسفل تقبل حدّا أسفلا inf.

مبرهنة: الخاصيتان1) و2) متكافئتان.

البرهان: لنبرهن $(2) \Rightarrow (1)$. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ محدود من الأسفل نضع $A' = \{-x,\ x \in A\}$ ، $A' \neq \phi$ لأنّ $A \neq \phi$ ،
إذا كان m حاد أدنى لـ A فإنّ: $\forall x \in A : x \geq m \Leftrightarrow \forall x \in A : -x \leq -m$. هذا يدل أنّ: $-m$ حاد من الأعلى لـ A' و حيث أنّ :
$A' \neq \phi$ ومحدودة من الأعلى فإنّها تملك حدا أعلى و ليكن $M = \sup A'$ وبالتالي: $(\forall x' \in A' : x' \leq M) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in A' : M-\varepsilon < x')$
ومنه: $(\forall x \in A : -x \leq M \Rightarrow \forall x \in A : -M \leq x)$. من جهة أخرى إذا كان $\varepsilon > 0$ فإنّه يوجد $x' \in A'$ بحيث: $M-\varepsilon < x'$.
نضع $x = -x'$ فيكون لدينا $M-\varepsilon < -x \Leftrightarrow -M+\varepsilon > x$ وبالتالي: $(\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A' : x < -M+\varepsilon)$. أي أنّ $-M$ هو الحد الأدنى لـA
بطريق مشابهة نبرهن أنّ $(1) \Rightarrow (2)$.

خواص: إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين ومحدودتين من $\mathbb{R}$. فإنّ:

1. إذا كان $A \subset B$ فإن $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$
2. $\sup(-A) = -\inf(A)$ و $\inf(-A) = -\sup(A)$
3. $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$ و $\sup(A-B) = \sup(A)-\inf(B)$
4. $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$ مع كون A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}_+^*$
5. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ ، $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$

برهان:

لنبرهن عن الخاصية (1)

نفرض أنّ: $A \subset B$ لدينا $\forall x \in B, x \leq \sup(B)$ وبما أنّ: $A \subseteq B$ يكون: $\forall x \in A, x \leq \sup(B)$ أي $\sup(B)$ حادّ من الأعلى لـ A

وبما أنّ $\sup(A)$ أصغر الحواد العليا لـ A نستنتج أنّ: $\sup(A) \leq \sup(B)$. بطريقة مماثلة نثبت أنّ: $A \subset B \Rightarrow ([\inf(A) \geq \inf(B))$

لنبرهن عن الخاصية (3) لدينا $\forall x\in A: x\le \sup A$ و $\forall y\in B: y\le \sup B$ بالجمع نجد $z\le \sup A+\sup B$ $\forall z\in A+B:(z=x+y)$ هذا يعني أنّ $\sup A+\sup B$ حادّ من الأعلى لـ $A+B$ وبما أنّ $\sup(A+B)$ أصغر الحواد من الأعلى لـ $A+B$ نستنتج أنّ:

$\sup(A+B)\le \sup A+\sup B$ ...(1)

من جهة أخرى لدينا $x+y\le \sup(A+B)$: $\forall z\in A+B:(z=x+y)$ من أجل y مثبّت لدينا $\forall x\in A: x\le \sup(A+B)-y$

هذا يعني أنّ A محدودة من الأعلى بـ $\sup(A+B)-y$ وبالتالي $\sup A\le \sup(A+B)-y$ ومنه يكون $\forall y\in B:\ y\le \sup(A+B)-\sup A$

هذا يعني أنّ B محدودة من الأعلى بـ $\sup(A+B)-\sup A$ وبالتالي $\sup B\le \sup(A+B)-\sup A$ إذا (1)... $\sup A+\sup B\le \sup(A+B)$ ...(1)

أخيرا نكتب $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

II- القيمة المطلقة :

1. تعريف: القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ: $|x|$ والمعرّف كما يلي: $|x|=\begin{cases}-x & \text{si } x\le 0\\ x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

2. خواص: من أجل كل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ لدينا

1) $|x|=\max(x,-x)\ge 0$ (2 $-|x|\le x\le |x|$ (3 $|x|=0\Leftrightarrow x=0$ (4 $|x.y|=|x|.|y|$ (5 $|-x|=|x|$

6) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y\neq 0$ (7 $|x+y|=|x|+|y|$ (8 $||x|-|y||\le |x-y|$ (9 $|\sum_{i=1}^{i=n}x_i|\le \sum_{i=1}^{i=n}|x_i|$ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x_i\in\mathbb{R},$

10) $\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ ، $\min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ (11 $r\ge 0,\ |x|\le r\Leftrightarrow -r\le x\le r$

12) $r\ge 0,\ |x|\ge r\Leftrightarrow (x\ge r)\vee(x\le -r)$

البرهان: لنثبت بعض الخواص. من التعريف نتحقق من صحة $(1)-(3)$

4) $|x.y|=\sqrt{(xy)^2}=\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{x^2}.\sqrt{y^2}=|x|.|y|$ (5 نطبق (4) من أجل $y=-1$ (6 نفس طريقة برهان (4)

7) لدينا $-|x|\le x\le |x|$ و $-|y|\le y\le |y|$ بالجمع نجد $-(|x|+|y|)\le x+y\le |x|+|y|$ وبالتالي نحصل على (7)

8) $||x|-|y||\le |x-y|\le |x|+|y|$ بتربيع كل الأطراف نثبت أنّ: $x^2-2|xy|+y^2\le x^2-2xy+y^2\le x^2+2|xy|+y^2$

لدينا $-2|xy|\le 2xy\le 2|xy|$ نضيف x^2+y^2 إلى كل الأطراف نجد المطلوب.

III- بديهية أرخميدس :

1. مبرهنة: $\mathbb{R}$ حقل يحقق بديهية أرخميدس أي: $\forall a\in\mathbb{R}_+^*,\forall b\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N}^*:\ na>b$ أو بعبارة مكافئة $\forall c\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N}^*: n>c$

البرهان: ♦ إذا كان $b\le 0$ واضح أنّ البديهية صحيحة.

♦ إذا كان $b>0$ لنبرهن على صحة البديهية باستعمال خاصية الحد الأعلى. لتكن A مجموعة المضاعفات الموجبة للعدد a.

$A=\{na\ /\ n\in\mathbb{N}^*\}$. لنبرهن بالخلف، نفرض أنّ بديهية أرخميدس غير صحيحة. $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ na\le b$

المجموعة A غير خالية لأنّ: $a\in A$ ومحدودة من الأعلى بـ b في $\mathbb{R}$. نستنتج أنّ A تقبل حدّا أعلى $\sup A=M$.

وهذا يعني أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ na\le M$ وبالتالي نستنتج أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ (n+1)a\le M$ و نكتب: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ na\le M-a$

وهذا يعني أنّ: $M-a$ حد أعلى آخر للمجموعة A وهذا يناقض كون M أصغر الحواد العليا لـ A. وهذا يثبت صحة البديهية.

VI- الجزء الصحيح لعدد حقيقي :

1. مبرهنة: ليكن x عددا حقيقيا. يوجد عددا صحيحا وحيدا n بحيث: $n\le x<n+1$ ونكتب:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists! n\in\mathbb{Z}:\ n\le x<(n+1)...(1)$$

2. تعريف: نسمي العدد الصحيح n المحقق للقضية (1) بالجزء الصحيح للعدد x ونرمز له بالرمز $[x]$ أو $E(x)$ ونكتب:

$\forall x \in \mathbb{R},\ [x] \le x < [x]+1$. أو بعبارة أخرى: $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \le x\}$

أمثلة: $[\sqrt{2}] = 1$ ، $[\pi] = 3$ ، $[e] = 2$ ، $[\frac{1}{2}] = 0$ ، $[-\frac{1}{2}] = -1$ ، $[6] = 6$ ، $[-6] = -6$

ملاحظات:

1) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 < [x] \le x$

2) كل عدد حقيقي x يكتب على شكل وحيد: $x = [x] + \{x\}$ حيث $\{x\}$ الجزء العشري لـ x و $0 \le \{x\} < 1$.

أمثلة: 1) $\{\pi\} = \pi - [\pi] = \pi - 3 = 0.1415$. 2) $\{-\pi\} = -\pi - [-\pi] \simeq -\pi + 4 = 0.8584.....$

3. خواص:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ [x+n] = [x] + n$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \le [nx] - n[x] \le n-1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [x]+[y] \le [x+y] \le [x]+[y]+1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \left[\dfrac{[nx]}{n}\right] = [x]$

سؤال: هل القضية التالية صحيحة ؟ $(\forall x, y \in \mathbb{R} : ([x+y] = [x]+[y]) \wedge ([xy] = [x][y]))$

القضية خاطئة ونبرهن بمثال مضاد من أجل $x = 3.5$, $y = 2.6$ لدينا $[x] = 3$, $[y] = 2$ و $[x+y] = [3,5+2,6] = [6,1] = 6$

وبالتالي $6 = [x+y] \ne [x]+[y] = 5$ كذلك $[xy] = [3,5 \times 2,6] = [9,1] = 9$ وبالتالي $9 = [xy] \ne [x][y] = 2 \times 3 = 6$

البرهان:(مبرهنة الجزء الصحيح): لنثبت: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! n \in \mathbb{Z} : n \le x < n+1$

الوجود: بتطبيق مبدأ أرخميدس من أجل $a=1$ و $b=x$ كذلك $a=1$ و $b=-x$ نجد: $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : n_1 > x$ و $\exists n_2 \in \mathbb{N}^* : n_2 > -x$

لتكن A مجموعة أعداد صحيحة معرّفة بـ: $A = \{p \in \mathbb{Z} : p \le x\}$.

A مجموعة غير خالية لأن: $-n_2 \in A$ ومحدودة من الأعلى بـ n_1 لأن: $p \le x < n_1$ أي $p < n_1$ و بالتالي A تقبل حدّا أعلى $\sup(A) = n$

و بما أنّ: $A \subset \mathbb{Z}$ فإنّ: $n \in \mathbb{Z}$ و $\max(A) = n$ و يحقق $n \le x$ من جهة أخرى $(n+1) \notin A$ فيكون: $n+1 > x$ ونكتب:

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z}:\ n \le x < n+1$ وهذا يثبت وجود الجزء الصحيح.

الوحدانية: نفرض وجود عددين n و m يحققان: $n \le x < n+1$ ، $m \le x < m+1$

إذا لدينا $n \le x < n+1$ و $-m-1 < -x \le -m$ بجمع المتباينات حدّا إلى حدّ نحصل على: $n-m-1 < 0 < n-m+1$ هذا يعني:

$-1 < m-n < 1$. العدد الصحيح الوحيد المحصور تماما بين 1 و -1 هو 0 وبالتالي: $m-n = 0 \Rightarrow m = n$. وهذا يثبت وحدانية الجزء الصحيح.

سلسلة أعمال موجّهة رقم 01 (حقل الأعداد الحقيقية)

تمرين1: 1. نعتبر العدد الناطق (تكرارn مرّة) $A_n = 0,20212021.....2021$. اكتب A_n على الشكل: $A_n = \frac{p}{q} /\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$

2. ليكن العدد الناطق (تكرار عدد غير منته من المرّات) $A = 0,20212021..........$. اكتب A على الشكل: $A = \frac{p}{q} /\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$

3. نفس السؤال بالنسبة للعدد $B = 0,1111.....+0,2222.....+...+0,9999.....$.

تمرين2: عيّن حصرا للأعداد الحقيقية $\frac{x^2}{x^2-y^2}$, y^2 , x^2 , $x-y$, $x+y$ إذا علمت أنّ: $x \in [-2,3]$ و $y \in [-7,-5]$

تمرين3: لتكن x ، y و z ثلاثة أعداد حقيقية.

1. اثبت أنّ: $x^2 + y^2 \geq 2xy$ واستنتج أنّ: $\forall x \in \mathbb{R}^* : |x+\frac{1}{x}| \geq 2$

2. إذا كانت x ، y و z أعدادا حقيقية موجبة. اثبت أنّ: $(x+y)^2 \geq 4xy$ واستنتج أنّ: $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz$

3. اثبت أنّ: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}_+^{*3} : x+y+z=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 9$

تمرين4: باستعمال أحد أنماط البرهان، برهن صحّة القضايا التالية:

1) إذا كان n عددا طبيعيا غير معدوم فإن العدد $\sqrt{n^2+n}$ ليس طبيعيا.

2) إذا كان a عددا حقيقيا موجبا فإن: $(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

3) إذا كان x و y عددين ناطقين فإن: $x + y\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 0$.

تمرين5: 1. إذا كان $(a,b) \in \mathbb{Q}_+^2$ حيث: $(\sqrt{a},\sqrt{b}) \notin \mathbb{Q}_+^2$، اثبت أنّ: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}_+$. 2. استنتج أنّ: $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

تمرين6*: 1. بيّن أنه إذا كان $r \in \mathbb{Q}$ و $x \notin \mathbb{Q}$ فإنّ $r+x \notin \mathbb{Q}$ وإذا كان $r \neq 0$ فإنّ $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2. ليكن r و r' عددين ناطقين حيث $r < r'$. اثبت أنّ: $y = r+\frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r) \notin \mathbb{Q}$.

3. استنتج أنّه بين كل عددين ناطقين يوجد دوما عددا غير ناطق.

تمرين7: عيّن $\max(A)$ ، $\min(A)$ ، $\sup(A)$ و $\inf(A)$ إن وجدت في كل الحالات التالية:

1) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\right\}$ 2) $A = \left\{2-\frac{1}{n} /\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ 3) $A = \left\{(-1)^n + \frac{3}{5n} /\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ 4) $A = \left\{\frac{-1+2n}{3+n} / n \in \mathbb{N}\right\}$

5) $A = \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup}[0,1-\frac{1}{n^2}]$ 6) $A = \left\{\frac{m}{1+mn} / m,n \in \mathbb{N}^*\right\}$ 7) $A = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1} /\ x \in \mathbb{R}\right\}$ 8) $A = \left\{\frac{x-y}{x+y+3} / |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$

*9) $A = \left\{\frac{2xy}{x^2+y^2} / x,y \in \mathbb{R}^*\right\}$ *10) $A = \{a\cos x + b\sin x /\ a,b,x \in \mathbb{R} \wedge (a,b) \neq (0,0)\}$ *11) $A = \left\{\frac{[x]+1}{x} /\ x > \frac{1}{2}\right\}$

تمرين8: ليكن a و b عددين حقيقيين. اثبت أنّ:

1) $|a|+|b| \leq |a+b|+|a-b|$ 2) $1+|ab-1| \leq (1+|a-1|)(1+|b-1|)$ 3) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$

تمرين9: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $\mathbb{R}$ بحيث: $\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq b$

اثبت أنّ A محدودة من الأعلى، B محدودة من الأسفل وأنّ: $\sup A \leq \inf B$

تمرين10*: لتكن A مجموعة جزئية غير خالية ومحدودة من $\mathbb{R}$. اثبت أنّ: $\sup(\{|x-y|, (x,y) \in A^2\}) = \sup A - \inf A$

تمرين11: اثبت صحة الخواص التالية: 1) $\forall x,y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$ 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z} : [x+a] = [x]+a$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]$ 4) $\forall x \in \mathbb{R} : [2x]-2[x] \in \{0,1\}$

تمرين12*: لتكن E مجموعة جزئية غير خالية ومحدودة من $\mathbb{R}$. نعرّف المجموعة $[E] = \{[x] : x \in E\}$

1. اثبت أنّ $[E]$ محدودة في $\mathbb{R}$. 2. قارن بين $\inf E$ ، $\inf[E]$ و $\sup E$ ، $\sup[E]$.

تمرين13*: 1. اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

2. اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا: $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

3. استنتج حصرا للمجموع $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ من أجل $n \geq 1$. 4. ما هو الجزء الصحيح للعدد $S = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{1000}}$

[(*) يترك للتقويم لاحقا]

قسم الرياضيات	جامعة الوادي	مقياس تحليل 1
سنة أولى MI	كلية العلوم الدقيقة	2022/2021

حل سلسلة أعمال موجّهة رقم 01 (حقل الأعداد الحقيقية)

حل ت1:

.1 $A_n = 0,20212021.....2021 = \underbrace{20212021.....2021}_{4n \text{ رقم}} \times 10^{-4n} = \dfrac{\overbrace{20212021.....2021}^{4n \text{ رقم}}}{10^{4n}}$

.2 $A = 0,20212021.........(1)$ ويكون $10000A = 2021,20212021............(2)$ وبطرح (1) من (2) نجد

$$10000A - A = 2021,20212021.... - 0,20212021... \Rightarrow 9999A = 2021 \Rightarrow A = \frac{2021}{9999}$$

3. يمكن أن نبرهن أنّ: $B = 0,1111.....+0,2222.....+...+0,9999..... = \dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9}+...+\dfrac{9}{9} = \dfrac{45}{9} = 5$.

حل ت2: تعيين حصرا للأعداد الحقيقية $x+y,\, x-y,\, x^2,\, y^2,\, \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ حيث: $x \in [-2,3]$ و $y \in [-7,-5]$

لدينا $-2 \le x \le 3$ و $-7 \le y \le -5$ ومنه $-9 \le x+y \le -2$ ، لدينا $5 \le -y \le 7$ ومنه $3 \le x-y \le 10$

لدينا $(0 \le x \le 3) \vee (-2 \le x \le 0)$ ومنه $(0 \le x^2 \le 9) \vee (0 \le x^2 \le 4)$ إذا $0 \le x^2 \le 9$

لدينا $-7 \le y \le -5$ ومنه $25 \le y^2 \le 49$

لدينا $0 \le x^2 \le 9$ و $-49 \le -y^2 \le -25$ ومنه $-49 \le x^2 - y^2 \le -16$

لدينا $0 \le x^2 \le 9$ و $16 \le -(x^2-y^2) \le 49$ ومنه $\dfrac{0}{49} \le -\dfrac{x^2}{x^2-y^2} \le \dfrac{9}{16}$ ويكون $-\dfrac{9}{16} \le \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \le 0$

حل ت3:

.1 اثبات أنّ: $x^2+y^2 \ge 2xy$ واستنتاج أنّ: $\forall x \in \mathbb{R}^* : |x+\dfrac{1}{x}| \ge 2$

$$x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2 \ge 2xy$$

ممّا سبق ومن أجل $y = \dfrac{1}{x}, x \ne 0$ لدينا: $(x+\dfrac{1}{x})^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2x.\dfrac{1}{x} \ge 2x.\dfrac{1}{x} + 2x.\dfrac{1}{x} = 4 \Rightarrow (x+\dfrac{1}{x})^2 \ge 4$

وبتجذير الطرفين نجد $|x+\dfrac{1}{x}| \ge 2$

.2 اثبات أنّ: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : (x+y)^2 \ge 4xy$ واستنتاج أنّ: $(x+y)(y+z)(x+z) \ge 8xyz$

$$x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \ge 4xy$$

ممّا سبق لدينا $\begin{cases} (x+y)^2 \ge 4xy \\ (y+z)^2 \ge 4yz \\ (x+z)^2 \ge 4xz \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2 \ge 64x^2y^2z^2 \overset{x,y,z\ge 0}{\Rightarrow} (x+y)(y+z)(x+z) \ge 4xyz$

.3 اثبات أنّ: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}_+^{*3} : x+y+z = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \ge 9$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = (x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = 3 + (\frac{y}{x}+\frac{x}{y}) + (\frac{z}{y}+\frac{y}{z}) + (\frac{x}{z}+\frac{z}{x})$$

$$\ge 3+2+2+2 = 9 \quad (x+\frac{1}{x} \ge 2)$$

حل ت4:

1) نبرهن بالخلف أنّ: $\sqrt{n^2+n}$ ليس طبيعيا حيث $n \in \mathbb{N}^*$

نفترض أنّ $\sqrt{n^2+n}$ عدد طبيعي أي $\sqrt{n^2+n} = k \ (k \in \mathbb{N})$ بالتربيع نجد $n^2+n=k^2$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $n^2 < n^2+n < n^2+2n+1$ ومنه $n^2 < k^2 < (n+1)^2$ وبالتالي $n < k < n+1$

وهذا تناقض لأنّ : $k \in \mathbb{N}$ ومنه $\sqrt{n^2+n}$ ليس طبيعيا.

2) إذا كان a عددا حقيقيا موجبا فإن: $(\forall \varepsilon > 0,\ a \le \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

نبرهن باستعمال العكس النقيض أي نبرهن $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ a > \varepsilon)$

ليكن $a \neq 0$ بما أنّ a عدد حقيقي موجب فإنّ $a > 0$ يكفي أن نختار $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$ ويكون $a > \dfrac{a}{2}$.

3) إذا كان x و y عددين ناطقين فإن: $x + y\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 0$.

أولا نبرهن بالخلف أنّ: $x + y\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 0$

- لدينا $x + y\sqrt{2} = 1$ ونفترض أنّ: $x \neq 1 \vee y \neq 0$.

من الفرضية $y \neq 0$ و $x + y\sqrt{2} = 1$ نجد: $\sqrt{2} = \dfrac{1-x}{y} \in \mathbb{Q}$ وهذا تناقض لآنّ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

في حالة $y = 0$ الاستلزام $(x + y\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 0)$ محقق لأنّ: $x + 0 \times \sqrt{2} = 1 \Rightarrow x = 1$

ومنه $x + y\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 0$

الاستلزام $x = 1 \wedge y = 0 \Rightarrow x + y\sqrt{2} = 1$ واضح، لأنّه من أجل $x = 1 \wedge y = 0$ نجد: $x + y\sqrt{2} = 1 + 0 \times \sqrt{2} = 1$ وأخيرا نكتب $x + y\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 0$

حل ت5: 1. إذا كان $(a,b) \in \mathbb{Q}_+^2$ حيث: $(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \notin \mathbb{Q}_+^2$ ، اثبات انّ: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}_+$.

نبرهن بالخلف نفترض أنّ: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}_+$ لدينا $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$ و $\sqrt{a} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} \in \mathbb{Q}$ تناقض.

إذا $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}_+$.

2. استنتاج أنّ: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

نبرهن بالخلف فنفرض أن: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r \in Q$ ومنه $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5}$ وبتربيع الطرفين نجد:

$2\sqrt{6} = r^2 - 2r\sqrt{5}$ وبالتالي: $\sqrt{6} + \sqrt{5r^2} = \dfrac{r^2}{2} \in Q$ لكن حسب نتيجة السؤال الأول فإن $\sqrt{6} + \sqrt{5r^2}$هو عدد غير ناطق لأن $(6, 5r^2) \in Q_+^2$ و $\left(\sqrt{6}, \sqrt{5r^2}\right) \notin Q_+^2$ وهذا تناقض ومنه $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin Q$.

من السؤال السابق بما أنّ $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}_+^2$ فإنّ $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}_+$ كذلك بما أنّ $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}^+$ فإنّ $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

حل ت7: تعيين $\max(A)$ ، $\min(A)$ ، $\sup(A)$ و $\inf(A)$ إن وجدت في كل الحالات التالية:

1) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$ يمكن أن نكتب $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ ولدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{n} \le 1$

إذا $\max(A) = \sup(A) = 1$ ، $\min(A)$ غير موجود لنبرهن أنّ: $\inf(A) = 0$. العدد 0 حاد من الأسفل لـ A

لنبرهن أنّ: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ وهذا محقق بتطبيق بديهية أرخميدس ($\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* : \ na > b$)

من أجل $a = \varepsilon$ و $b = 1$

2) $A = \left\{2 - \dfrac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < \dfrac{1}{n} \le 1 \Rightarrow -1 \le -\dfrac{1}{n} < 0 \Rightarrow 1 \le 2 - \dfrac{1}{n} < 2$

إذا $\min x(A) = \inf(A) = 1$ ، $\max(A)$ غير موجود لنبرهن أنّ: $\sup(A) = 2$. العدد 2 حاد من الأعلى لـ A لنثبت أنّه أصغر الحواد من الأعلى لـ A. نفترض أنّ: $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : 2 - \dfrac{1}{n} \le a < 2$ بعد الحساب نجد $\forall n \in \mathbb{N}^* : n \le \dfrac{1}{2-a}$

وهذا تناقض كون المجموعة $\mathbb{N}^*$ غير محدودة من الأعلى وبالتالي $\sup(A)=2$

4) $A=\left\{\frac{-1+2n}{3+n}/\ n\in\mathbb{N}\right\}$. لدينا $\forall n\in\mathbb{N}:\frac{-1+2n}{3+n}=2-\frac{7}{3+n}$ و $\forall n\in\mathbb{N}:-\frac{1}{3}\le 2-\frac{7}{n+3}<2$

إذا $\min x(A)=\inf(A)=-\frac{1}{3}$ ، $\max(A)$ غير موجود يمكن أن برهن : $\sup(A)=2$.

5) $A=\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup}[0,1-\frac{1}{n^2}]$. لنثبت أنّ $A=\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup}[0,1-\frac{1}{n^2}]=[0,1[$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ المجال $[0,1-\frac{1}{n^2}]$ محتوي في $[0,1[$ وبالتالي: $A\subset[0,1[$

من جهة أخرى نفرض أنّ $x\in[0,1[$ أي: $0\le x<1$. إذا أخذنا $n>\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ نجد $0\le x<1-\frac{1}{n^2}$ و $x\in[0,1-\frac{1}{n^2}]$

وبالتالي: $x\in A$. نستنتج أنّ: $[0,1[\subset A$ وأخيرا نكتب: أنّ $A=[0,1[$. نلاحظ أن العدد 0 حاد من الأسفل لـ A و $0\in A$ أي: $\inf A=\min A=0$ وأنّ نلاحظ أن 1 أصغر الحواد من الأعلى A و $1\notin A$ أي: $\sup A=1$ و $\max A$ غير موجود.

6) $A=\left\{\frac{m}{1+mn}/\ m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ لدينا $\forall(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}:0<\frac{m}{1+mn}<\frac{m}{1+mn}<\frac{1}{n}\le 1$ ومنه $\forall(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}:0<\frac{m}{1+mn}<1$

إذا A محدودة من الأسفل بـ 0 ومحدودة من الأعلى بـ 1. لنثبت أنّ: $\inf(A)=0$ يكفي أن نبرهن أنّ العدد 0 أكبر الحواد من الأسفل لـ A.

نبرهن بالخلف ليكن $a>0$ حاد من الأسفل لـ A إذا $\forall(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}:a\le\frac{m}{1+mn}$. من أجل $m=1$ نجد

$\forall n\in\mathbb{N}^*:a\le\frac{1}{1+n}\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*:n\le\frac{1}{a}-1$ وهذا تناقض كون المجموعة $\mathbb{N}^*$ غير محدودة من الأعلى وبالتالي $\inf(A)=0$

بنفس الطريقة نثبت أنّ $\sup(A)=1$ يكفي أن نبرهن أنّ العدد 1 أصغر الحواد من الأعلى لـ A. نبرهن بالخلف ليكن $b<1$ حاد من الأعلى لـ A إذا $\forall(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}:\frac{m}{1+mn}\le 1$. من أجل $n=1$ نجد: $\forall m\in\mathbb{N}^*:\frac{m}{1+m}\le b\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*:m\le\frac{b}{1-b}$ وهذا تناقض كون المجموعة $\mathbb{N}^*$ غير محدودة من الأعلى وبالتالي $\sup(A)=1$.

بما أنّ $\inf(A)=0$ و $0\notin A$ ($\frac{m}{1+mn}=0\Leftrightarrow m=0$ مستحيل لأن $m\in\mathbb{N}^*$) فإنّ $\min(A)$ غير موجود

بما أنّ $\sup(A)=1$ و $1\notin A$ ($\frac{m}{1+mn}=1\Leftrightarrow 1+mn=m\Leftrightarrow m(n-1)=-1$ مستحيل لأن $m(n-1)\ge 0$) فإنّ $\min(A)$ غير موجود

7) $A=\left\{\frac{x^2+2}{x^2+1}\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}$. من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ نكتب: $\frac{x^2+2}{x^2+1}=1+\frac{1}{x^2+1}$ وبالتالي A محدودة من الأسفل بالعدد 1.

لنثبت أن 1 أكبر الحواد من الأسفل أي نثبت: $\forall\varepsilon>0,\exists x\in\mathbb{R},1+\frac{1}{1+x^2}-\varepsilon<1$. لدينا $1+\frac{1}{1+x^2}-\varepsilon<1\Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$

من أجل $0<\varepsilon\le 1$ يكفي أن نختار $x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$. من أجل $\varepsilon>1$ يكفي أن نختار $x=0$ ومنه: $\forall\varepsilon>0,\exists x\in\mathbb{R},\ 1\le 1+\frac{1}{1+x^2}-\varepsilon<1$

نستنتج أنّ: $\inf A=1$ بما أنّ $1\notin A$ (لو افترضنا $1\in A$ فإنّ $0=\frac{1}{x^2+1}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{x^2+1}+1$ مستحيل) ونستنتج أنّ $\min A$ غير موجود.

8) $A=\left\{\frac{x-y}{x+y+3}/\ |x|\le 1,|y|\le 1\right\}$ لدينا من أجل $x=1,y=-1$ يكون $\frac{1-(-1)}{1+(-1)+3}=\frac{2}{3}$ ومن أجل $x=-1,y=1$ يكون $\frac{-1-1}{-1+1+3}=-\frac{2}{3}$

لنتحقق أنّه من أجل $|x|\le 1,|y|\le 1$: $-\frac{2}{3}\le\frac{x-y}{x+y+3}\le\frac{2}{3}$ يكفي أن نبرهن $\left|\frac{x-y}{x+y+3}\right|\le\frac{2}{3}$

لدينا $\left(\frac{x-y}{x+y+3}\right)^2\le\left(\frac{2}{3}\right)^2\Leftrightarrow\left(\frac{x-y}{x+y+3}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x-y}{x+y+3}-\frac{2}{3}\right)\le 0\Leftrightarrow\frac{(5x-y+6)(x-5y-6)}{9(x+y+3)^2}\le 0$

وهذا محقق لأنّ: $-1\le x\le 1$ ، $-1\le -x\le 1$ و $-1\le y\le 1$ ، $-1\le -y\le 1$ ونستنتج أنّ:

$5x-y+6\ge 5(-1)+(-1)+6=0$ و $x-5y-6\le 1+5(1)-6=0$

ومنه المجموعة A محدودة وبما أنّ $-\frac{2}{3}\in A,\frac{2}{3}\in A$ نستنتج أنّ: $\sup A=\max(A)=\frac{2}{3}$ و $\inf A=\min A=-\frac{2}{3}$،

<u>حل ت8:</u> 1) اثبات أنّ: $|a|+|b|\le|a+b|+|a-b|$

لدينا $2|a|=|(a+b)+(a-b)|\le|a+b|+|a-b|$ و $2|b|=|(a+b)-(a-b)|\le|a+b|+|a-b|$ بالجمع نجد المطلوب

2) اثبات أنّ: $1+|ab-1|\le(1+|a-1|)(1+|b-1|)$ نضع $u=a-1,v=b-1$

لدينا $1+|ab-1|=1+|uv+u+v|\le 1+|uv|+|u|+|v|=(|u|+1)(1+|v|)=(1+|a-1|)(1+|b-1|)$

3) اثبات أنّ $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

ط1: لنبرهن بالخلف نفرض أنّ: $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} > \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

بعد الحساب نجد $|a+b| > |a|+|b|+|ab|(2+|a+b|)$ وهذا مستحيل لأن: $|a+b| \le |a|+|b|$

ط2: لدينا $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = 1 - \frac{1}{1+|a+b|}$

و $1+|a+b| \le 1+|a|+|b| \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+|a+b|} \le 1 - \frac{1}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$ ونستنتج أنّ:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

حل ت9: ليكن $a_0 \in A$ و $b_0 \in B$ عددين معلومين وبالتالي يكون $\forall b \in B,\ a_0 \le b$ ومنه a_0 حاد من الأسفل لـ B
كذلك $\forall a \in A,\ a \le b_0$ ومنه b_0 حاد من الأعلى لـ A ونستنتج أنّ A تقبل حدّا أعلى $\sup A$ و B تقبل حدّا أسفلا $\inf B$
لنبرهن بالخلف أنّ $\sup A \le \inf B$. نفترض أنّ $\sup A > \inf B$ ونضع $k = \frac{\sup A + \inf B}{2}$ ومنه يكون $\inf B < k < \sup A$
وبالتالي نستنتج أنّ $\exists a \in A, \exists b \in B : (a > k) \wedge (b < k)$ وبالتالي نجد $a > b$ وهذا يناقض الفرضية.

حل ت11:

1) اثبات $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \le y \Rightarrow [x] \le [y]$

من أجل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ حيث $(x \le y)$. لدينا $[x] \le x$ وبالتالي $[x] \le y$ أي $[x]$ حاد صحيح من الأسفل لـ y. لدينا كذلك $[y] \le y$
وحسب وحدانية الجزء الصحيح فإنّ: $[x] \le [y]$) وهذه الخاصية تبين أنّ دالة الجزء الصحيح متزايدة

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z} : [x+a] = [x] + a$

نضع $[x] = n\ (n \in \mathbb{Z})$ لدينا $\forall x \in \mathbb{R} : [x] \le x < [x]+1$ ونكتب $n \le x < n+1 \Rightarrow n+a \le x+a < n+a+1$
وبما أنّ $n+a$ و $n+a+1$ عددان متعاقبان نستنتج أنّ $[x+a] = n+a = [x]+a$

3) اثبات $\forall x \in \mathbb{R} : [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$

نضع $[x] = n\ (n \in \mathbb{Z})$ نميّز حالتين

إذا كان $k \le x < k + \frac{1}{2}$ في هذه الحالة يكون $k + \frac{1}{2} \le x + \frac{1}{2} < k+1$ و $2k \le 2x < 2k+1$ وهذا يثبت أنّ $\left[x + \frac{1}{2}\right] = k$ و $[2x] = 2k$

ومنه $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = k + k = [2x] = 2k$

إذا كان $k + \frac{1}{2} \le x < k+1$ في هذه الحالة يكون $k+1 \le x + \frac{1}{2} < k + \frac{3}{2}$ و $2k+1 \le 2x < 2k+2$ وهذا يثبت أنّ $\left[x + \frac{1}{2}\right] = k+1$

و $[2x] = 2k+1$ ومنه $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = k + k + 1 = [2x] = 2k+1$

4) اثبات $\forall x \in \mathbb{R} : [2x] - 2[x] \in \{0,1\}$

لدينا $x - 1 < [x] \le x \Leftrightarrow -2x \le -2[x] < -2x + 2$ كذلك: $2x - 1 < [2x] \le 2x$ ومنه $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < [2x] - 2[x] < 2$
بما أنّ: $([2x] - 2[x]) \in \mathbb{Z}$ نجد: $\forall x \in \mathbb{R} : [2x] - 2[x] \in \{0,1\}$

1- المتتالية الحقيقية:

تعريف:

نسمي متتالية حقيقية كلّ دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

نرمز عادة للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو اختصارا بـ (u_n) عوضا عن $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ، $n \mapsto u(n)$ ونسمي العدد الحقيقي u_n (أي صورة العدد n بهذه الدالة) الحد العام لهذه المتتالية.

أمثلة:

1) متتالية معرفة بحدّها العام: $u_n = (-1)^n$ ، $u_n = \sqrt{n}$ ، $u_n = \frac{1}{n+2}$ ، $u_n = \sin(n+1)$ ، $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k$

2) متتالية معرفة بعلاقة تدريجية تربط بين عدد من حدودها: أ) $u_{n+1} = 2u_n - 1,\ u_0 = 1$ $(u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = -3, \ldots)$

ب) $u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_{n-1},\ u_1 = 1,\ u_2 = 0$ $(u_1 = 1,\ u_2 = 0, u_3 = -1,\ u_4 = -2, \ldots)$.

ملاحظة: يمكن تعريف متتالية ابتداء من رتبة معيّنة فقط.

2- المتتاليات المحدودة:

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى إذا تحقق: $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل إذا تحقق: $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل أي إذا تحقق: $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$

أو إذا تحقق: $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \leq u_n \leq M$

نتيجة: تكون متتالية حقيقية محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة في آن واحد من الأعلى ومن الأسفل.

أمثلة: 1) المتتالية $u_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ محدودة من الأسفل بـ 0 ومن الأعلى بـ 1 لأنّ: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1$

2) المتتالية $u_n = \sqrt{n}$ محدودة من الأسفل بـ 0 وغير محدودة من الأعلى لأنّ: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sqrt{n}$

3) المتتالية $u_n = (-1)^n$ محدودة لأنّ: $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 2$

ملاحظة: لإثبات أنّ متتالية حقيقية محدودة نستعمل البرهان بالتراجع.

مثال: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية معرفة كما يلي: $u_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ لنثبت أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0 \leq 2$. نفرض أنّ $u_n \leq 2$ و نبرهن أنّ $u_{n+1} \leq 2$

لدينا $u_n \leq 2 \Rightarrow u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq 2 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$

من جهة أخرى لدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ إذا $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2$ ونقول أنّ (u_n) محدودة.

3- المتتاليات الرتيبة:

تعاريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

- (u_n) **متزايدة** إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq u_{n+1}$ و (u_n) متناقصة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq u_{n+1}$

ونقول أنّ (u_n) ثابتة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = u_{n+1}$

- إذا كانت المتراجحة تامة > أو (<) نقول أن المتتالية متزايدة تماما أو (متناقصة تماما).
- إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة فقط أو متناقصة فقط أي لا تغيير اتجاهها على $\mathbb{N}$ نقول أنها متتالية رتيبة.

أمثلة: 1) المتتالية $u_n = \frac{1}{n+2}$ متناقصة 2) المتتالية $u_n = \sqrt{n}$ متزايدة 3) المتتالية $u_n = (-2)^n$ غير رتيبة.

ملاحظة: لدراسة رتابة (اتجاه تغيّر) متتالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ويمكن مقارنة $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ بـ: 1 إذا كانت حدود المتتالية موجبة.

4- تقارب وتباعد المتتاليات الحقيقية:

تعاريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية.

- (u_n) متقاربة إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\geq n_0\Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon)...(*)$
ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-l|=0$
- نهاية (u_n) هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ إذا تحقق ما يلي: $\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}:(n\geq n_0\Rightarrow u_n>A)$
- نهاية (u_n) هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ إذا تحقق ما يلي: $\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}:(n\geq n_0\Rightarrow u_n<-A)$
- نقول عن متتالية حقيقية إنها متباعدة عندما لا تكن متقاربة أو بعبارة أخرى إذا كانت لا تملك نهاية أو نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$
ونكتب: (u_n) متباعدة إذا تحقق ما يلي: $\forall l\in\mathbb{R},\ \exists\varepsilon>0,\quad \forall n_0\in\mathbb{N},\ \exists n\in\mathbb{N}\ :\ (\ n\geq n_0\wedge|u_n-l|\geq\varepsilon)$

ملاحظات:

1) تعيين طبيعة متتالية حقيقية (u_n) يعني إثبات تقاربها وتباعدها.
2) إنّ اختيار الرتبة n_0 في التعاريف السابقة متعلق بـ: ε (في حالة النهاية المنتهية) و بـ: A (في حالة النهاية غير المنتهية)
3) تبقى التعاريف السّابقة صحيحة إذا استبدلنا في الطرف الثاني للاستلزام $>$ أو $<$ بـ: $\leq$ أو $\geq$.

أمثلة: 1) لنثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة بحدها العام $u_n=\dfrac{1}{n}$ متقاربة نحو العدد 0.

لنثبت أنّ : $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\geq n_0\Rightarrow\ |\dfrac{1}{n}|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon)$

ليكن $\varepsilon>0$ حسب بديهية أرخميدس فإنّه يوجد $n_0\in\mathbb{N}^*$ يحقّق: $n_0\times\varepsilon>1$ أي $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$ وبالتالي: $\forall n\geq n_0:\ \dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon\Rightarrow\dfrac{1}{n}<\varepsilon$

2) لنثبت أن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها العام $u_n=\dfrac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو العدد 3.

لنثبت أنّ: $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\geq n_0\Rightarrow\ |\dfrac{3n}{n+2}-3|=\dfrac{6}{n+2}<\varepsilon)$

ليكن $\varepsilon>0$ لدينا $\dfrac{6}{n+2}<\dfrac{6}{n}$. من أجل $\dfrac{6}{n}<\varepsilon$ أي $n>\dfrac{6}{\varepsilon}$ يكفي أن نختار $n_0=[\dfrac{6}{\varepsilon}]+1$ وبالتالي: $\forall n\geq n_0:\dfrac{6}{n+2}<\varepsilon$

3) لنثبت أن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها العام $u_n=2n^2+3$ متباعدة. لنثبت باستعمال التعريف أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

نثبت أنّ: $\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}:(n\geq n_0\Rightarrow 2n^2+3>A)$

ليكن $A>0$. لدينا $2n^2+3>2n^2$ من أجل $2n^2>A$ أي $n>\sqrt{\dfrac{A}{2}}$ يكفي أن نختار $n_0=[\sqrt{\dfrac{A}{2}}]+1$ وبالتالي: $\forall n\geq n_0:2n^2+3>A$

مبرهنة: (وحدانية النهاية) إذا تقاربت متتالية حقيقية فإن نهايتها وحيدة.

برهان: **ط1:** نبرهن بالخلف لتكن l و l' نهايتين مختلفتين لمتتالية متقاربة (u_n) نفرض أن $l<l'$. ولنختر في التعريف السابق $\varepsilon=\dfrac{l'-l}{2}$. ومن ثمّ

فإن: $\exists n_2\in\mathbb{N}\ :\ n\geq n_2\ \Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$ كذلك $\exists n_1\in\mathbb{N}\ :\ n\geq n_1\ \Rightarrow|u_n-l'|<\varepsilon$

وعندما نضع $n_0=\max(n_1,n_2)$ نستنتج: $n\geq n_0\ \Rightarrow l'-\dfrac{l'-l}{2}<u_n<l+\dfrac{l'-l}{2}$ أي : $n\geq n_0\ \Rightarrow\ \dfrac{l'+l}{2}<u_n<\dfrac{l'+l}{2}$

وفي العلاقة السابقة تناقض واضح. ومنه المطلوب.

ط2: لتكن l و l' نهايتين لمتتالية متقاربة (u_n) وبالتالي:

$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_1\in\mathbb{N}\ :\ n\geq n_1\Rightarrow\ |u_n-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ كذلك $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_2\in\mathbb{N}\ :\ n\geq n_2\Rightarrow|u_n-l'|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

بوضع $n_0=\max(n_1,n_2)$ ومن أجل $n\geq n_0$ لدينا: $|l-l'|=\ |l-u_n+u_n-l'|\ \leq|u_n-l|+|u_n-l'|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

ومنه نستنتج أنّه من أجل كل $\varepsilon>0$: $|l-l'|<\varepsilon$ وبالتالي: $|l-l'|=0$ و منه $l=l'$

نظرية: كلّ متتالية حقيقية متقاربة هي متتالية محدودة. والعكس غير صحيح.

البرهان: للتأكد من ذلك نفرض أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو عدد l أي: $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(n\ge n_0\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$

ثم نختار في هذه العلاقة $\varepsilon=1$ مثلا، فيكون: $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:\ n\ge n_0\Rightarrow|u_n-l|<1$ ومنه: $n\ge n_0 \quad\Rightarrow\quad |u_n|<1+|l|$

ليكن K حادّا من الأعلى لـ: $\{|u_0|,\ |u_1|,...,\ |u_{n_0-1}|\}$ و $M=\max\{1+|l|,K\}$. لاحظ عندئذ أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\le M$ وهو المطلوب.

نتيجة: كلّ متتالية حقيقية غير محدودة هي متتالية متباعدة.

أمثلة:

1) المتتالية المعرفة بـ: $u_n=\dfrac{1}{n+2}$ متقاربة نحو 0. ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة $(*)$: $n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$. فهي محدودة $\forall n\in\mathbb{N}:0<\dfrac{1}{n+2}\le\dfrac{1}{2}$

2) المتتالية المعرفة بـ: $u_n=-\dfrac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو -3. ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة $(*)$: $n_0>\dfrac{2}{\varepsilon}$. فهي محدودة $\forall n\in\mathbb{N}:-3<-\dfrac{3n}{n+2}\le 0$

3) المتتالية $u_n=(-1)^n$ غير متقاربة (وهي محدودة). يمكن تبرير ذلك بالخلف، نفرض وجود نهاية وحيدة l لهذه المتتالية تحقق العلاقة:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\ge n_0\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon)...(*)$$

من أجل $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ لدينا $\forall n\ge n_0:\quad |u_{n+1}-u_n|=2\le|u_{n+1}-l|+|u_n-l|<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ وهذا تناقض.

4) المتتالية المعرفة بـ: $u_n=\sqrt{n}$ غير محدودة فهي متباعدة لأنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ $(\forall A>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ n\ge n_0\Rightarrow\sqrt{n}>A)$

يكفي أن نأخذ: $n_0=[A]^2+2$.

5- عمليات حول المتتاليات:

مبرهنة 1: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين متقاربتين حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l'$ عندئذ لدينا

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha l+\beta l', (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=l\times l'$ 3) عندما يكون $l'\ne0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{l}{l'}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|l|$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ 6) إذا كان ابتداء من رتبة معينة $u_n\le v_n$ فإن $l\le l'$.

مثال: لنحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث: $u_n=\dfrac{2n^3-n^2+1}{n^3-4}$. لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{n^3}{n^3}\times\dfrac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{4}{n^3}}=\dfrac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{4}{n^3}}$

ونعلم أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k}{n^p}=0, k\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{N}^*$ وبالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

نتيجة: نستخلص من الخاصية 6) أن: $u_n\le0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n\le0$, $u_n\ge0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n\ge0$

تحذير: إذا كان $u_n>0$ ابتداء من أول رتبة أو ابتداء من رتبة معينة فهذا يؤدي إلى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\ge0$ و لا يؤدي بالضرورة إلى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n>0$.

مثال: $\forall n\in\mathbb{N}^*:u_n=\dfrac{1}{n}>0$ لكن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

مبرهنة 2: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين لدينا

إذا كانت (u_n) محدودة ونهاية (v_n) تؤول إلى الصفر فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=0$

البرهان:

(u_n) محدودة هذا يعني: $\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \ |u_n|\le M$..........(1)

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ هذا يعني: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\ge n_0\Rightarrow|u_n|<\varepsilon)$..........(2)

من (1) و (2) لدينا $|u_n\times v_n|=|u_n|\times|v_n|\le\varepsilon M=\varepsilon'>0$

ومنه يكون: $\forall\varepsilon'>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}:\ (n\ge n_0\Rightarrow|u_nv_n|<\varepsilon')$ وبالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=0$

مثال: لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ نضع $u_n=\sin n$ و $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ لدينا $\forall n\in\mathbb{N},\ \ |u_n|=|\sin n|\le1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

بما أنّ (u_n) محدودة و نهاية (v_n) تؤول إلى الصفر فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=0$

<u>مبرهنة 3</u>: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين لدينا:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n)=-\infty$ 2) إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\neq 0$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}=0$

3) $(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R})\wedge(\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\pm\infty)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\pm\infty$ 4) $(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\pm\infty)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\pm\infty$

5) $(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}^*)\wedge(\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\varepsilon.\infty$ حيث ε هي إشارة l.

<u>مثال</u>: إذا كان $a>1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$ لأنّ: $\forall n\in\mathbb{N}: a^n>n(a-1)$. أمّا إذا كان $a\in]-1,1[$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$

<u>مبرهنة 4</u>: (نظرية الحصر):

إذا كانت لدينا ثلاث متتاليات حقيقية تحقق: $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0: v_n\leq u_n\leq w_n$ و $\lim v_n=\lim w_n=l\ (l\in\mathbb{R})$ فإن:

(u_n) متقاربة ولها نفس النهاية l.

<u>البرهان</u>: ليكن $\varepsilon>0$. إنّ تقارب المتتاليتين (v_n) و (w_n) نحو k يؤدي إلى وجود عددين طبيعيين n_1 و n_2 بحيث

$n\geq n_1\Rightarrow |v_n-l|<\varepsilon$ و $n\geq n_2 \Rightarrow |w_n-l|<\varepsilon$ وبوضع $n_0=\max(n_1,n_2)$ نجد:

$n\geq n_0\Rightarrow -\varepsilon<v_n-l\leq u_n-l\leq w_n-l<\varepsilon$. وهذا مكافئ لـ: $n\geq n_0\Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon$ ومنه تقارب (u_n) نحو l.

<u>مثال</u>: لنحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{-1}{n^2}\leq\frac{\sin n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ وبما أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n^2}=0$

<u>مبرهنة 5</u>: لتكن (u_n) متتالية حقيقية و l عددا حقيقيا.

إذا وجد n_0 عددا طبيعيا ثابتا بحيث $\forall n\geq n_0: \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<l<1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

<u>البرهان</u>: لدينا $\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right|=\left|\frac{u_{n_0+1}u_{n_0+2}\ldots\ldots u_{n-1}u_n}{u_{n_0}u_{n_0+1}\ldots\ldots u_{n-1}}\right|=\left|\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right|\times\left|\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\right|\times\ldots\ldots\times\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|$

حسب الفرضية يكون $\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right|<l\times l\times\ldots\ldots\times l=l^{n-n_0}$ ومنه $\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right|<l^{n-n_0}<1$ إذا $\forall n\geq n_0: 0<|u_n|<|u_{n_0}|l^{n-n_0}$

بما أنّ $0<l<1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}l^{n-n_0}=0$ ومنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ وبالتالي يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

ملاحظات:

1) إذا كان $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>l>1$ فإنّ المتتالية (u_n) متباعدة.

2) إذا كان $l=1$ لا نستطيع الحكم على تقارب أو تباعد المتتالية (u_n).

<u>مثال</u>: لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ حيث $a\in\mathbb{R}$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}: \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{a^n}=\frac{aa^n}{(n+1)n!}\times\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}$ ويكون $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a}{n+1}=0$

من أجل $\varepsilon=1$ يوجد n_0 عددا طبيعيا ثابتا بحيث $\forall n\geq n_0: \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$ وبالتالي حسب النظرية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

<u>6- تقارب المتتاليات الرتيبة</u>:

<u>نظرية</u>:

1. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو $\sup(u_n)$.
2. إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو $\inf(u_n)$.

<u>برهان</u>: نعتبر $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى. وبالتالي فإنّ $\sup u_n$ موجود.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \sup u_n - \varepsilon < u_{n_0} \le \sup u_n < \sup u_n + \varepsilon .... (1)$$

من تزايد المتتالية نجد: (2) .... $n \ge n_0 \ \Rightarrow \ u_n \ge u_{n_0}$.

من (1) و (2) نستنتج أنّ: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n \ge n_0 \Rightarrow \sup u_n - \varepsilon < u_{n_0} \le u_n \le \sup u_n < \sup u_n + \varepsilon$

التي يمكن اختصارها في الكتابة: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n \ge n_0 \Rightarrow \sup u_n - \varepsilon < u_n < \sup u_n + \varepsilon$

ونستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $\sup u_n$.

يمكن البرهان بطريقة مماثلة على الجزء المتبقي من النظرية.

أمثلة:

1) المتتالية $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى لأنّ: $(\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n < 1)$ وبالتالي متقاربة نحو $\lim\limits_{\infty} u_n = \sup(u_n) = 1$

2) المتتالية $v_n = -1 + \dfrac{1}{2^n}$ متناقصة ومحدودة من الأسفل لأنّ: $(\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > -1)$ وبالتالي متقاربة نحو $\lim\limits_{\infty} v_n = \inf(v_n) = -1$

7- المتتاليات الجزئية (المستخرجة):

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية. نسمي متتالية جزئية (مستخرجة) من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كل متتالية (v_n) حدها العام v_n يساوي $u_{f(n)}$ حيث: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيق متزايد تماما.

أمثلة:

1) لتكن المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \dfrac{1}{n^2}, \ n \in \mathbb{N}^*$ المتتالية المعرفة بـ: $v_n = u_{2n} = \dfrac{1}{(2n)^2} = \dfrac{1}{4n^2}$ مستخرجة من المتتالية (u_n).

2) لتكن المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \dfrac{(1-(-1)^n)}{n^2}, \ n \in \mathbb{N}^*$ المتتاليتان المعرفتان بـ: $v_n = u_{2n} = \dfrac{2}{(2n)^2} = \dfrac{1}{2n^2}$ و $w_n = u_{2n+1} = 0$ مستخرجتان من المتتالية (u_n).

نظرية1: كل متتالية مستخرجة من متتالية حقيقية متقاربة هي كذلك متقاربة نحو نفس النهاية والعكس غير صحيح.

برهان: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية متقاربة نحو عدد l و (v_n) متتالية مستخرجة من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{f(n)}$ حيث: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تطبيق متزايد تماما. لنثبت أنّ (v_n) متقاربة نحو l.

لدينا $\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \ n \ge n_0 \ \ \Rightarrow \ \ |u_n - l| < \varepsilon ...(I)$

من جهة أخرى لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} f(k) - f(k-1) \ge 0 + \sum\limits_{k=1}^{k=n} 1 = n$

ومنه $\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \ f(n) \ge f(n_0) \ge n_0 \ \Rightarrow \ |v_n - l| = |u_{f(n)} - l| < \varepsilon$

العكس غير صحيح فمثلا المتتالية (v_n) المستخرجة من $u_n = (-1)^n$ حيث $v_n = u_{2n} = 1$ متقاربة لكن $u_n = (-1)^n$ متباعدة.

ملاحظات:

1) يمكن أن نبرهن بالمثل بأنّه، إذا كانت متتالية تؤول إلى $+\infty$ $(-\infty)$ فإنّ كل متتالية جزئية من هذه المتتالية تؤول كذلك إلى $+\infty$ $(-\infty)$.

2) باستعمال العكس النقيض للاستلزام في النظرية السابقة نحصل على شرط كاف لتباعد متتالية:

إذا كانت لمتتاليتين جزئيتين من (u_n) نهايتين مختلفتين فإنّ المتتالية (u_n) متباعدة.

مثال: لنثبت أنّ المتتالية المعرفة بـ: $u_n = \cos(n + \dfrac{1}{n})\pi$ متباعدة.

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{\pi}{2n} = 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\pi + \dfrac{\pi}{2n+1}) = -1$ ، حسب الملاحظة السابقة (u_n) متباعدة.

خاصية: تكون المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد l إذا وفقط إذا كانت المتتاليتان الجزئيتان (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متقاربتين نحو نفس النهاية l.

8- النهاية السفلى والنهاية العليا لمتتالية:

أ- القيمة اللاصقة لمتتالية حقيقية:

تعريف: نقول عن $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) قيمة لاصقة لمتتالية (u_n) إذا كان a نهاية لمتتالية جزئية من (u_n)

ملاحظة: إذا كانت (u_n) تملك قيمة لاصقة وحيدة $a \in \overline{\mathbb{R}}$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$

مثال: $u_n = [1+(-1)^n]n$ العدد 0 هو قيمة لاصقة لـ: (u_n) لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-1)(2n+1) = 0$

$+\infty$ هي كذلك قيمة لاصقة لـ: (u_n) لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+1)2n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty$

تعريف النهاية السفلى و النهاية العليا لمتتالية: لتكن (u_n) متتالية حقيقية، نرمز بـ: $Ad(u_n)$ لمجموعة القيم اللاصقة للمتتالية (u_n)

1) النهاية العليا لـ: (u_n) ونرمز لها بـ: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ هي الحدّ الأعلى للمجموعة $Ad(u_n)$ ونكتب: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \sup(Ad(u_n))$

2) النهاية السفلى لـ: (u_n) ونرمز لها بـ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ هي الحدّ الأسفل للمجموعة $Ad(u_n)$ ونكتب: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \inf(Ad(u_n))$

مثال: في المثال السابق $Ad(u_n) = \{0,+\infty\}$ ومنه $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \sup(Ad(u_n)) = +\infty$ و $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \inf(Ad(u_n)) = 0$

خواص: إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيتين فإنّ:

1) $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n \le \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n$ (2 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n+v_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n + \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n$ (3 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n+v_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n + \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} v_n$

4) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(-u_n)$ (5 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(-u_n)$ (6 إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$ فإن: $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أمثلة: 1) إذا كانت: $u_n = 1+(-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$ فإنّ $Ad(u_n) = \{0,1\}$ ومنه $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = 0 < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = 2$

2) إذا كانت $u_n = -n$ فإنّ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \lim\limits_{x\to\infty} u_n - \infty$ (3 إذا كانت $u_n = (-1)^n n$ فإنّ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\infty < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = +\infty$

4) إذا كانت $u_n = [-1-(-1)^n]n$ فإنّ: $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = -\infty < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = 0$

9- المتتاليتان المتجاورتان:

تعريف: نقول عن متتاليتين حقيقيتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وكانت نهاية متتالية الفرق $(u_n - v_n)$ متقاربة نحو 0.

مثال: المتتاليتان $u_n = -\dfrac{1}{n}$ و $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ متجاورتان لأن أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة وفرقهما (المساوي لـ: $v_n - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$) يؤول إلى الصفر.

نظرية: كل متتاليتين متجاورتين متقاربتان نحو نفس النهاية.

البرهان: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متجاورتين أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة. نضع من أجل كل n : $w_n = u_n - v_n$. من الواضح أن المتتالية (w_n) متزايدة، علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ حسب فرض التجاور. ولذا $\sup\limits_n w_n = 0$. ومنه، من أجل كل n : $w_n \le 0$. وبالتالي:

$u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_n \le v_n \le \ldots \le v_1 \le v_0$ وهكذا يتضح أن المتتاليتين رتيبتان ومحدودتان (بـ u_0 و v_0). إذن فهما متقاربتان علما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. وهو المطلوب.

10. **نظرية بولزانو– فيرستراش** Bolzano-Weierstrass: من كلّ متتالية محدودة يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.

مثال: المتتالية $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$ محدودة حسب النظرية يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة مثلا: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{2n+1}) = 1$

11- متتاليات كوشي:

تعريف: نقول عن متتالية حقيقية (u_n) أنها متتالية كوشي إذا كانت تحقق شرط كوشي أي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \ [m > n \ge n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon]$$

يمكن أيضا التعبير عن هذه العلاقة بالكتابة. $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 :\quad [n \ge n_0 \Rightarrow\ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon]$

مثال:

1) لنثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n = \dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ متتالية كوشي

1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و $m\in\mathbb{N}^*$ حيث $m>n$ لدينا: $|u_m-u_n|=\left|\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right|=\left|\frac{n^2-m^2}{m^2n^2}\right|=\frac{(n-m)(n+m)}{m^2n^2}$ وبما أنّ:

$0<m-n<m$ و $0<n+m<2m$ إذا $|u_m-u_n|<\frac{2}{n^2}$. من أجل $\frac{2}{n^2}<\varepsilon$ نجد $n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$

وبالتالي: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\left(n_0=\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]+1\right):[(m>n\geq n_0)\Rightarrow\frac{2}{n^2}<\varepsilon\Rightarrow|u_m-u_n|<\varepsilon]$

ملاحظة: تعود أهمية نظرية كوشي إلى أنها تسمح بدراسة طبيعة متتالية (أي معرفة ما إذا كانت متقاربة أم متباعدة) دون معرفة نهايتها (في حالة تقاربها).

نظرية1: كلّ متتالية حقيقية متقاربة هي متتالية كوشي.

برهان: لتكن (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد l. لدينا $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\in\mathbb{N},\ \ [n\geq n_0\Rightarrow|u_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$

نستطيع أن نكتب: $\forall n>m\geq n_0:|u_n-u_m|=|(u_n-l)+(u_m-l)|\leq|u_n-l|+|l-u_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

ومنه (u_n) هي متتالية كوشي.

نتيجة: كلّ متتالية ليست كوشية هي متتالية متباعدة.

مثال: لنثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*$ متباعدة.

يكفي أن نثبت أن (u_n) ليست متتالية كوشي أي: $\exists\varepsilon>0\ \ \forall n_0\in\mathbb{N}^*:\left[n\geq n_0\wedge p\in\mathbb{N}\wedge|u_{n+p}-u_n|\geq\varepsilon\right]$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. $n=p=n_0$

$$u_{2n}-u_n=(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\Rightarrow u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$$

ليكن $\varepsilon=\frac{1}{2}$ إذا كانت المتتالية كوشية فإنه يوجد n_0 حيث من أجل $n\geq 0$ و $p>0$ يكون $|u_n-u_{n+p}|<\varepsilon$ لكن هذا غير صحيح لأنه:

$$|u_n-u_{n+p}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}>\frac{1}{2}$$

نظرية2: إذا كانت المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي فهي محدودة.

البرهان: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي إذا تحقق: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2,\ \ [m>n\geq n_0\Rightarrow|u_m-u_n|<\varepsilon]$

نختار في هذه العلاقة السابقة $m=n_0$ و $\varepsilon=1$ نجد: $n\geq n_0\Rightarrow|u_n|<|u_{n_0}|+\varepsilon$

وبالتالي فكل عناصر المتتالية التي دليلها أكبر من أو يساوي n_0 محدودة. ثم إن المجموعة المنتهية $\{u_0,\ u_1,\ldots,\ u_{n_0-1}\}$ محدودة بأكبر عنصر فيها. ومنه فالمتتالية (u_n) محدودة.

نظرية3: إذا كانت المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي و إذا تقاربت متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ منها، فهي متقاربة.

البرهان: لنفترض أنّ: $\lim_{n\to+\infty}u_{\varphi(n)}=l$. وليكن $\varepsilon>0$، عندئذ يوجد $n_1\in\mathbb{N}$ بحيث: $n\geq n_1\Rightarrow|u_{\varphi(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$

كذلك يوجد $n_2\in\mathbb{N}$ بحيث: $m>n\geq n_2\Rightarrow|u_m-u_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. لنضع $n_0=\max(n_1,n_2)$ فيكون لدينا

$|u_{\varphi(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ و $|u_{\varphi(n)}-u_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ وذلك لأنّ $m=\varphi(n)\geq n$ ومنه:

$n\geq n_0\Rightarrow|u_n-l|\leq|u_n-u_{\varphi(n)}|+|u_{\varphi(n)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ وهذا يثبت تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

نظرية4: كلّ متتالية حقيقية تحقق شرط كوشي هي متتالية متقاربة.

البرهان: لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي حسب النظرية 2 فهي محدودة واستنادا الى نظرية بولزانو– فيرستراش يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة واعتمادا على النظرية 3 نستنتج أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

سلسلة أعمال موجّهة رقم 02 (المتتاليات الحقيقية)

تمرين1: لتكن (u_n) متتالية حقيقية. اكتب على شكل قضيّة مكمّمة كل جملة من الجمل التالية:

1) المتتالية (u_n) ثابتة ابتداءً من رتبة معيّنة. 2) المتتالية (u_n) متباعدة.

3) المتتالية (u_n) غير متقاربة نحو العدد 2. 4) المتتالية (u_n) غير متناقصة ابتداء من رتبة معيّنة.

تمرين2: بيّن مستخدما تعريف التقارب، أن نهاية المتتالية (u_n) هي l في كل ما يأتي:

1) $u_n=\frac{1}{n^2},\ l=0$ (*2 $u_n=\frac{1-2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}},\ l=-2$ (3 $u_n=-n^2+n-1,\ l=-\infty$ (4 $u_n=\ln(1+n^2),\ l=+\infty$

تمرين3: احسب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n=n-\sqrt{(n+1)(n+2)}$ (2 $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (3 $u_n=\frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$ (*4 $u_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n}[kx],\ x\in\mathbb{R}$ (5 $u_n=\frac{\pi^n}{1\times3\times...\times(2n+1)}$

تمرين4: ادرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج طبيعتها في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n=1+\frac{2}{n+1}$ (2 $u_n=\frac{n^2+1}{2n+1}$ (3 $u_n=\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ (4 $u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}$ (*5 $u_n=\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2}$

تمرين5: 1. ليكن $a\in\mathbb{R}_+$ برهن بالتراجع متراجحة برنولي التالية: $\forall n\in\mathbb{N}:\ (1+a)^n\ge 1+na$

2. ادرس تبعا لقيم العدد الحقيقي q طبيعة المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها العام $u_n=q^n$.

تمرين6: لتكن (u_n) المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ: $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=9\sqrt[3]{u_n},\ u_0=27e^2$ ونضع من أجل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\ln\left(\frac{u_n}{27}\right)$

1. اثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية، عيّن أساسها q و حدّها الأول v_0 2. اكتب u_n و v_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

تمرين7*: لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ المتتالية الحقيقية المعرّفة بـ: $u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!}$. 1. اثبت أنّ $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية متزايدة.

2. اثبت أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ 3. استنتج أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ u_n<2$ وأنّ $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة.

تمرين8: لتكن (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات حقيقية، $a\in\mathbb{R}$ نفرض أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n+w_n)=3a$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2+v_n^2+w_n^2)=3a^2$

اثبت أنّ: كلاّ من المتتاليات (u_n) ، (v_n) و (w_n) متقاربة نحو a.

تمرين9: عيّن $\underline{\lim}_{n\to+\infty}u_n$ و $\overline{\lim}_{n\to+\infty}u_n$ (النهاية السفلى والنهاية العليا للمتتالية (u_n)) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$ (*2 $u_n=n^{(-1)^n n}$ (3 $u_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$ (4 $u_n=1+n\sin\frac{n\pi}{2}$ (5 $u_n=\left(2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)^n$

تمرين10: لتكن (u_n) متتالية حقيقية .1. أثبت أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=l\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

2. نفرض أنّ: $u_n=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$. اثبت أنّ المتتاليتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متجاورتان وماذا تستنتج ؟

تمرين11: ليكن $a\ge1$. نعتبر (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرّفتين كما يلي: $u_0=a,\ v_n=\frac{a}{u_n},\ u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

اثبت أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان واحسب l نهايتهما المشتركة.

تمرين12: مستعملا شرط كوشي ادرس طبيعة المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{\ln k}$ (2 $u_n=\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ (*3 $u_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\cos k}{k!}$

تمرين13*: لتكن (a_k) متتالية حقيقية حيث: $\forall k\in\mathbb{N}: a_k\in\{-1,1\}$ ونضع من أجل $n\ge1$: $u_n=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_n}{2}$

1. مستعملا شرط كوشي اثبت أنّ المتتالية (u_n) متقاربة في $\mathbb{R}$. 2. كيف يمكن تعديل المجموعة $\{-1,1\}$ حتى تبقى (u_n) متقاربة في $\mathbb{R}$.

[(*) يترك للتقويم لاحقا]

قسم الرياضيات	جـــــامعة الــوادي	مقيـاس: تحليـل 1
سنة أولـــىMI	كلية العلوم الدقيقة	2022/2021

تصحيح سلسلة أعمال موجّهة رقم: 02 (المتتاليات الحقيقية)

حل ت1:

لتكن (u_n) متتالية حقيقية. كتابة كل جملة من الجمل التالية على شكل قضيّة مكمّمة

1) المتتالية (u_n) ثابتة ابتداءً من رتبة معيّنة. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = u_n$

2) المتتالية (u_n) متباعدة $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \wedge |u_n - l| \geq \varepsilon)$

3) المتتالية (u_n) غير متقاربة نحو العدد 2. $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \wedge |u_n - 2| \geq \varepsilon)$

4) المتتالية (u_n) غير متناقصة ابتداء من رتبة معيّنة. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n$

حل ت2:

باستخدام تعريف التقارب، إثبات أن نهاية المتتالية (u_n) هي l : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$

1) $u_n = \frac{1}{n^2}, l = 0$: إثبات أنّ: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon)$. يكفي أن نختار: $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$

3) $u_n = -n^2 + n - 1\ ,\ l = -\infty$: إثبات أنّ: $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow -n^2 + n - 1 < A)$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ -n^2 \leq -n^2 + n - 1 < A \Rightarrow n^2 > -A \Rightarrow n > \sqrt{-A}$. يكفي أن نختار: $n_0 = \left[\sqrt{-A}\right] + 1$

4) $u_n = \ln[\ln(n)]\ ,\ l = +\infty$: إثبات أنّ: $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow \ln[\ln(n)] > A)$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \ln(\ln(n)) > A \Leftrightarrow \ln(n) > e^A \Leftrightarrow n > \exp(e^A)$. يكفي أن نختار: $n_0 = \left[\exp(e^A)\right] + 2$

حل ت3:

حساب نهاية المتتالية (u_n):

1) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(n + \sqrt{(n+1)(n+2)}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{-3n-2}{n + \sqrt{(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}.\frac{-3-\frac{2}{n}}{1+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}} = \frac{-3}{2}$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) \overset{m=\frac{1}{n}}{=} \lim_{m\to 0}\exp\left(\frac{\ln(1+m)}{m}\right) = \exp(1) = e$$

3) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^n}.\frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n} = 1$$

5) $u_n = \frac{\pi^n}{1\times 3\times \ldots \times(2n+1)}$. لدينا $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\pi^{n+1}}{1\times 3\times\ldots\times(2n+1)(2n+3)} \times \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n+1)}{\pi^n} = \frac{\pi}{2n+3}$$

وبما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n+3} = 0$ حسب المبرهنة $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

حل ت4:

دراسة رتابة المتتالية (u_n) واستنتاج طبيعتها في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{2}{n+2} - \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل لأن: $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{2}{n+1} > 1$ إذا حسب النظرية المتتالية (u_n) متقاربة.

2) $$\forall n \geq 1 : u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)+1} - \frac{n^2+1}{2n+1} = \frac{n^2+2n+2}{2n+3} - \frac{n^2+1}{2n+1} = \frac{2n^3+5n^2+6n+2-(2n^3+3n^2+2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2n^2+4n-1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما. وهي متباعدة لأن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}\cdot\frac{2n}{n+1}}=\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}}$ (3

نلاحظ أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: n^2+2n<n^2+2n+1 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}}<1$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما إذا المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل بالعدد 0

(4 $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+(n+1)}=\frac{1}{2n+1}>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ولدينا $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: u_n<1$

ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا متقاربة.

حل ت5:

1. نرمز بـ $P(n)$ للمتباينة $\forall n\in\mathbb{N}:\ (1+a)^n\geq 1+na$

لدينا $(1+a)^0=1\geq 1+0a$ إذا $P(0)$ صحيحة.

نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\forall n\in\mathbb{N}:\ (1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)a$

من الفرضية لدينا $(1+a)^{n+1}=(1+a)^n(1+a)\geq(1+na)(1+a)=1+na+a+a^2n\overset{a^2n\geq 0}{\geq}1+a(n+1)\Rightarrow(1+a)^{n+1}\geq 1+a(n+1)$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة. إذا $\forall n\in\mathbb{N}:\ (1+a)^n\geq 1+na$

لندرس تقارب المتتالية الهندسية المعرّفة بحدّها العام $u_n=q^n\ (q\in\mathbb{R})$

أ) إذا كان $q\in]1,+\infty[$ فإنّه يوجد $a\geq 0$ حيث $q=a+1$ إذا حسب متباينة برنولي لدينا $\forall n\in\mathbb{N}:\ q^n=(1+a)^n\geq 1+na$

ومنه يكون $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}q^n\geq\lim_{n\to+\infty}(1+an)=+\infty$ إذا (u_n) متباعدة.

ب) إذا كان $q=1$ فإنّ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=1$ إذا $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$. إذا (u_n) متقاربة.

ج) إذا كان $q\in]-1,1[$ نميز حالتين

- إذا كان $q=0$ فإنّ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=0$ إذا $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. إذا (u_n) متقاربة.

- إذا كان $q\neq 0$ فإنّه يوجد $q'\in]1,+\infty[$ حيث $|q|=\frac{1}{q'}$ حسب أ) الحالة السابقة فإنّ $\lim_{n\to+\infty}q'^n=+\infty$

ونستنتج أنّ $\lim_{n\to+\infty}|q|^n=0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}q^n=0$ إذا (u_n) متقاربة.

د) إذا كان $q\in]-\infty,-1]$ نميز حالتين

- إذا كان $q=-1$ فإنّ المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية فهي متباعدة لأنّ $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n=\begin{cases}+1 & \text{si } n \text{ pair}\\ -1 & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$

- إذا كان $q\in]-\infty,-1[$ فإنّه يوجد $q'\in]1,+\infty[$ حيث $q=-q'$ ويكون $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n q'^n=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ pair}\\ -\infty & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$

وفي هذه الحالة المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية. إذا (u_n) متباعدة.

حل ت6:

1. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية، تعيّن أساسها q وحدّها الأول v_0

$v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{27}\right)=\ln\left(\frac{9\sqrt[3]{u_n}}{27}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{\frac{u_n}{27}}\right)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{u_n}{27}\right)=\frac{1}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية، أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدّها الأول

$v_0=\ln\left(\frac{u_0}{27}\right)=\ln\left(\frac{27e^2}{27}\right)=\ln\left(e^2\right)=2$

2. كتابة u_n و v_n بدلالة n وحساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim_{n\to+\infty}v_n$

لدينا $v_n=v_0q^n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وبما أنّ $v_n=\ln\left(\frac{u_n}{27}\right)$ فإنّ $u_n=27e^{v_n}$ ومنه نستنتج أنّ $u_n=27e^{2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

بما أنّ $q=\frac{1}{3}\in]-1,1[$ فإنّ $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} 27e^{2\left(\frac{1}{3}\right)^n}=27e^{\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^n}=27e^0=27$

حل ت8:

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين موجبتين تماما. نضع : $\forall n\in\mathbb{N}: w_n=\frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}$.

إثبات أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n=0$.

1) نفرض أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.

لدينا $0\le w_n=\frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}\le\frac{u_n^3+u_n^2v_n+v_n^3+u_nv_n^2}{u_n^2+v_n^2}=\frac{u_n^2(u_n+v_n)+v_n^2(u_n+v_n)}{u_n^2+v_n^2}=u_n+v_n \Rightarrow 0\le w_n\le u_n+v_n$

وبتطبيق نظرية الحصر نجد: $\lim_{n\to+\infty} w_n=0$

2) نفرض أنّ: $\lim_{n\to+\infty} w_n=0$. نعتبر من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $M_n=\max\{u_n,v_n\}$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}: w_n=\frac{u_n^3+v_n^3}{u_n^2+v_n^2}\ge\frac{M_n^3}{2M_n^2}=\frac{M_n}{2}\ge 0\Rightarrow(\forall n\in\mathbb{N}: 0\le\frac{M_n}{2}\le w_n)$

وبتطبيق نظرية الحصر نجد : $\lim_{n\to+\infty} M_n=0$ وبما أنّ: $0\le u_n\le M_n$ و $0\le v_n\le M_n$

وبتطبيق نظرية الحصر مرّة أخرى في كلي المتباينتين نجد: $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=0$

حل ت9:

تعيين $\lim\limits_{\underline{n\to+\infty}} u_n$ و $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n$. نرمز بـ: $Ad(u_n)$ لمجموعة القيم اللاصقة للمتتالية (u_n)

1) $u_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$: لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}+1\right)=1$ و $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)=-1$ ومنه $Ad(u_n)=\{-1,+1\}$

إذا $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n=\sup(Ad(u_n))=1$ و $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n=\inf(Ad(u_n))=-1$

3) $u_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$: لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n+1]{1+2^{-(2n+1)}}=1$ من جهة أخرى لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{1+2^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\exp\left[\frac{1}{2n}\ln(1+2^{2n})\right]=\lim_{n\to+\infty}\exp\frac{1}{2n}\left[\ln 2^{2n}(2^{-2n}+1)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\exp\frac{1}{2n}\left[2n\ln 2+\ln(2^{-2n}+1)\right]=\lim_{n\to+\infty}\exp\left[\ln 2+\frac{\ln(2^{-2n}+1)}{2n}\right]=\exp(\ln 2)=2$$

ومنه $Ad(u_n)=\{1,2\}$ إذا $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n=\sup(Ad(u_n))=2$ و $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n=\inf(Ad(u_n))=1$

4) $u_n=1+n\sin\frac{n\pi}{2}$ لدينا $u_n=1+n\sin\frac{2n\pi}{4}$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{4n}=\lim_{n\to+\infty}(1+4n\sin\frac{4n\pi}{2})=\lim_{n\to+\infty}\left(1+4n\sin 2n\pi\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+4n(0)\right)=1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{4n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{2}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\right)=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{4n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+2)\sin\frac{(4n+2)\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+2)\sin(\pi+2n\pi)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+2)(0)\right)=1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{4n+3}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+3)\sin\frac{(4n+3)\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+3)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{4n\pi}{2}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+(4n+1)\sin\frac{3\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-(4n+1)\right)=-\infty$$

ومنه $Ad(u_n)=\{-\infty,1,+\infty\}$ إذا $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n=\sup(Ad(u_n))=+\infty$ و $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n=\inf(Ad(u_n))=-\infty$

5) $u_n=(2\cos\frac{2n\pi}{3})^n$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{3n}=\lim_{n\to+\infty}(2\cos\frac{6n\pi}{3})^{3n}=\lim_{n\to+\infty}(2\cos 2n\pi)^{3n}=\lim_{n\to+\infty}(2\times 1)^{3n}=+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{2(3n+1)\pi}{3}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}$$

نميّز حالتين: إذا كان $n=2k$: $\lim_{n\to+\infty} u_{3n+1}=\lim_{k\to+\infty} u_{3(2k)+1}=\lim_{k\to+\infty} u_{6k+1}=\lim_{k\to+\infty}(-1)^{2k+1}=-1$

إذا كان $n=2k+1$: $\lim_{n\to+\infty} u_{3n+1}=\lim_{k\to+\infty} u_{3(2k+1)+1}=\lim_{k\to+\infty} u_{6k+4}=\lim_{k\to+\infty}(-1)^{2k+2}=1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\frac{2(3n+2)\pi}{3}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2n\pi\right)\right)^{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^{3n+2}=(-1)^{n}$$

نميّز حالتين: إذا كان $n=2k$: $\lim_{n\to+\infty} u_{3n+2}=\lim_{k\to+\infty} u_{3(2k)+2}=\lim_{k\to+\infty} u_{6k+2}=\lim_{k\to+\infty}(-1)^{2k}=1$

إذا كان $n=2k+1$: $\lim_{n\to+\infty} u_{3n+2}=\lim_{k\to+\infty} u_{3(2k+1)+2}=\lim_{k\to+\infty} u_{6k+5}=\lim_{k\to+\infty}(-1)^{2k+1}=-1$

ومنه $Ad(u_n)=\{-1,1,+\infty\}$ إذا $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n=\sup(Ad(u_n))=+\infty$ و $\underline{\lim_{n\to+\infty}} u_n=\inf(Ad(u_n))=-1$

حل ت10:

لتكن (u_n) متتالية حقيقية. 1. أثبات أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n=l$

♦ نفرض أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$. لدينا $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(n\ge n_0 \Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon)$ ومنه نستنتج أنّ:

$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(2n\ge n\ge n_0 \Rightarrow |u_{2n}-l|<\varepsilon)$ و $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(2n+1>n\ge n_0 \Rightarrow |u_{2n+1}-l|<\varepsilon)$

إذا $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l$

♦ نفرض أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=l$.

لدينا $\forall\varepsilon>0, \exists n_1\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(n\ge n_1 \Rightarrow |u_{2n}-l|<\varepsilon)...(1)$ و $\forall\varepsilon>0, \exists n_2\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}:(n\ge n_2 \Rightarrow |u_{2n+1}-l|<\varepsilon)...(2)$

بوضع $n_0=\max(2n_1, 2n_2+1)$ وبناء على (1) و (2) فإنّ: $|u_n-l|<\varepsilon$ من أجل كل $n\ge n_0$. وبالتالي: $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

2. نفرض أنّ: $u_n=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$. إثبات أنّ المتتاليتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متجاورتان

لدينا $u_{2n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...-\frac{1}{2n+1}$ و $u_{2n+1}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n+2}$

$u_{2(n+1)}-u_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n}=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}>0$ ومنه (u_{2n}) متزايدة تماما.

$u_{2(n+1)+1}-u_{2n+1}=u_{2n+3}-u_{2n+1}=-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}=\frac{-1}{(2n+3)(2n+4)}<0$ ومنه (u_{2n+1}) متناقصة تماما.

لنثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n+1}-u_{2n})=0$. لدينا $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n+1}-u_{2n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+2}=0$ ومنه (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متجاورتان.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}=0$ حسب السؤال 1 نستنتج أنّ (u_n) متقاربة نحو نفس النهاية 0 .

حل ت11:

ليكن $a\ge 1$.نعتبر (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين كما يلي: $u_0=a,\ v_n=\frac{a}{u_n},\ u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

إثبات أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وحساب l نهايتها المشتركة. لدينا (يمكن التأكد بسهولة) $\forall n\in\mathbb{N}: u_n>0,\ v_n>0$

1. لنحسب $u_{n+1}-u_n$. $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{a-u_n^2}{2u_n}=\frac{(\sqrt{a}-u_n)(\sqrt{a}+u_n)}{2u_n}$

نلاحظ أنّ اتجاه تغير المتتالية (u_n) متعلق بإشارة الفرق $\sqrt{a}-u_n$. لدينا $u_n-\sqrt{a}=\frac{u_{n-1}^2+a}{2u_{n-1}}-\sqrt{a}=\frac{u_{n-1}^2-2\sqrt{a}u_{n-1}+a}{2u_{n-1}}=\frac{(u_{n-1}-\sqrt{a})^2}{2u_{n-1}}\ge 0$

وهذا يثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة وأنّ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n-v_n\ge 0$

2. لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_n}{u_{n+1}}\ge 1 \Rightarrow v_{n+1}\ge v_n$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة.

3. لنثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$. بما أنّ المتتالية (v_n) متزايدة.

لدينا $u_{n+1}-v_{n+1}\le u_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{1}{2}(u_n-v_n)$ وبالتالي نستنتج أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}:\ 0\le u_n-v_n\le\frac{1}{2^n}(u_0-v_0)$

وبتطبيق نظرية الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ وهذا يثبت أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان، إذا تتقاربان نحو نفس النهاية l.

لنحسب l: لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$ وبما أنّ: $v_n = \frac{a}{u_n}$, فإنّ: $l^2 = a$ أي $l = \pm\sqrt{a}$ و كون (u_n) و (v_n) موجبتين إذا $l = \sqrt{a}$.

حل ت12:

باستعمال شرط كوشي دارسة طبيعة المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\ln k}$

من أجل $n \geq 2$ لدينا $\ln n \leq n$ إذا $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{\ln n}$ ومنه لدينا

$$u_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$$

نأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ومن أجل $n_0 \geq 2$ نأخذ $n = p, m = 2p$ بحيث $p \geq n_0$ لدينا

$$|u_m - u_n| = |u_{2p} - u_p| = \frac{1}{\ln(p+1)} + \frac{1}{\ln(p+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln(2p)} \geq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{2p} \geq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \ldots + \frac{1}{2p} = \frac{p}{2p} \geq \frac{1}{2}$$

ومنه $\exists \varepsilon > 0\, (\varepsilon = \frac{1}{2}),\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ (n_0 \geq 2), \exists (n,m) \in \mathbb{N}^2 : \left[m > n \geq n_0 \wedge\ \left|u_m - u_n\right| \geq \frac{1}{2} \right]$

وبالتالي (u_n) ليست متتالية كوشي ومنه (u_n) متباعدة.

2) $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

من أجل $\varepsilon > 0$ ومن أجل $m, n \in \mathbb{N}, (m > n)$ لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}: |\sin x| \leq 1, |\sin x| \leq |x|)$

$$|u_m - u_n| = \left|\cos\left(\frac{1}{m}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 2\left|\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$$

من أجل $n > \frac{2}{\varepsilon}$ يكفي أن نختار $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ وبالتالي أثبتنا $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ [m > n \geq n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon]$

وبالتالي (u_n) متتالية كوشي ومنه (u_n) متقاربة.