جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

دروس في القياس الاقتصادي

مطبوعة مقدمة لطلبة سنة ثالثة اقتصاد كمي وماستر اقتصاد كمي

الأستاذ: محمد الناصر حميداتو

تقديم

نحاول في هذه المطبوعة عرض الكثير من المبادئ الاساسية الواجب تعلمها للولوج الى علم الاقتصاد القياسي فهي خلاصة اعمال متراكة عبر الزمن لمن سبقنا من الباحثين عملنا على تجميعها وعرضها بصور مختلفة وانطلاقا من البساطة الى الاكثر تعقيدا متدرجين فيها فصل بعد فصل مازجين بين النظرية والبرهان والتطبيق حتى تصل المعلومة الى صاحبها في احسن حلة ويمكن حينها الاستفادة منها وتوظيفها .

وهي مقدمة بصورة خاصة الى طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير وخاصة الدراسين في الاقتصاد الكمي ليسانس او ماستر او الذين يستعملون القياس الاقتصادي في ابحاثهم ومذكراتهم وبصورة عامة الى كل الباحثين والمهتمين بعلم الاقتصاد القياسي والمطبقين له او الاساتذة الذين يطبقون القياس في ابحاثهم ومشاريعهم او حتى المدرسين منهم .

الحقيقة ان كل عمل فيه عيوب ندرج نحن د محمد الناصر حميداتو الاميل ادناه لارسال تصويباتكم وتصحيحكم شاكرين تعاونكم ومتقبلين نقدكم بكل صدر رحب واجركم على الله .

د. محمد الناصر حميداتو

mnhamidatou@gmail.com

فهرس المحتويات

الاقتصاد القياسي المفاهيم الاساسية

Économétrie les concepts de base

أولا: مفهوم النموذج

أ - **تعريف**: من الصعب تحديد تعريف موحد للنموذج "تقديم رياضي يشكل لظاهرة تقديم جبائي وجزئي تحقيقه طبيعة جد معقدة".

ب - **مكونات النموذج** $Y_t=a+bx_t+u_t$

المتغيرات التابعة Y_t . المشارحة والمفسرة والمتنقلة x_t.

المعالم $a.\ b$ (مرونات)

الخطأ العشوائي u_t البواقي الاضطراب العشوائي

ج - **مراحل إعداد النموذج**

1. تحديد العطاء النظري: كل نموذج له مرجع او فرضيات او سيناريو متوقع مثلا حسب المفاهيم الأساسية للنظرية الكينزية

- الاستهلاك والدخل مرتبطان – مستوى الاستثمار الخاص ومعدل الفائدة مترابطان
- يوجد استثمار عمودي... الدخل جاري الاستثمار العمومي والخاص رائد الاستهلاك

2. نمذجة العلاقات في شكل معادلات:

1- $C=f(y)$ مع $f'>0$ الاستهلاك هو دالة للدخل.

2- $I=g(r)$ مع $g'<0$ الاستثمار الخاص مرتبط بأسعار الفائدة.

3- $\bar{I}$ يوجد استثمار عمومي

4- الناتج الداخلي يساوي الاستهلاك والاستثمارات $Y=C+I+\bar{I}$

وعليه يمكن استخدام: $C=aY^b$ أو $C=a+By$

$C=a+bY$ مع $0<b<1$ و $a>0$ $\quad C=a+bY$

a حد إلتفاف .b. الميل الحدي للاستهلاك.

3. تحديد وقياس المتغيرات: النموذج تحتوي على متغيرات أو محددات للظاهرة ولها علاقات فيما بينها يمكن التمييز بين أنواع من النماذج.

- السلاسل الزمنية: ملاحظة المتغيرات الظاهرة في مجال زمني محدد .
- بيانات مقطعيه (لحظية) المتغيرات ملحوظة في زمن واحد.
- بانل Panel: المتغيرات تمثل قيم مأخوذة من عينة المشاهدات في مجال منتظم.ببعدين الزمني والمقطعي
- كوهوت coharte: قريب من السابق(Panel) حيث تتميز الوحدات المشاهدة هي نفسها في المرحلة مقارنة بمراحل أخرى.

4. التباطؤ الزمني: وخاصة في حالة السلاسل الزمنية أحيانا نجد في النموذج $a+bY_{t-1}$ الاستهلاك مرتبط بالدخل في الفترة السابقة ويسمى Y_{t-1} متغير داخلي متأخر.

5. المصادفة على النموذج أخر مرحلة وهي التأكد.

- العلاقات بين المتغيرات متحققة.
- إمكانية تقدير المعالم والمعاملات .
- النموذج محقق في كافة فترة الدراسة.
- المعاملات مقبولة.

ولكل هذه الأسئلة هناك تقنيات قياسية واحصائية للتأكد من ذلك.

ثانيا: دور الاقتصاد القياسي

أ -**الاقتصاد القياسي لأجل المصادقة على النظرية**

حتى نكسب الثقة في النظرية ونؤكد مصداقيتها يلجأ إلى تقدير واختبار واستعمال القياس الاقتصادي بهدف الوصول إلى النظرية، فالنظرية لا تظهر كافة الأشياء الظاهرة غير أن النمذجة يجعل منها جد مؤكدة وواضحة.

ب -**الاقتصاد القياسي للتحليل والتنبؤ:**

- دراسة التأثيرات بين المتغيرات المدروسة وبناء النماذج القياسية في شكل قابل للاختبار الميداني.
- تحديد مميزات العينة والمجتمع إحصائيا يساعد على تحديد مجال الثقة، للمعالم المقدرة واختبار معنوياتها.
- المحاكاة وقياس أثر تغير متغير على أخر $\Delta C_t= a_t+\Delta Y_t$
- التنبؤ: لمتخذي القرار مما يساعد على استشراف المستقبل.

ج مراحل البحث في الاقتصاد القياسي:

المرحلة الأولى: تخصيص النماذج: وهو ايجاد متغيرات النموذج والصياغة الرياضية- المعرفة المسبقة لاشارات وحجم معالم النموذج.

المرحلة الثانية: تقدير معالم النموذج: جمع البيانات- تميز الدالة- اختبار درجة الارتباط- اختبار تقنية التقدير المناسب للنموذج.

المرحلة الثالثة: تقييم النموذج وهناك ثلاثة مقاييس.

أ -المقاييس الاقتصادية المعرفة مسبقا.

ب -المقاييس الاحصائية.

ج -مقاييس نظرية الاقتصاد القياسي أو مشاكل الاقتصاد القياسي.

المرحلة الرابعة: تقييم قوة التنبؤ للنموذج المقدر عن طريق التأكد من استقرار المقدرات، اختيارات المحاكاة للتنبؤ واستعمال النموذج في التنبؤ واتخاذ القرارات.

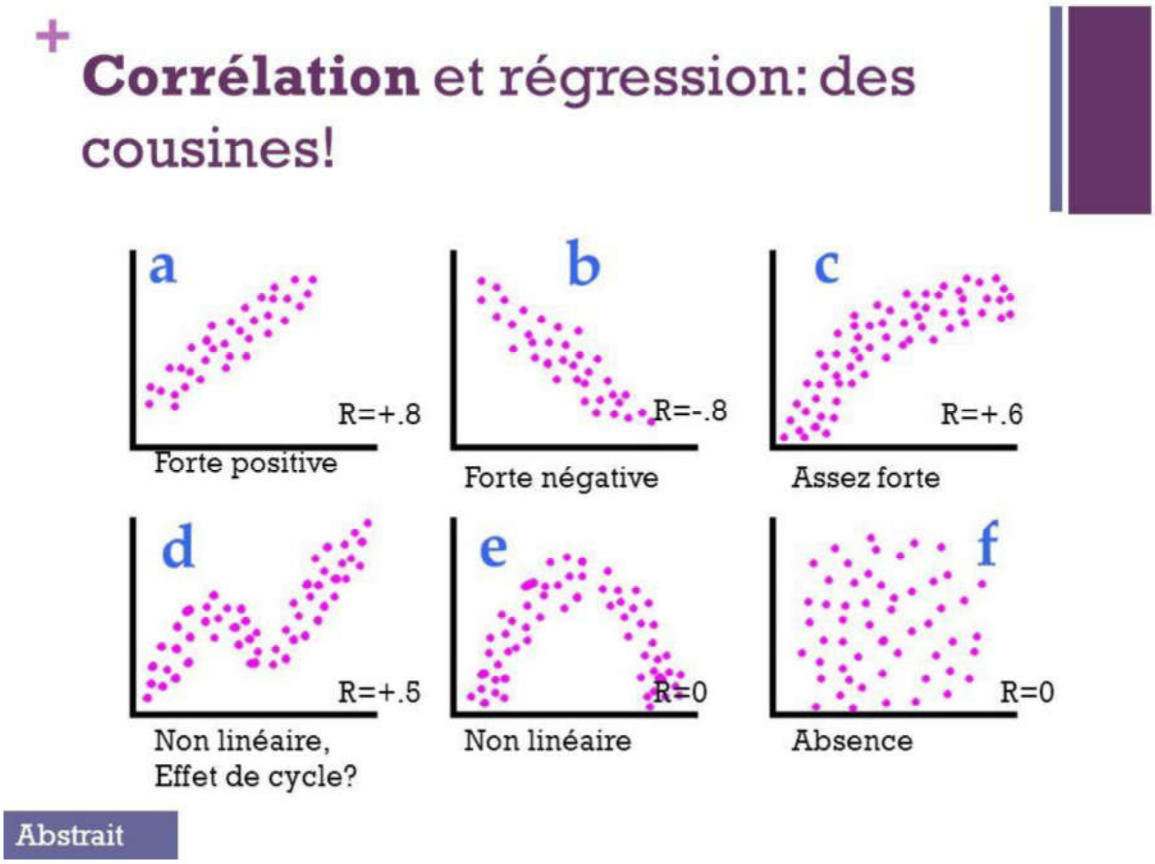
ثالثا: نظرية الارتباط:

أ -**تقديم**: عادة ندرس ارتباط المتغيرات المشكلة لظاهرة من عدمه ونعني بالارتباط وجود علاقة بين متغيرين، وإذا كان أكثر فهو ارتباط متعدد.

كل متغيرين يمكن ان يكون هناك:

- ارتباط موجب (علاقة طردية)
- ارتباط سالب (علاقة عكسية)
- غير مرتبطتين (منفصلين).

والارتباط يمكن أن يكون خطي أو غير خطي



ب قياس وتحديد معامل الارتباط:

تعطى علاقة معامل الارتباط بالقيمة r_{xy} حيث :

$$r_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x,\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{n\sum xy_i-\sum x\sum y_i}{\sqrt{n\sum {x_i}^2-(\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum {y_i}^2-(\sum y_i)^2}}$$

$cov(x,y)$: التباين المشترك بين x و y

σ_x,σ_y : الانحرافات المعيارية x و y

n : عدد المشاهدات

$r_{xy} \in [-1,1]$ قيم معامل الارتباط محصورة بين الواحد وناقص واحد.

- قريبا من 1 علاقة ايجابية طردية قوية.
- قريبا من -1 علاقة سلبية عكسية قوية
- قريبا من 0 لا يوجد علاقة (لا يوجد ارتباط)

ج اختبار الارتباط :

عادة الحصول على القيام الثلاثة السابقة نادر ما يتوصل إليه وعليه:

وفي حالة عدم التأكد النظرية الإحصائية تعطينا الحل كاختبار:

$$\begin{cases} H_0: r_{xy} = 0 \\ H_1: r_{xy} \neq 0 \end{cases}$$

$$T_{c} = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}} \sim T_{t\,(n-2)}^{\,1-\frac{\alpha}{2}}$$

نرفض H_0 إذا كان: $Si: t_c > t_t$

مثال: مزارع يريد معرفة العلاقة بين السماد المستخدم ومردودية القمح.

Xالسماد	16	18	23	24	28	29	26	31	32	34
Yالمردودية	20	24	28	22	32	28	32	36	41	41

المطلوب :

- ارسم سحابة النقط (كيف يمكن تفسير العلاقة بين X وY)
- احسب معامل الارتباط واختبر عند مستوى معنوية 5% وجود الارتباط من عدمه .

ملاحظات:

- التباين المشترك يساوي الصفر ليس معناه عدم وجود العلاقة وإنما تقتضي دراسة إمكانية وجود علاقة غير خطية وذلك يعد تطبيق ln على المتغيرين.
- وجود معامل ارتباط قوي احصائيا بين متغيرين يعني وجود علاقة قوية، لكن اقتصاديا وعمليا لا يمكن البث بذلك إلا إذا ارتبطا اقتصاديا كذا الشأن بالنسبة لمعامل الارتباط الصفري.

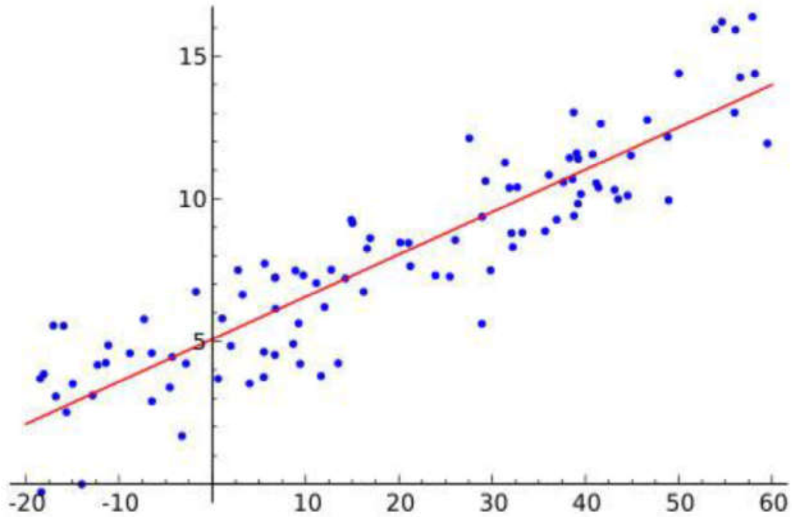
تحليل الانحدار الخطي البسيط

Analyse de la régression Simple

كلمة انحدار: مصدرها دراسة أطوال الأبناء بالنظر إلى أطوال آبائهم

يستخدم الانحدار الخطي البسيط لاختبار فرضية وجود علاقة بين متغير تابع Y ومتغير مفسر أو شارح او مستقل X واحد وهذا قصد التحليل والتنبؤ.

- تحليل الانحدار الخطي البسيط: باقتراض وجود علاقة خطية بين X و Y ثم نرسم المستقيم الذي يمثل او يقارب هذه العلاقة.
- عند دراستنا لشكل الانتشار أو سحابة النقط هل يمكن رصد حقيقة العلاقة أم لا.



- هذا التشويش او الاضطراب نسميه بالحد العشوائي وننظر في توزيعها
- العلاقة الحقيقية والخطية تكتب:

$Y_t = a+bX_t+U_t$ ....(1) (سلسلة زمنية لنفس الشخص).

$Y_i = a+bX_i+U_i$ (سلسلة مقطعية لأشخاص متعددة)

والخط المستقيم الجديد يكتب: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t$ ....(2)

المتغيرات X و Y والمعالم $a.b$ الحقيقة والمعالم المقدرة هي $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ووجود الحد العشوائي u في المعادلة (1) مرجعة إلى الخطأ.

- وجود متغيرات أخرى مفسرة مدرجة في المعادلة أو غير قابلة للقياس.
- الخطأ في قياس المتغيرات وعدم الدقة.

- المعلومات مصدرها العينة وسوف تعمم على المجتمع مما يعني هامش الخطأ.

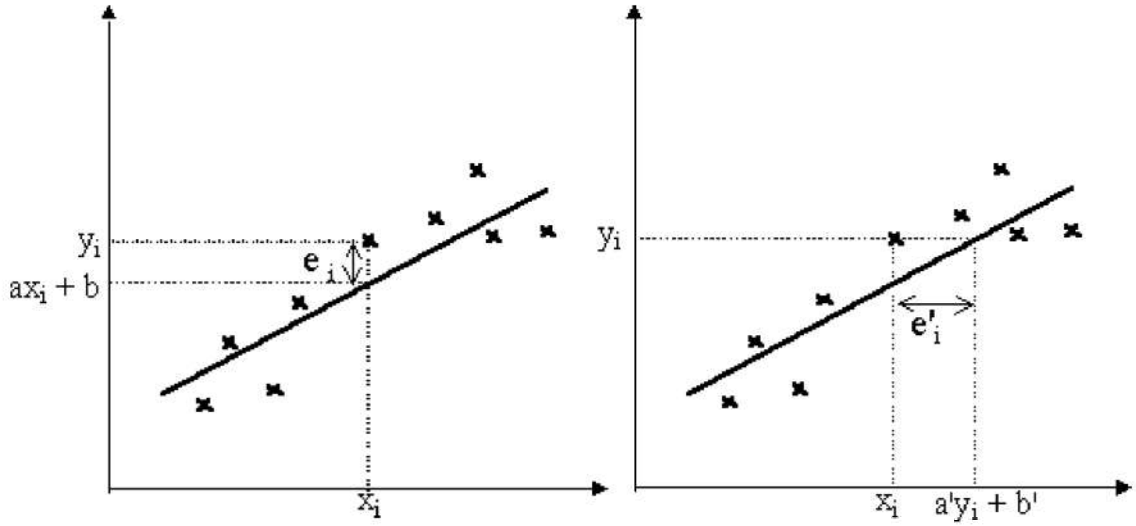
ويفترض فيها:

1. موزعة طبيعيا $U_t \rightsquigarrow N$
2. وسطه معدوم $E(U_t) = 0$
3. تباين ثابت $V(U) = E(U^2) = \sigma^2$
4. عدم ارتباط الأخطاء مع بعضها $E(U_i U_j) = 0 \ \forall i \neq j$
5. عدم ارتباط الأخطاء بالمتغير المفسر x $E(U_i X_i) = 0. COV(U_i X_i) = 0$

في ظل هذه الفرضيات نحاول بناء خط مستقيم يمثل .التقريب للنموذج (1)

1. تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية MCØ .OLS

وهي طريقة تقدير وأسلوب مفضل لرسم خط مستقيم لعين المشاهدات X و Y وهي تعمل على تصغير مجموع المربعات لإنحرافات النقاط الرأسية على الخط إلى أدنى حد ممكن باعتبار المعمله $\hat{\alpha}$ هو مقدر لـ a و$\hat{\beta}$هو مقدر لـ b. فإننا نبحث في تصغير الفرق وبما أن الفرق يمكن ان يكون موجبا او سالبا نعمل على جعله و مربعا.



من (1) و (2) نجد أن: $Y_t - \widehat{Y_t} = U_t$

$$\sum U_t = \sum(Y_t - \hat{Y}_t) \longrightarrow Min \ \sum {U_t}^2 = Min \ \sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2$$

$$\sum U_t = 0 = \sum(Y_t - \hat{Y}_t) = 0$$ (حسب الفرضية 2 للاخطاء)

$$\sum(Y_t - \hat{a} - \hat{B}X_t) = 0 \Rightarrow \ \sum Y_t(n\hat{a} - \hat{B}\sum X_t) \Rightarrow \quad \bar{Y} = \hat{a} + \hat{B}\bar{X} \dots (3)$$

وتفيدنا هذه الأخيرة أن الخط المقدر للنموذج يمر عبر النقطة $(\bar{X},\bar{Y})$ وتبقى إشكالية الخط، وباستعمال طريقة المربعات الصغرى أن تصغير مجموع مربعات الأخطاء فإننا نلجأ إلى الرياضيات وعندما نستعمل الاشتقاق الجزئي عند المعلمتين ونساوي المشتق إلى الصفر:

أي أنه $$Q=\sum_{i=1}^{n}Ut^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)^2$$

ولتصغير Q نعمل على اشتقاقها جزئيا بالنسبة إلى $\hat{\alpha}$ و $\hat{B}$ ونجعل المشتق يساوي الصفر:

الهدف هو:

$$Min\ Q=\frac{\partial Q}{\partial\hat{\alpha}}=\frac{\partial Q}{\partial\hat{B}}=0$$

عندما تشتق بالنسبة إلى $\hat{\alpha}$ و $\hat{B}$:

$$Q=\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)^2=\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\hat{\alpha}}=2\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)(-1)=0$$

$$\Rightarrow\ \sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\Rightarrow\quad \hat{a}=\bar{Y}-\hat{B}\bar{X}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\hat{B}}=2\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)(X_t)(-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad \sum X_t\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)=0\quad=\Delta\quad \sum X_tY_t=\hat{\alpha}\sum X_t+\hat{B}\sum {X_t}^2$$

بالتعويض عن قيمة $\hat{\alpha}$ في المعادلة (4) نجد:

$$\sum X_tY_t=\left(\bar{Y}-\hat{B}\bar{X}\right)\sum X_t+\hat{B}\sum {X_t}^2$$

$$\sum X_tY_t=\bar{Y}\sum X_t-\hat{B}\bar{X}\sum X_t+\hat{B}\sum {X_t}^2$$

بما أن: $\bar{X}=\frac{\sum X_t}{n}\Rightarrow.\sum X_t=n\bar{X}$

$$\sum X_tY_t=n\bar{X}\bar{Y}+\hat{B}\left(\sum {X_t}^2-n\bar{X}^2\right)$$

$$\Rightarrow\quad \hat{B}=\frac{\sum X_tY_t-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum {X_t}^2-n\bar{X}^2}\qquad\Rightarrow\quad \hat{B}=\frac{\sum_{t=i}^{n}(X_t-\bar{X})(Y_t-\bar{Y})}{\sum_{t=i}^{n}(X_t-\bar{X})^2}\ \ldots\ldots.(5)$$

يمكن التعبير عن (5) $\hat{B}=\frac{\sum x_ty_i}{\sum {x_t}^2}\quad:\quad x_t=(X_t-\bar{X}),\quad y_t=(Y_t-\bar{Y})$

ومنه وضعنا خط مستقيم يرمز ويلخص العلاقة بين المتغير التابع Y والمتغير المفسر أو الشارح X

$$\hat{Y}_t=\hat{\alpha}+\hat{B}X_t$$

مثال/ لدينا جدول يلخص النتائج المتحصل عليها من محصول الحنطة القمح Y باستخدام كميات السمادX

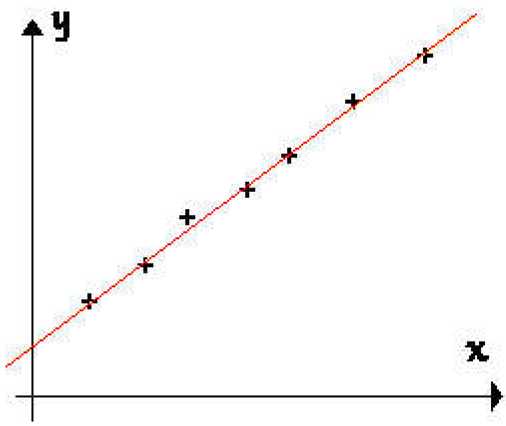
n	Y_t	X_t	y_t	x_t	$x_t y_t$	${x_t}^2$
1	40	6	−17	−12	204	144
2	44	10	−13	-8	104	84
3	46	12	−11	-6	66	36
4	48	14	-9	-4	36	16
5	52	16	-5	-2	10	4
6	58	18	1	0	0	0
7	60	22	3	4	12	16
8	68	24	11	6	66	36
9	74	26	17	8	136	64
10	80	32	23	14	322	196
$\sum$	570	180	0	0	956	576

$$\hat{B} = \frac{\sum n_t y_i}{\sum {n_t}^2} = \frac{956}{576} = 1.66, \qquad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X} = 57 - 166(18) = 27.12$$

$$\hat{Y}_t = 27.12 + 1.66X_t$$

الرسم والشكل البياني :

$$\hat{Y}_t = 27.12 + 1.66X_t$$



2 خواص المقدرات :

ا المتوسطات

$$\left.\begin{array}{l} Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t \\ \bar{Y}_t = a + b\bar{X}_t + \bar{\varepsilon}_t \end{array}\right\} \Rightarrow Y_t - \bar{Y} = b(X_t - \bar{X}) + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$$

$$yt = Y_t - \bar{Y} = bxt + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$$

بالتعويض في (5) عن قيم B و $Y_t - Y$ نجد أن:

$$\hat{B} = \frac{\sum xtyt}{\sum xt^2} = \frac{\sum xt\,[bxt + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})]}{\sum xt^2} = \frac{b\sum xt^2}{\sum xt^2} + \frac{\sum xt\,(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\sum xt^2} \quad on\ a \backslash \sum x_t\bar{\varepsilon} = 0$$

$$\hat{B} = b + \frac{\sum xi\,(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\sum xi^2} = b\frac{\sum xt\,\varepsilon_t}{\sum xt^2} \ldots\ldots (6)$$

$$E(\hat{B}) = E(b) + \frac{\sum xtE\,(\varepsilon_t)}{\sum xt^2} = b \qquad \left| \begin{array}{l} E(\hat{B}) = b \\ E(\varepsilon_t) = 0 \end{array}\right.$$

$\hat{B}$ هو مقدر غير متحيز لـ b

بنفس الطريقة نجد أن: $E(\hat{\alpha}) = a$

$$\left.\begin{array}{r} \bar{Y} = \hat{a} + \hat{B}\bar{X} \\ \bar{Y} = a + b\bar{X} + \bar{\varepsilon} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{a} = a + \bar{\varepsilon} - (\hat{B} - b)\bar{X} \ ;$$

$$E(\hat{a}) = E(a) + E(\bar{\varepsilon}) - E\left((\hat{B} - b)\bar{X}\right) = a \left| \begin{array}{r} E(\bar{\varepsilon}) = 0 \\ E(\hat{B} - b) = 0 \end{array}\right.$$

$\hat{a}$ هو مقدر غير متحيز لـ a

تذكير: نقول عن مقدر أنه متحيز إذا كان $E(\hat{\theta}) = \theta + q$; مقدار حجم التحيز q

التباينات:

تعطى التبايانات للمقدرات بالشكل التالي:

$$V(\hat{B}) = \frac{\sigma_v^2}{\sum xt^2}, et. V(\hat{\alpha}) = \sigma_v^2 . \frac{\sum Xt^2}{n\sum xt^2}:$$

والملاحظ أنه كلما $n \to \infty \to \sum xt^2 \to \infty$ فيكون :

$V(\hat{B}) \to 0$ و $V(\hat{\alpha}) \to 0$ مما يعني مقدرات مقاربة للقيم الحقيقية عند رفع n

وحيث أن σ_v^2 غير معروفة فإن تباين البواقي تقدره بـ S^2

$$S^2 = \frac{\sum {U_t}^2}{n-k} \left| \begin{array}{l} n\ \text{عدد المشاهدات} \\ k\ \text{المعالم المقدرة} \end{array}\right.$$

ومن تصبح: $V(\hat{\alpha}) = \frac{\sum {U_t}^2}{n-k} . \frac{\sum Xi^2}{n \sum xi^2} = S^2_{\hat{\alpha}}$

$$V(\hat{B}) = \frac{\sum {U_t}^2}{n-k} . \frac{1}{\sum xi^2} = S^2_{\hat{B}}$$

لدينا مقدرين إذا k=2 فإن $S^2 = \frac{\sum {U_t}^2}{n-2} = \hat{\sigma}^2$ كيف ذلك؟

لدينا $U_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{B}X_t - \hat{\alpha}$

$$= Y_t - \hat{B}X_t - \hat{\alpha} - \hat{B}X_t + \hat{B}\bar{X}$$

$$= Y_t - \hat{B}\bar{X}_t - \hat{\alpha} - \hat{B}X_t + \hat{B}\bar{X}$$

$$= Y_t - \bar{Y} - \hat{B}(X_t - \bar{X})$$

وبالتعويض عن قيم Y_t و $\bar{Y}$: $U_t = b(X_t + \bar{X}) + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} - \hat{B}(X_t - \bar{X})$

$$U_t = \left(b - \hat{B}\right)(X_t - \bar{X}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

$$\sum {U_t}^2 = \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2 + \sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 + 2\left(b - \hat{B}\right) \sum xi(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$$

من (6) نجد أن $\sum xi^2 \left(\hat{B} - b\right) = \sum xi(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) = -\left(b - \hat{B}\right) \sum xi^2$

ونعوض في المعادلة نجد:

$$\sum {U_t}^2 = \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2 + \sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 + 2\left(b - \hat{B}\right)\left(-b - \hat{B}\right) \sum xi^2$$

$$= \sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 - \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2$$

$$V(U_t) = \ E\left(\sum {U_t}^2\right) = E[\sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_t)^2] - \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2$$

$$E[\sum {\varepsilon_t}^2 - n(\bar{\varepsilon}_t)^2] - E\left(\hat{B} - b\right)^2 \sum xi^2 \quad \Bigg| \quad E(\bar{\varepsilon}) = 0$$

$$E\left(\sum {U_t}^2\right) = \sum E(\varepsilon_t)^2 - \frac{1}{n} E\left(\sum \varepsilon_t\right)^2 \sigma^2 \quad \Bigg| \quad E\left(\hat{B} - b\right) = \frac{\sigma^2}{\sum xi^2}$$

$$= n\sigma_v^2 - \frac{1}{n} n\sigma_v^2 - \sigma_v^2 = \quad \Bigg| \quad E(\bar{\varepsilon}) = 0$$

$$E\left(\sum {U_t}^2\right) = (n-2)\sigma^2, \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum {U_t}^2}{n-2} \quad \Bigg| \quad E\left(\hat{B} - b\right) = \frac{\sigma^2}{\sum xi^2}$$

عندما يكون مقدر التباين

3 اختبار معنوية المعالم

لأجل اختبار معنوية المعالم ينبغي علينا معرفة اختبار ستودنت T لان:

$$\frac{\hat{B} - b}{\sigma_{\hat{B}}} \backsim N(0.1) et \ (n-2) \frac{S^2_{\hat{B}}}{\sigma^2_{\hat{B}}} \backsim X^2_{n-2} \Longrightarrow \frac{\hat{B} - b}{S_{\hat{B}}} \backsim T_{n-2}$$

$$\text{لان}=T=\frac{N(0.1)}{\sqrt{\frac{X_n^2}{n}}}=\frac{\frac{\hat{B}-b}{\sigma_{\hat{B}}}}{\sqrt{\frac{(n-2)S_{\hat{B}}^2}{\sigma_{\hat{B}}^2}}}=\frac{\hat{B}-b}{S_{\hat{B}}}\backsim T_{n-2}^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

حيث صيغة الاختبار تكون بالشكل التالي

$$\begin{cases} H_0: b=0 & T_C \backsim T_T \\ H_1: b\neq 0 & \text{نقبل } H_0 \text{ عندما } |T_C| < T_T \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نختبر $\hat{\alpha}$

$$\begin{cases} H_0: a=0 & T_{C_a}=\frac{\hat{a}-a}{S_{\hat{a}}} \\ H_1: a\neq 0 & \text{نقبل } H_0 \text{ عندما } |T_C| < T_T \end{cases}$$

وحسب المثال السابق نجد:

Y				
40	37.08	2.92	8.5264	36
44	43.72	0.28	0.0784	100
46	47.04	-1.04	1.0816	144
48	50.36	-2.36	5.5696	196
52	53.68	-1.68	2.8224	256
58	57	1.00	1.0000	324
60	63.64	-3.64	13.2496	484
68	66.96	1.04	1.0816	576
74	70.28	3.72	13.8384	676
80	80.24	-0.24	0.0576	1024
$\sum$	$\sum_{Ut}=0$	$\sum {U_t}^2=47.3056$		$\sum {X_t}^2=3816$

$$S_{\hat{\alpha}}^2=V(\hat{\alpha})=\frac{\sum {U_t}^2}{n-R}\cdot\frac{\sum Xt^2}{n\sum xi^2}=5.9132.\frac{3816}{10.(576)}\cong 3.92=0\ S_{\hat{a}}=1.98$$

$$S_{\hat{B}}^2=V(\hat{B})=\frac{\sum {U_i}^2}{n-R}\cdot\frac{1}{\sum xi^2}=\frac{5.9132}{576}\cong 0.01 \Longrightarrow S_{\hat{B}}=0.1$$

في ظل فرضية العدم H_0

$$pour\ \hat{a}: Tc_{\hat{a}}=\frac{\hat{a}-a}{S_{\hat{a}}}=\frac{27.12-0}{1.98}\cong 13.7, Tc_{\hat{B}}=\frac{\hat{B}-b}{S_{\hat{B}}}=\frac{1.66-0}{0.1}\cong 16.6$$

نقارن النتيجتين السالفتين بـ T_t عند $\alpha=5\%$

$$T_{n-R}^{1-\frac{\alpha}{2}} = T_8^{0.975} = 2.306$$

نجد أن كل من $\hat{\alpha}$ و $\hat{B}$ مختلفتين عن الصفر أي معنوية احصائية عن 5%

4 اختبار جودة التوفيق والارتباط:

نلاحظ أنه كلما كانت المشاهدات أقرب إلى خط الانحدار كلما صغرت البواقي وكلما زاد التغيرفي Y_t الذي يفسره معادلته يرجع تلك الزيادة إلى الزيادة في الأخطاء.

$$\sum(Y_t-\bar{Y})^2=\sum\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2+\sum\left(Y_t-\hat{Y}\right)^2$$

التغير في البواقي + التغير المفسر في Y = التغير الاجمالي في Y

مجموع مربعات الخطأ + مجموع مربعات الانحدار = إجمالي مجموع المربعات

TSS=ESS+RSS

SCT=ECE+SCR

معامل التحديد R^2: coefficient de détermination

$$\mathrm{TSS}=\mathrm{ESS}+\mathrm{RSS}\Rightarrow\frac{\mathrm{TSS}}{\mathrm{TSS}}=\frac{\mathrm{ESS}}{\mathrm{TSS}}+\frac{\mathrm{RSS}}{\mathrm{TSS}}$$

$$1=\frac{\mathrm{ESS}}{\mathrm{TSS}}+\frac{\mathrm{RSS}}{\mathrm{TSS}}$$

$$R^2=\frac{\mathrm{ESS}}{\mathrm{TSS}}=1-\frac{\mathrm{RSS}}{\mathrm{TSS}}\Rightarrow R^2=1-\frac{\sum {U_i}^2}{\sum {y_i}^2}=\frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum {y_i}^2}$$

نجد قيمة R^2: 0 : عندما لا يفسر معادلة الانحدار أي من التغير في Y_t

1 : عندما تقع كل النقاط على خط الانحدار

ويمكن القول أن النموذج يفسر التغير في Y_t بنسبة % وكلما زادت قيمة R^2 (أقترب من 1) كان أحسن و زاد تفسير النموذج.

العلاقة بين معامل الارتباط r ومعامل التحديدR^2

$$r=\sqrt{R^2}=\frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum {x_i}^2}\sqrt{\sum {y_i}^2}}=\sqrt{\hat{B}\,\frac{\sum x_i y_i}{\sum {y_i}^2}}$$

حسب المثال السابق: $R^2=1-\frac{\sum {U_i}^2}{\sum {y_i}^2}=1-\frac{47.31}{1634}=1-0.029\cong 0.971$

أي معادلة الانحدار تفسر 97% من التغير الاجمالي في Y_t (انتاج القمح) أما النسبة الباقية 3% فهي لعوامل أخرى.

خلاصة:

مقدرات طريقة OLS هي الأفضل لأنها

- غير متحيزة *sans biais*
- مقدر كفؤ *efficace* له أصغر تباين (نظرية قوس ماركون).
- مقدر متسق (يقترب من القيمة الحقيقية) $\lim_{n\to\infty}(\hat{\alpha}\hat{\beta})$

5 معادلة وجدول تحليل التباين *ANOVA*

$$\sum(Y_t-\bar{Y})^2=\sum\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2+\sum Ut^2$$

$$\text{TSS}=\text{ESS}+\text{RSS}$$

لدينا

$$R^2=\frac{\sum(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}=1-\frac{\sum {U_t}^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}$$

جدول تحليل التباين

Source de vernation	*Somme des carrés*	*Degré de liberté*	*Carrés mayens*
X	$\text{ESS}=\sum\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2$	*1*	$\text{ESS}/1$
Résidu	$\text{RSS}=\sum {U_t}^2$	*n-2*	$\text{RSS}/(\text{n}-2)$
Total	$\text{TSS}=\sum(Y_t-\bar{Y})^2$	*n-1*	

درجة الحرية توافق عدد المتغيرات المستقلة

$$\begin{cases}H_0: b=0 & : \quad H_0:\text{ESS}=0\\ H_1: b\neq 0 & : \quad H_1:\text{ESS}\neq 0\end{cases}$$

X لا يفسر النموذج (ليس جزء من التفسير)

الاختبار هو اختبار فيشر

$$F_c=\frac{\frac{\text{ESS}}{k-1}}{\frac{\text{RSS}}{n-k}}=\frac{\frac{\sum(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2}{1}}{\frac{\sum {U_t}^2}{n-2}}=\frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-2}}\backsim F_r=F_{R-1,n-k}$$

نرفض H_0 عندما $F_c>F_t$ برهان التوزيع (*P35.RB*)

نلاحظ أن $F_c = \left(tc_{\widehat{\beta}}\right)^2 = \left(\frac{\hat{B}}{S_{\widehat{\beta}}}\right)^2 = \frac{\hat{B}^2}{\sigma_u^2/\sum(X_t-\bar{X})^2} = \frac{\hat{B}^2\sum(X_t-\bar{X})^2}{\sum Ut^2/(n-2)}$

6 التنبؤ في نموذج الانحدار الخطي البسيط:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t$$

لأجل الفترة $t+1$ $\quad \hat{Y}_{t+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_{t+1}$

فيكون: $U_{t+1} = Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1} \sim \left(0, \sigma_u^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2} + 1\right]\right)$

ولدينا: $\frac{\hat{\alpha}+\widehat{\beta}X_{t+1}-Y_{t+1}}{S_{ع}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(X_{t+1}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2}+1}} \sim T_{n-2}$

(S^2مقدر تباين البواقي)

ومنه مجال الثقة للقيم المتنبأ بها.:

$$Y_{t+1} = \hat{Y}_{t+1} \pm t_{n-2}^{1-\alpha/2} \qquad S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2} + 1}$$

تحليل الانحدار الخطي المتعدد

Analysée de l'agression Multiple

1 النموذج الخطي لثلاثة متغيرات:

نستخدم الانحدار الخطي المتعدد لاختيار الفرضيات عن علاقة بين متغير تابع Y واكثر من متغير مستقبل، مفسر لهدف التحليل والتنبؤ.

$$Y_t = b_0 + b_1X_{1t} + b_2X_{2t} + U_t$$
$$\hat{Y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1X_{1t} + \hat{b}_2X_{2t}$$

باستعمال طريقة OLS بإيجاد النهاية الصغرى لمجموع مربعات البواقي

$$\sum {U_t}^2 = \sum\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2 = \sum\left(Y_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1X_{1t} - \hat{b}_2X_{2t}\right)^2$$

$$\frac{\sigma \sum {U_t}^2}{\sigma b_0} = 0 \Rightarrow \sum Y_t = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_{1t} + \hat{b}_2 \sum X_{2t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\sigma \sum {U_t}^2}{\sigma b_1} = 0 \Rightarrow \sum X_{1t}Y_t = \hat{b}_0 \sum X_{1t} + \hat{b}_1 \sum {X_{1t}}^2 + \hat{b}_2 \sum X_{1t}X_{2t} \dots\dots (2)$$

$$\frac{\sigma \sum {U_t}^2}{\sigma b_2} = 0 \Rightarrow \sum X_{2t}Y_t = \hat{b}_0 \sum X_{2t} + \hat{b}_1 \sum X_{1t}X_{2t}\, \hat{b}_2 \sum {X_{2t}}^2 \dots\dots\dots (3)$$

لدينا ثلاث معادلات ثلاث مجاهيل يمكن حلها

$$\begin{array}{l|l} \hat{b}_1 = \frac{(\sum x_1y)(\sum x_2^2)-(\sum x_2y)(\sum x_1x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1x_2)^2} & \\ & \hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1\bar{X}_1 + \hat{b}_2\bar{X}_2 \\ \hat{b}_2 = \frac{(\sum x_2y)(\sum x_1^2)-(\sum x_1y)(\sum x_1x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1x_2)^2} & \end{array}$$

ولاختبار معنوية المعالم المقدرة فإن حساب التباين مطلوب:.

$$V\left(\hat{b}_1\right) = \sigma_U^2 . \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2}, \qquad V\left(\hat{b}_2\right) = \frac{\sigma_U^2 . \sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1x_2)^2}$$

عادة b_0 ليست محور اهتمام، σ_U^2 غير معروف نقدره بـ $S^2 = \frac{\sum {U_t}^2}{n-k}$

n: عدد المشاهدات

k: عدد المعالم المقررة.

2. معامل التحديد المصحح: يمكن تطوير علاقة معامل التحديد فنجد:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_t - Y)^2}{\sum {y_t}^2} = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{\sum {U_t}^2}{\sum {y_t}^2} = \frac{\hat{b}_1 \sum yx_1 + \hat{b}_2 \sum yx_2}{\sum {y_t}^2}$$

نلاحظ ان إضافة متغيرات مستقلة تعمل على رفع قيمة R^2 وعليه نستعمل معامل التحديد المعدل(المصحح)

coefficient de détermination ajustée $\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-R}$

3. **اختبار المعنوية الكلية للنموذج**: وهو نفس الاختبار السابق (تحليل التباين) يقيس نسبة التباين المفسر على التباين غير المفسر.

$$\begin{cases} H_0: b_1 = b_2 = 0 \quad , \ R^2 = 0 \\ H_1 \exists b_1 \neq 0 \qquad , \ R^2 \neq 0 \end{cases}$$

تمرين:استعمل المعلومات السابقة مع اضافة متغير آخر هو X_2: مبيد الحشرات

تقدير .اختبار t، اختبار F .المقارنة بين R^2 و $\bar{R}^2$.

α=0.05 F2,7,474 أيهما الأكثر تأثيرا؟

X_2:4 4 5 7 9 12 14 20 21 24

4 النموذج الخطي لـ k متغير Modelé linéaire a k Variables

لدينا النموذج التالي: $y_t = \sum_{j=1}^{k} B_j X_{jt} \qquad avec \begin{matrix} t = 1 - n \\ j = 1 - k \end{matrix}$

الذي يمكن كتابته على النحو $Y = XB + \varepsilon$

Y: شعاع المتغيرات الخارجية ذو بعد (n×1) n سطر 1 عمود

X: مصفوفة المتغيرات الداخلية المستقلة ذات بعد (n×k)

B: شعاع المعالم ذو بعد (k×1)

ε شعاع المتغير العشوائي أو البواقي بعده (n×1)

تحت فرضيات OLS

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0 \qquad \forall t = 1 \ldots \ldots \ldots n \\ E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \\ X: \quad \text{غير محتملة ومستقلة} \\ cov(\varepsilon_i x) = 0 \end{cases}$$

يمكن كتابة النموذج بالشكل التالي :

$$\begin{array}{ll} t=1 & Y_1=B_0+B_1X_{11}+B_2X_{12}+\cdots+B_kX_{1k}+\varepsilon_1 \\ t=2 & Y_2=B_0+B_1X_{21}+B_2X_{22}+\cdots+B_kX_{2k}+\varepsilon_2 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ t=n & Y_n=B_0+B_1X_{n1}+B_2X_{n2}+\cdots+B_kX_{nk}+\varepsilon_n \end{array}$$

يمكن كتابة النموذج في شكل هذا النظام

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \dots\dots\dots X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} \dots\dots\dots X_{2k} \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \dots\dots\dots X_{nk} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$Y = \qquad X \qquad B + \qquad \varepsilon$$

$$Y = XB + \varepsilon$$

نظريا النموذج المقدر هو $\hat{Y} = X\hat{B}$

إذا افترضنا بأن الشعاع $\hat{\beta}$ هو الشعاع المقدر للمعالم الحقيقية للشعاع b وحسب التعريف: $\varepsilon = Y - \hat{Y}$

نبحث في تصغير الفرق بين النموذج النظري الحقيقي المحسوب والنموذج الخطي المحسوب $\varepsilon = Y - \hat{Y}$

ونظرا لأنه لا يمكن التعامل مع الشعاع : نعتمد $\sum {U_t}^2 = \varepsilon'\varepsilon$

$$\varepsilon'\varepsilon = (Y - XB)'(Y - XB)$$

$$\varepsilon'\varepsilon = Y'Y - Y'XB - B'X'Y + B'X'XB$$

$$\frac{\sigma\varepsilon'\varepsilon}{\sigma B} = 0 \Rightarrow \quad -2X'Y + 2(X'X)B = 0 \Rightarrow \quad \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

يمكن كتابة النظام السابق في شكل مصفوفات

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1t} & \sum x_{2t} \dots\dots\dots \sum x_{kt} \\ \sum x_{1t} & \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t}x_{2t} \dots\dots\dots \sum x_{1t}x_{kt} \\ \sum x_{2t} & \sum x_{2t}x_{1t} & \sum x_{2t}^2 \dots\dots\dots \sum x_{2t}x_{kt} \\ & & \vdots \\ \sum x_{kt} & \sum x_{kt}x_{1t} & \sum x_{kt}x_{2t} \dots\dots\dots \sum x_{kt}^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{1t}y_t \\ \sum x_{2t}y_t \\ \vdots \\ \sum x_{nt}y_t \end{bmatrix}$$

والنموذج المقدر يكتب بالشكل

$$\hat{Y}_t = \hat{B}_0 + \hat{B}_1X_{1t} + \hat{B}_2X_{2t} + \cdots \hat{B}_kX_{kt} + et$$

حيث $et = y_t - \hat{y}_t$ (et البواقي) هناك فرق بين et و ε_t (الأخطاء).

حالة خاصة: إذا كنا نقدر انطلاقا من قيم ممركزة فإن تقدير شعاع $\hat{B}$ يعطى بلغة التباينات cov: كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \\ \vdots \\ \hat{B}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(x_1) & cov(x_1x_2) & cov(x_1x_3) \ldots cov(x_1x_k) \\ cov(x_2x_1) & V(x_2) & cov(x_2x_3) \ldots cov(x_2x_k) \\ cov(x_3x_1) & cov(x_3x_2) & V(x_3) \ldots \ldots cov(x_3x_k) \\ & \vdots & \\ cov(x_kx_1) & cov(x_kx_2) & cov(x_kx_3) \ldots \ldots V(x_k) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} cov(x_1y) \\ cov(x_2y) \\ cov(x_3y) \\ \vdots \\ cov(x_ky) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec: } \hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1\bar{X}_1 - \hat{B}_2\bar{X}_2 - \cdots - \hat{B}_k\bar{X}_k$$

5 تأثير تغير متغير مفسر واحد:

ليكن النموذج التالي $Y_t = \hat{B}_0 + \hat{B}_1\bar{X}_{1t} + \hat{B}_2\bar{X}_{2t} + \cdots + \hat{B}_R\bar{X}_{Rt} + et$

إذا تغير المتغير X_2 وانتقل من القيمة X_{2t} إلى($X_{2t}+\Delta X_{2t}$)كل الأشياء تبقى متساوية (k-1 متغير بقيم ثابتة) فإن المتغير التابع سيتغير بمقدار $\hat{B}_2\Delta X_{2t} = +\Delta\hat{Y}_t = \hat{B}_2\Delta X_2$

6 فرضيات وخصائص المقدرات لدينا في المحمل 8 فرضيات

فرضيات العشوائية:

H_1 : بدون أخطاء x :المشاهدات

H_2: $E(\varepsilon_t) = 0$ الأمل الرياضي للأخطاء معدوم

H_3: $E(\varepsilon_t^2) = \Delta_\varepsilon^2$ تباين الأخطاء ثابت (homoscédasticité)

H_4: $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0\forall i \neq$ الأخطاء غير مرتبطة مثنى مثنى (مستقلة)

H_5: $cov(\varepsilon_{it}X_i) = 0$ الأخطاء المستقلة عن المتغيرات المفسرة

فرضيات بنيوية:

H_6:($(X'X)^{-1}$ غياب ارتباط خطي بين المتغيرات (يوجد مصفوفة معاكسة)

H_7: $(X'X)/n$ تؤول إلى مصفوفة نهائية غير فردية

H_8: $n > k+1$ عدد المشاهدات أكبر من عدد المتغيرات المفسرة

خصائص المقدرات:

$$\left.\begin{array}{c} Y = XB + \varepsilon \\ Y = X\hat{B} + e \\ \hat{Y} = X\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow e = y - \hat{y} \qquad (e: \text{البواقي})$$

$$\hat{B} = (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}Y = (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}(XB+\varepsilon)$$

$$\hat{B} = (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}XB + (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}\varepsilon = B + (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}\varepsilon$$

d'ou $E(\hat{B}) = B + (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}E(\varepsilon) = \beta$

$E(\hat{B}) = \beta.\qquad \hat{B}\ E.\ Sd.\quad de\quad B$ مقدر غير متحيز

والأن نحسب مصفوفة التباين لمعاملات الانحدار $\Omega\hat{\beta}$

$$\Omega\hat{\beta} = E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right]$$

$$\hat{\beta}-\beta = (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}\varepsilon \qquad et \quad (\hat{\beta}-\beta)' = \acute{\varepsilon}X(\acute{X}X)^{-1}$$

d'ou $\Omega\hat{\beta} = (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}E(\acute{\varepsilon}\varepsilon)X(\acute{X}X)^{-1} \qquad avec: E(\acute{\varepsilon}\varepsilon) = \Omega\hat{\beta} = \Delta_\varepsilon^2 \mathrm{I}$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\acute{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2)\ldots\ldots E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2)\ldots\ldots E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ & \vdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_1)\ldots\ldots E(\varepsilon_n\varepsilon_n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0\ldots & \ldots & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

Soit $\Omega\hat{\beta} = \sigma_\varepsilon^2(\acute{X}X)^{-1}\acute{X}X(\acute{X}X)^{-1}\quad \Omega\hat{\beta} = \sigma_\varepsilon^2(\acute{X}X)^{-1}$

نلاحظ أن: $\Omega\hat{\beta} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\left(\frac{\acute{X}X}{n}\right)^{-1} \to Lim\,\Omega\hat{\beta} = 0 \quad si \quad n\to\infty$

من H_3 و H_7 فإن المقدر مقارب

نظرية قوس ماركوف Gauss Markov: مقدر OLS هو مقدر

BLUE (Best Linear Unbaised Estimator) أحسن مقدر غير متحيز ويعطي تباين أقل.

تعطى علاقة مقدر الأخطاء بالشكل التالي:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k-1} \to \Omega\hat{\beta} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2(\acute{X}X)^{-1}$$

نظرية *(Fwl) Frisch, Waugh et Lovell RB. P53*

معادلة تحليل التباين:

مثل الانحدار الخطي البسيط نجد $\sum et = 0 \qquad et: \quad \sum Y_t = \sum \hat{Y}_t \to \bar{Y} = \hat{Y}$

هذا يعطي: $\sum(Y_t-\bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2 + \sum et^2 = 0$

TSS = ESS + RSS

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{\sum(Y_t - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum et^2}{\sum(Y_t - \bar{Y})^2} \quad \Rightarrow R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = 1 - \frac{e'e}{Y'Y}$$

تعطى علاقة معامل التحديد المصحح (المعدل) $\overline{\mathrm{R}}^2$

$$\overline{\mathrm{R}}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1 - R^2)$$

مثال/ لدينا الجدول التالي :

ضع النموذج في شكل نظام مصفوفات.

قدر معالم النموذج.

أوجد مقدر تباين الأخطاء والانحراف المعياري المعاملات.

أوجد R^2 و $\overline{\mathrm{R}}^2$

t	Y	X_1	X_2	X_3
1	12	2	45	121
2	14	1	43	132
3	10	3	43	154
4	16	6	47	145
5	14	7	42	129
6	19	8	41	156
7	21	8	32	132
8	19	5	33	147
9	21	5	41	128
10	16	8	38	163
11	19	4	32	161
12	21	9	31	172
13	25	12	35	174
14	21	7	29	180

لدينا 14 مشاهدة

$$\mathrm{Y} = \mathrm{XB} + \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 10 \\ \vdots \\ 21 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 45 & 121 \\ 1 & 1 & 43 & 132 \\ 1 & 3 & 43 & 154 \\ & & \vdots & \\ 1 & 7 & 29 & 180 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_3 \end{bmatrix} \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_R \end{bmatrix}$$

تقدير المعالم/ $\hat{\beta} = (\acute{X}X)^{-1}\acute{X}X$

يحسب أولا $\acute{\mathrm{X}}\mathrm{X}$ ثم $(\acute{\mathrm{X}}\mathrm{X})^{-1}$

$$\underset{X'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ 2 & 1 & 3 & \dots 7 \\ 45 & 43 & 43 & \dots 29 \\ & \vdots & & \\ 121 & 132 & 154 & \dots 180 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 45 & 121 \\ 1 & 1 & 43 & 132 \\ 1 & 3 & 43 & 154 \\ & & \vdots & \\ 1 & 7 & 29 & 180 \end{bmatrix}} \underset{X'X}{\begin{bmatrix} 14 & 85 & 532 & 2094 \\ 85 & 631 & 3126 & 13132 \\ 532 & 3126 & 20666 & 78683 \\ 2094 & 13132 & 78683 & 317950 \end{bmatrix}}$$

$$(\acute{X}X)^{-1} = \begin{bmatrix} 20.16864 & 0.015065 & -0.23145 & -0.07617 \\ 0.015065 & 0.013204 & 0.001194 & -0.00094 \\ -0.23145 & 0.001194 & 0.003635 & 0.000575 \\ & & \vdots & \\ -0.07617 & -0.00094 & 0.000575 & 0.000401 \end{bmatrix}$$

نحسب X'Y

$$\underset{X'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ 2 & 1 & 3 & \dots 7 \\ 45 & 43 & 43 & \dots 29 \\ & & \vdots & \\ 121 & 132 & 154 & \dots 180 \end{bmatrix}} \underset{Y}{\begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 10 \\ \vdots \\ 21 \end{bmatrix}} = \underset{X'Y}{\begin{bmatrix} 248 \\ 1622 \\ 9202 \\ 37592 \end{bmatrix}}$$

ومنه نجد : $\hat{\beta} = \left(\acute{X}X\right)^{-1}\acute{X}Y$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 32.89132 \\ 0.801900 \\ -0.38136 \\ -0.03713 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} B_0 &= 32.89 \\ B_1 &= 0.80 \\ B_2 &= -0.38 \\ B_3 &= -0.03 \end{aligned}$$

لحساب $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ نوجد أولا $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-R-1}$

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

$$et = y_t - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \hat{\beta}_3 X_{2t}\right) =$$

$$Y_t - 32.89 - 0.80X_{1t} + 0.38X_{2t} + 0.03X_{2t}$$

$$e_1 = Y_1 - 32.89 - 0.80.2 + 0.38.45 + 0.03.121 = -0.84$$

t				
1	12	12.84	-0.84	0.71
2	14	12.39	1.61	2.58
3	10	13.18	-3.18	10.11
4	16	13.39	1.61	2.58
5	14	17.70	-3.70	13.67
6	19	17.88	1.12	1.26
7	21	22.20	-1.20	1.44
8	19	18.86	0.14	0.02
9	21	16.51	4.49	20.14
10	16	18.76	-2.76	7.63
11	19	17.92	1.08	1.17
12	21	21.90	-0.90	0.81
13	25	22.71	2.29	5.27
14	21	20.76	0.24	0.06
	$\sum$		0	67.45

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{e'e}{n-R-1} = \frac{\sum et^2}{14-3-1} = \frac{67.45}{10} = 6.745$$

$$\Omega_{\hat{B}} = 6.745 \times \begin{bmatrix} 20.17 & 0.015 & -0.23 & -0.076 \\ 0.015 & 0.013204 & 0.0012 & -0.0009 \\ -0.23 & 0.00119 & 0.0036 & 0.000575 \\ -0.076 & -0.0009 & 0.000575 & 0.000401 \end{bmatrix}$$

تباين في معاملات الانحدار نجدها في القطر

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}^2 = 6.745 \times 20.17 = 136.04 \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{B}_0} = 11.66$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}^2 = 6.745 \times 0.013 = 0.087 \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{B}_1} = 0.29$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_2}^2 = 6.745 \times 0.0036 = 0.024 \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{B}_2} = 0.15$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_3}^2 = 6.745 \times 0.0004 = 0.0026 \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{B}_3} = 0.05$$

حساب R^2: on a . $e'e = 67.45 \quad et \ \sum(Y_t - \bar{Y})^2 = 226.86$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum et^2}{\sum(Y_t - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{67.45}{226.86} = 0.702$$

$$R^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1 - R^2) = 1 - \frac{14-1}{14-4}(1 - 0.702) = 0.613$$

نلاحظ انخفاض في معامل التصحيح عندما نصححه بدرجات الحرية

مشاكل القياس الاقتصادي- اختراق فرضيات النموذج

Problèmes particuliers : la violation des hypothèses

يمكن ارجاع هذه المشكلات إلى إسقاط احدى فرضيات طريقة OLS وتلخص هذه المشاكل في:

– التعدد الخطي –الارتباط الذاتي للأخطاء – عدم ثبات التباين.

1. التعدد الخطي (الازدواج الخطي) Multicollineariter

تشير مشكلة التعدد الخطي إلى وجود ارتباط خطي بين عدد من المتغيرات المفسرة أي مصفوفة المشاهدات ذات رتبة k تامة.

أسبابه: كثيرة منها

- هناك اتجاه لجميع المتغيرات الاقتصادية للتغير مع مرور الزمن مثلا الدخل- الاستهلاك ، الادخار- الاستثمار المستوى العام للأسعار. حينها (يتحقق التعدد الخطي).
- عند استخدامنا لمتغيرات مستقلة ذات فترة إبطاء في النموذج وتكون هي مرتبطة بنفس القيمة الحالية (يتحقق التعدد الخطي). وهناك اسباب اخرى

آثاره وما يترتب عنه

- زيادة التباين المشترك للمقدرات بدرجة كبيرة دون التأثير على التنبؤات المستخرجة من الانحدار.
- القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون غير محددة وغير دقيقة.
- الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون كبيرة جدا.

أ –**اختبارات اكتشاف التعدد الخطي:** هناك كثير من الطرق منها:

- **طريقة التحليل الترافدي لـ Frisch**:

تكمن هذه الطريقة في انحدار المتغير التابع على كل متغير مستقل على حدا، ونحصل على كل الانحدارات الأولية ثم نختار الانحدار الأولى الذي يعطي نتائج أكثر مصداقية ثم نضيف تدريجيا متغيرات أخرى ونختبر آثارها على كل من المعالم الفردية (أخطائها المعيارية- قيمة R^2).

تحسين R^2 تغير معامل النموذج يعتبر مقبولا اما عدم التحسين وعدم التغير يرفض.

- **طريقة شرط الأعداد condition numbers**

$$\mathrm{Y_i} = B_0 + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + \varepsilon_i \qquad i = Tn$$

R_1^2 : معامل الارتباط بين Y, X_1

R_2^2 : معامل الارتباط بين Y, X_2

$$on\ a\begin{cases} V(\hat{B}_1) = \sigma_\varepsilon^2/\sum X_{1i}^2\,(1-R_1^2), \\ V(\hat{B}_2) = \sigma_\varepsilon^2/\sum X_{2i}^2\,(1-R_2^2), \\ COV(\hat{B}_1,\hat{B}_2) = \sigma^2R_1^2/\sum X_{1i}X_{2i}\,(1-R_1^2) \end{cases}$$

نعرف مقياس جديد "معامل تضخم التباين Variance Inflation Factor (VIF)"

$$(VIF) = 1/1-R_j^2 \Rightarrow \quad V(\hat{B}_j) = (\sigma_\varepsilon^2/\sum X_{ij}{}^2).VIF\,(\hat{B}_j)$$

- **طريقة Farrar- Glauber**:

أولا نحسب مصفوفة معاملات الارتباط

$$D = \begin{bmatrix} 1 & rX_1X_2 & rX_1X_3 \ldots\ldots\ldots rX_1X_R \\ rX_2X_1 & 1 & rX_2X_3 \ldots\ldots\ldots rX_2X_R \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ rX_RX_1 & rX_RX_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

عندما تكون قيمة المحدد تقترب من الصفر فإن هناك دليل على وجود تعدد خطي

ثانيا تستخدم اختبار χ^2
$$\begin{cases} H_0: D = 1 & (\text{استقلال خطي}) \\ H_1: D < 1 & (\text{ارتباط لخطي}) \end{cases}$$

احصاءه FG (المسحوبة) تعرف كما يلي : $\chi_c^2 = -\left[n-1-\frac{1}{6}-(2k+7)\right].LnD$

N حجم العينة R عدد المتغيرات المفسرة Ln لو D المحدد.

χ_c^2 تقارن بالمجدولة في توزيع كاي دو $\chi^2_{\frac{1}{2}k(k+1)}$

ب الحلول

- إيجاد مصادر أخرى للبيانات.
- اهمال وجوده في النموذج بتوسيع العينة.

- حذف المتغير المسبب.

2. الارتباط الذاتي للأخطاء

عند اسقاطنا لفرض عدم الارتباط الأخطاء $COV\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = o \quad \forall i \neq j$ يدل على وجود لارتباط الذاتي حيث أن التباينات المشتركة $E(\varepsilon\acute{\varepsilon}) = \Omega_\varepsilon \neq \sigma_\varepsilon^2 I$ (لا يحتوي على الصفر خارج القطر)

$$\Omega_\beta = E\left[\left(\hat{\beta}-\beta\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right] = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\acute{\varepsilon})X(X'X)^{-1} =$$
$$(X'X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon X)(X'X)^{-1} \neq \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$$

يتم استعمال طريقة المربعات الصغرى المعممة GLS لتقدير $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (X'\Omega_\varepsilon X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon X)$$
$$\Omega_{\hat{\beta}} = (X'\Omega_\varepsilon X)^{-1}$$

أسبابه:

- اهمال بعض المتغيرات المفسرة في النموذج المراد تقديره.
- الصياغة الرياضية الخاطئة للنموذج.
- عدم دقة بيانات السلسلة الزمنية.

أثاره:

- القيم المقدرة لمعاملات النموذج تكون متحيزة.
- تباين المقدرات لن يكون الأصغر.

اختبارات وطرق اكتشافه:

أ –اختبار دربين واتسون DW ، *Durbin-Watson*

يعتبر من أفضل الاختبارات لاكتشاف الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + U_t, \qquad U_t \sim N(O, \sigma_u^2)$$

صياغة الاختبار:

$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$$

حساب DW

$$DW = \frac{\sum(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum \hat{\varepsilon}_{t-1}^2} = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^2 + \sum \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - 2\sum \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

نلاحظ أن: $\sum \varepsilon_t^2 \cong \sum \varepsilon_{t-1}^2$

فتكون $$DW = \frac{2\sum\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum\hat{\varepsilon}_{t-1}^2} - \frac{2\sum\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum\hat{\varepsilon}_{t-1}}$$

ولدينا $$\hat{\rho} = \frac{\sum\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$ فيكون $$DW = 2(1-\hat{\rho})$$

مناطق القبول والرفض للاختبار DW

0 P>0	dL ? du	P=0 2 P=0	4-du ?	4-dL P<0 4
ارتباط ذاتي موجب رفض H_0	شك	عدم وجود ارتباط قبول H_0	شك	ارتباط ذاتي سالب رفض H_0

ملاحظات مهمة : شروط واجب توفرها لحساب الاحصاءة DW :

- نحسب DW في وجود B_0.(حد ثابت).
- تحسب الاحصاءة في عدم وجود متغيرات مفسرة ذات فترة إبطاء.
- المشاهدات تفوق 16.
- DW تعبر عن الارتباط من الدرجة الأولى.

طرق التقدير في وجود الارتباط الذاتي للاخطاء:

يتم تصحيح المشاهدات بالنظر للمعامل ρ او تصحيح النموذج بادراج $AR(1)$او ...

$$Y = XB + \varepsilon$$:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + U_t \qquad |\rho| < 1 \qquad AR(1)$$

3. عدم تجانس تباين الأخطاء Heteroscedasticitér

في وجود عدم تجانس تباين الأخطاء نكتب مصفوفة التباين– التباين المشترك كما يلي :

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\acute{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 \dots 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ تباينات الأخطاء ليست ثابتة على القطر وهي مرتبطة بقيم المتغير المستقل

أثاره:

- مقدرات OLS عدم متحيزة متسقة لكن ليست كفؤة.
- التباينات المقدرة (VA-COR) الخاصة بالمعالم المقدرة متحيزة وغير متسقة.

- التنبؤات تكون أقل مصداقية.

عكس تصحيح النموذج من الارتباط الذاتي لا توجد منهجية موحدة للتصحيح من عدم ثبات تباين الأخطاء فالطرق مختلفة مرتبطة بسبب وجود المشكل.

ا اختبارات وطرق اكتشاف عدم تباين الأخطاء.

أ. اختبار Goldfeld – Quandt

لدينا النموذج التالي: $i = \overline{in}$ $\qquad Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_i$

منهجية اختبار G-Q:

- ترتيب مشاهدات X ترتيبا تصاعديا.
- استبعاد المشاهدات الوسطى لكل من X و Y ثم نكون مجموعتين من المشاهدات.

المجموعة الأولى: مشاهدات X و Y الواردة قبل المشاهدات التي استبعدت $Y_{1\mathrm{i}} = a_{1i} + bX_{1i} + \varepsilon_i$

المجموعة الثانية: مشاهدات X و Y الواردة بعد المشاهدات التي استبعدت $Y_{2\mathrm{i}} = c + bX_{2i} + \varepsilon_{2i}$

- تقدير $\hat{Y}_{1\mathrm{i}} = \hat{\alpha} + \hat{b}X_{1i}$، حساب $\hat{\varepsilon}_{1\mathrm{i}} = Y_{1i} - \hat{Y}_{1i}$

  $\hat{Y}_{2\mathrm{i}} = \hat{c} + \hat{b}X_{2i}$، حساب $\hat{\varepsilon}_{2\mathrm{i}} = Y_{2i} - \hat{Y}_{2i}$

- إيجاد Fc $\qquad Fc = \dfrac{\sum \hat{\varepsilon}_{2i}^2}{\sum \hat{\varepsilon}_{1i}^2}$

  درجات الحرية $DF = \dfrac{n-m-2(R+1)}{2}$ $\leftarrow k$ متغيرات المستقلة m: المشاهدات المبعدة

  إيجاد Ft والمقارنة مع Fc نرفض H_0 إذا كان Fc>Ft وجود عدم ثبات التباين.

ب. إختبار White:

اقترح White اختبارا يعتمد على العلاقة بين مربعات البواقي وجميع المتغيرات المستقلة وكذا مربعاتها ،وخطواته:

- تقدير النموذج العام $Y = XB + \varepsilon$ بـ OLS وحساب $\hat{\varepsilon}_t^2$.
- تقدير المعالجة الوسطية التالية: $\hat{\varepsilon}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \alpha_1 X_{t1}^2 + \cdots + \beta_k X_{tk} + \alpha X_{t1}^2 + U_{t1}$

حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2

- فرضية ثبات الأخطاء H_0: $H_0 = \beta_0 = \alpha_1 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_k = 0$

إحصاءه مضاعف لأغرانج $LM = n \times R^2$ تتوزع χ^2 بدرجة حرية 2R

هناك معامل واحد على الأقل يختلف عن الصفر: $LM = n \times R^2 > \chi^2_{2R}$ Rejeté H_0

فإن تباين الأخطاء غير متجانس.

ج. اختبار ثبات التباين الشرطي للأخطاء ARCH-LM

تسمح نماذج ARCH بنمذجة المتغيرات المالية التي تحتوي على تباين شرطي غير ثابت للأخطاء العشوائية وخطواته:

- تقدير النموذج $Y = XB + \varepsilon$ بـ OLS ثم حساب $\hat{\varepsilon}_t^2$
- تقدير المعادلة التالية: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \theta_0 + \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \theta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + U_t$

مع حساب R^2 ونفقد في هذه الحالة q مشاهدة.

- فرضية ثبات التباين الشرطي للأخطاء H_0 $\quad H_0 = \theta_0 = \theta_1 \; .. \quad \theta_q = 0$

إحصاءه مضاعف لاغرانج: $LM = (n-q) \times R^2 \leftarrow \chi_q^2$ (q درجة حرية)

نرفض H_0 عندما $(n-q) \times R^2 > \chi_q^2$

واستخدمت معاملات ARCH وجود تباين شرطي للأخطاء غير متجانس.

ب معالجة عدم ثبات تباين حد الخطأ:

من أبرز الطرق المستخدمة لتصحيح المشكلة هي طريقة المربعات الصغرى المرجحة وهي إعطاء القيم ذات الانحراف الأقل على خط الانحدار اوزانا أكبر من القيم ذات الانحراف الأكبر في تقدير العلاقة محل الاعتبار ويتوقف تشكل النموذج الأصلي المحول على نمط عدم ثبات التباين المكتشف في النموذج الأصلي المقدر.

إذا كان لدينا النموذج التالي: $i = \overline{1\,n}$ $\quad Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

هناك عدة أنماط (افتراضات) لعدم ثبات تباين الأخطاء.

أ -الافتراض الأول: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i^2$ وعليه يحول النموذج الأصلي إلى :

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{B_0}{X_i} + B_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_i} = B_0 \times \frac{1}{X_i} + B_1 + \theta_i$$

حيث θ_i عبارة عن حد الخطأ المحول $\frac{\varepsilon_i}{X_i}$ وبإجراء إنحدار $\frac{Y_i}{X_i}$ على $\frac{1}{X_i}$ مستخدما طريقة المربعات الصغرى العادية

نحصل على: $\left(\frac{\hat{Y}_i}{X_i}\right) = \hat{B}_0 \times \frac{1}{X_i} + B_1$

وبضرب المعادلة السابقة في σ_i نتحصل على النموذج الأصلي وبعد معالجة عدم ثبات التباين σ_ε^2 نجد ميل الأول هو الحد الثابت في الثاني والعكس بالعكس.

ب -الافتراض الثاني: $E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma^2 X_i$ وعليه يحول النموذج إلى :

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{B_0}{\sqrt{X_i}} + B_1\sqrt{X_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}} = B_0 \times \frac{1}{\sqrt{X_i}} + B_1\sqrt{X_i} + w_i$$

$$X_i>0 \quad w_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}}$$

وبنفس الطريقة يجرى انحدار $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$ على $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$ و $\sqrt{X_i}$ بواسطة OLS

ج -الافتراض الثالث : $E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma^2 Y_i^2$ وعليه

$$\frac{Y_i}{Y_i} = \frac{B_0}{Y_i} + B_i\frac{X_i}{Y_i} + \frac{\varepsilon_i}{X_i} = B_0 \times \frac{1}{Y_i} + B_i\frac{X_i}{Y_i} + Q$$

د -الافتراض الرابع: $E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma^2|\varepsilon_i|$ وعليه (تباين حد الخطأ دالة خطية لبواقي طريقة OLS)

$$\frac{Y_i}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}} = B_0\frac{Y_i}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}} + B_1\frac{X_i}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}}$$

هـ -الافتراض الخامس: التحويلية اللوغراتمية تعمل على تحليل درجة عدم ثبات الأخطاء

$$Ln\, Y_1 = \beta_0 + \beta_1 LnX_i + \varepsilon_i$$

النماذج غير الخطية

Les Modelés Non linéaires

كل ما استخدمناه سابقا مرجعه الأساسي وفرض الأول وجود علاقة خطية بين متغير تابع ومتغير أو أكثر مفسر وسوف نتطرق في هذا المحور إلى النماذج غير الخطية والتي تهتم بقياس العلاقة غير الخطية بين متغير تابع وأخرى مفسرة ويمكن استخدام محول: بوكس-كوكس Box –Cox Transation نفترض وجود علامة بين Y و X كما يلي:

$$Y^{\lambda 1} = \alpha_0 + bX^{\lambda 2} + V$$

بحيث:

$$Y^{\lambda 1} = \begin{cases} \frac{Y^{\lambda 1}-1}{\lambda 1} & pour \quad \lambda 1 \neq 0 \\ Ln\, Y & pour \quad \lambda 1 = 0 \end{cases} \qquad X^{\lambda 2} = \begin{cases} \frac{X^{\lambda 2}-1}{\lambda 2} & pour \quad \lambda 2 \neq 0 \\ Ln\, X & pour \quad \lambda 2 = 0 \end{cases}$$

أي في وجود هذه الأنواع من العلاقات غير الخطية نستخدم.

1 - العلاقة اللوغارتمية المزدوجة Double- Log
2 - العلاقة شبه اللوغارتمية Semi log
3 - علاقة التحويل لمقلوب Reciprocal Transformation
4 - علاقة لوغاريتم – مقلوب Log- inverse

1 -اللوغارتم المزدوج: إذا كانت لدينا علاقة من الشكل:

$$Y=AX^{b}\, e^{u}$$

ندخل اللوغاريتم لنحصل على: $Ln\, Y=Ln\, A+b\, LnX+u$

نفترض وجود متغيرات أخرى حتى تصبح المعادلة

$$Y'=\alpha'+bX'+u \qquad avec \quad Ln\, Y=Y' \qquad Ln\, A=\alpha' \qquad Ln\, X=X'$$

وعندها يصبح النموذج خطي (مشكل لمعادلة مستقيم يمكن تقديره OLS) ونستخدم النموذج السابق في دراسة العلاقة بين الطلب وسعر السلعة مثلا.

كما يمكن تطبيق التقنية السابقة على دالة الانتاج لكوب دوقلاس: $Q=\alpha_0\, K^{\alpha}\, L^{\alpha 2}$

2 -شبه اللوغارايتم:

حالة اولى : إذا كان لدينا النموذج $Y=e^{(\alpha+bx+u)}$

وبإدخال اللوغاريتم نجد أن $\text{Ln } Y= \alpha+bx+u$

عادة نستخدم هذه النماذج في تقدير العلاقة بين متغيرين يكون المستقبل منهما متغير مطلقا وينجر عنه تغيير نسبي ثابت في المتغير التابع، مثلا نمو الصادرات والدخل عبر الزمن.

حالة ثانية: لدينا النموذج التالي: $e^Y=\alpha_1 X^b e^u$

عند إدخال اللوغاريتم نجد $Y= \alpha_1+b \text{ Ln } X+u$

مثلا دراسة دالة الاستهلاك غير الخطية .

ويظهر في النموذجين Ln في طرف واحد للمعادلة وبها تسمى شببة اللوغاريتم.

3 -تحويل لمقلوب:

أحيانا نجد أنفسنا أمام العلاقة التالية: $Y=\alpha+b(1/X)+u$

ويستخدم هذا في دراسة منحنى فليبس (العلاقة بين التضخم والبطالة).

4 -اللوغاريتم – مقلوب

إذا كانت لدينا العلاقة التالية: $Y = e^{(\alpha+b\frac{1}{x}+u)}$

وبعد إدخال اللوغاريتم نجد$\text{Lu } Y=\alpha+b(1/X)+u$

مثلا تقدير العلاقة بين المبيعات والاعلان

5 مثال عملي :

: دالة الانتاج لـ Cobb- Douglas: "RB" $Q=\alpha_0 K^{\alpha 1} L^{\alpha 2}$

تفسير $\alpha 1$ و $\alpha 2$ فهما مرونة إنتاج معامل رأس المال ومرونة انتاج معامل العمل $Q=\alpha_0 K^{\alpha 1} L^{\alpha 2}$

$$LnQ = Ln\alpha_0+\alpha_1 LnK+\alpha_2 LnL$$
$$LQ=a_0+\alpha_1 LK+\alpha_2 LL$$

$$\left| \begin{array}{l} LQ = LnQ \\ LK = LnK \quad a_0 = Ln\alpha_0 \\ LL = LnK \end{array} \right.$$

بعد التقدير وجدنا: $LQ=1.084+0.638LK+0.254LL$

$$(19.05)\ (17.99)\quad (9.29)$$

$$R^2=0.938 \qquad Fc=168.6$$

ملاحظة: إحصاءه DW لا تشرح في نموذج ذو بيانات آنية.

α_2=0.25 و α_1=0.64

إذا ارتفع معامل رأس المال بـ 10% الانتاج يزيد بـ 6.4%

إذا ارتفع معامل العمل بـ 10% الانتاج يزيد بـ 2.5%

الحد الثابت $10^{\alpha 0}=12.13$ ou $\alpha_0=e^{\alpha 0}$

دالة الانتاج المقدرة تعطى بالعلاقة التالية $\hat{Q} = 12.13K^{0.64}L^{0.25}$

إذا كان $\alpha_2+\alpha_1<1$ زيادة الانتاج بأقل من الزيادة في عوامل الانتاج.

إذا كان $\alpha_1+\alpha_2=1$ زيادة الانتاج تواكب الزيادة في عوامل الانتاج.

إذا كان $\alpha_1+\alpha>1$ زيادة الانتاج أسرع وأكبر من الزيادة في عوامل الانتاج.