



جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية التكنولوجيا
قسم : هندسة الطرائق والبتروكيمياء



Cours + TD :

MILIEU POREUX ET DISPERSÉS (MPD)

(Collection Version 1.0)

2^{ème} Année Master Génie Chimique

2021/2022

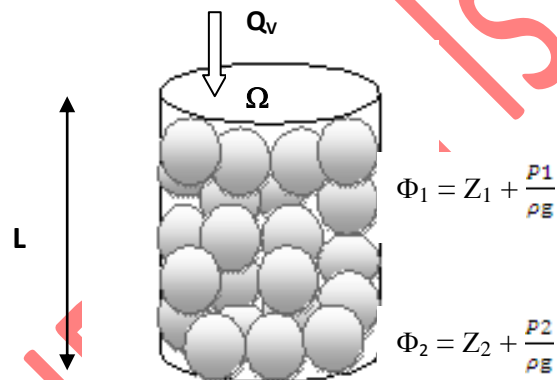
Dr BOUDOUH ISSAM

III- ECOULEMENT D'UN SEUL FLUIDES A TRAVERS UN MILIEU POREUX

Dans de nombreuses opérations industrielles un fluide s'écoule à travers une couche de particule solide (catalyseur, garnissage) ces milieux poreux sont généralement le siège de transfert de matière pour avoir une réaction chimique ou bien séparateur des produits. On trouve leur application dans les opérations suivantes:

- Purification des fluides sur un lit adsorbant (**Adsorption**).
- Fractionnement des vapeurs organiques (**Cracking**).
- Réaction chimique (**Catalyseur**).

III.1- LOIS EXPERIMENTALE DE DARCY



Soit une conduite de section (Ω) contenant un lit poreux de hauteur L à travers lequel circule un débit Q_v de viscosité μ . DARCY a observé que le débit volumique est proportionnelle à la section de la conduite et à la différence entre les hauteurs piézométriques et inversement proportionnelle à la hauteur de la conduite c.-à-d :

$$Q_v = \beta_0 \frac{\Omega \Delta \Phi}{L}$$

Avec : β_0 : coefficient de proportionnalité appelé « conductivité hydraulique ou perméabilité ».

Ω : Section droite de la colonne [m^2].

Φ : Hauteur piézométrique [m].

$$\Phi_i = Z_i + \frac{P_i}{\rho g}$$

$$U_F = \frac{Q_V}{\Omega} = \frac{\beta_0 \Delta\Phi}{L}$$

Où : $U_F = U_0$: vitesse superficielle de fluide.

U_i : Vitesse interstitielle ou réelle.

$$U_F = \varepsilon \cdot U_0$$

Remarque: Dans la loi de DARCY la vitesse est très faible (Régime Laminaire).

III.1.1- Conductivité hydraulique ou perméabilité (β_0)

La perméabilité β_0 c'est la facilité dans lequel un fluide peut être transporté à travers l'espace vide, il est donc un coefficient qui dépend d'une part par les propriétés du fluide (ρ, μ) et d'autre part par la distribution granulométrique.

$$\beta_0 = k \cdot \frac{\rho g}{\mu}$$

β_0 : Perméabilité [Darcy]

$$1 \text{ Darcy} = 0,987 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$$

K : Constante en [m²]

g : Accélération de la gravité [m/s²].

μ_F : Viscosité dynamique de fluide [Pa · s]

ρ_F : Masse volumique de fluide [Kg/m³]

$$Q_V = \beta_0 \frac{\Omega \cdot \Delta\Phi}{L} = K \cdot \frac{\rho_F \cdot g}{\mu_F} \cdot \frac{\Omega \cdot \Delta\Phi}{L} \Rightarrow \frac{Q_V}{\Omega} = \frac{K \cdot \rho_F \cdot g}{\mu_F \cdot L} \cdot \left(\Delta Z + \frac{\Delta P}{\rho_F \cdot g} \right)$$

ΔP : pression motrice.

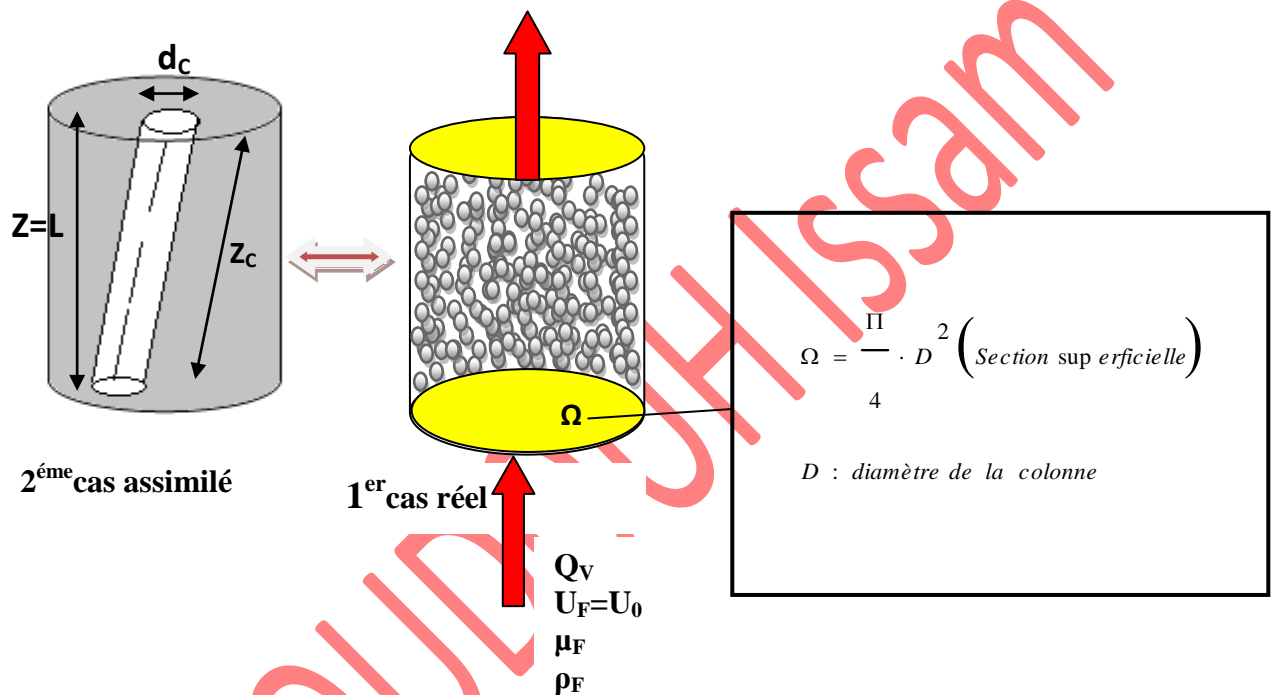
$$U_F = \frac{Q_V}{\Omega} = \frac{\beta_0}{\mu_F} \cdot \frac{\Delta P}{Z}$$

$$\text{Equation générale : } \vec{U}_F = \frac{-\beta_0}{\mu_F} \cdot \vec{\text{grad}}(P)$$

III.2- LES MODELES REPRESENTATIFS DU MPD**III.2.1- Modèle de Kozeny-Carman (Régime Laminaire, $Re < 10$)**

Le Milieu Poreux assimilé a un faisceau de pores cylindriques (un capillaire) ce qui permet d'utiliser l'équation de **POISEUILLE**.

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{128 \cdot \mu_F \cdot Q_V}{\pi \cdot d_C^4}$$



μ_F : Viscosité dynamique de fluide [Pa . s]

d_c : Diamètre du tube capillaire.

L : longueur de la couche du Milieu Poreux (MP).

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{128 \cdot \mu_F \cdot \Omega \cdot U_F}{\pi \cdot d_C^4} = \frac{128 \cdot \mu_F \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_C^2}{4} \right) \cdot U_F}{\pi \cdot d_C^4}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{32 \cdot \mu_F \cdot U_F}{d_C^2} \quad \text{Pour le système réel (1er cas)}$$

Alors pour le 2^{ème} cas on applique la loi de **POISEUILLE** aux pores de diamètre d_c et de longueur Z_c avec un coefficient de correction de non linéarité appelé (γ) :

$$\frac{\Delta P}{Z_C} = \frac{32 \cdot \gamma \cdot \mu_F \cdot U_C}{d_C^2}$$

Avec : γ : Facteur de correction ($\gamma = 1 \pm 0,15$)

d_C : Diamètre du tube capillaire

Z_C : Longueur du tube capillaire ($Z_C \geq Z$)

Z : Longueur de la couche du MP ($Z = L$)

U_C : Vitesse de fluide au niveau du tube capillaire

$$\cos(\alpha) = \frac{Z}{Z_C} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot Z = T \cdot Z$$

$$Z_C = T \cdot Z$$

T : Coefficient de tortuosité $\left(T = \frac{1}{\cos(\alpha)} \right)$

Pour calculer $\left(\frac{\Delta P}{Z} \right)$ Perte de charge sur longueur de MP, il faut déterminer $d_C = ?$; $U_C = ?$

Pour déterminer d_C le modèle repose sur 2 hypothèses importantes.

❖ **1^{er} hypothèse** : Le volume poreux du milieu réel = le volume des nombre des tube capillaires (N_C).

$$V_{\text{vide}} = N_C \cdot V_C$$

$$\varepsilon \cdot V_T = N_C \cdot \frac{\pi \cdot d_C^2}{4} \cdot Z_C \dots \dots \dots (1)$$

❖ **2^{ème} hypothèse** : La surface interne (mouillée) du milieu réel est la même de N_C des tubes capillaires.

$$A_{\text{réel}} = N_C \cdot A_C = N_C \cdot \pi \cdot d_C \cdot Z_C \dots \dots \dots (2)$$

$$(1)/(2) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon \cdot V_T}{A_{\text{réel}}} = \frac{N_C \cdot \frac{\pi \cdot d_C^2}{4} \cdot Z_C}{N_C \cdot \pi \cdot d_C \cdot Z_C} = \frac{d_C}{4}$$

$$d_C = \frac{4\varepsilon \cdot V_T}{A_{\text{réel}}} = \frac{4\varepsilon}{\frac{A_{\text{réel}}}{V_T}} = \frac{4\varepsilon}{a_{\text{lit}}}$$

$$d_c = \frac{4\varepsilon}{a_p \cdot (1 - \varepsilon)}$$

- Pour calculer U_C on a : Q_v (système réel) = Q_v (système assimilé)

THEOREME DE DUPUIT : $\Omega\varepsilon = N_C \cdot \Omega_C \cdot T$

$$\Omega \cdot U_F = (N_C \cdot \Omega_C) \cdot U_C \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Omega\varepsilon = N_C \cdot \Omega_C \cdot T \implies N_C \cdot \Omega_C = \Omega\varepsilon / T \quad \dots\dots\dots (2)$$

En remplace **2** dans **1** $V_s = (\Omega\varepsilon / T) \cdot V_{mp}$

$$U_C = (U_F \cdot T) / \varepsilon$$

$$\text{D'après (2) on a : } N_C = \frac{A}{\pi \cdot dR \cdot Z_C} \quad ; A = ?$$

Et d'après (3) on a : $A = V_T \frac{4\varepsilon}{d_c}$ on obtient :

$$N_C = \frac{4\varepsilon \cdot V_T}{\pi dR^2 \cdot Z_C} = \frac{4\varepsilon \cdot V_T}{\pi dR^2 \cdot T \cdot Z}$$

Revenant à l'équation du système assimilé.

$$\frac{\Delta P}{Z} = \frac{32 \cdot \mu_F \cdot U_C \cdot \gamma}{d_p^2}$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = \frac{32 \cdot \mu_F \cdot U_C \cdot \gamma}{16\varepsilon^2 \cdot (1 - \varepsilon)^2} \cdot \frac{U_F \cdot T}{\varepsilon}$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = \frac{2 \cdot \mu_F \cdot \gamma \cdot a_p^2 \cdot (1 - \varepsilon)^2 \cdot U_F \cdot T}{\varepsilon^3}$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = 2 \cdot \gamma \cdot T^2 \cdot \frac{\mu_F \cdot a_p^2 \cdot (1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot U_F$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = h_{K-C} \cdot \frac{\mu_F \cdot a_p^2 \cdot (1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot U_F \quad \text{Equation de Kozeny- Carman en régime laminaire (RL).}$$

Avec : $h_{K-C} = 4,5 \pm 1$: Constante de Kozeny_Carman

II.2.2- Modèle de Burke-Plummer (Régime Turbulent, $Re > 10$)

Le modèle suppose que l'axe de chaque pore cylindrique est une ligne brisée dans lequel une certaine fraction d'énergie cinétique du fluide est convertie en chaleur.

La chute de la pression par glissement visqueux sur la paroi des pores représente par

$$\text{l'équation: } \Delta P = \beta \cdot N_C \cdot \frac{\rho_F}{2} \cdot U_C^2$$

β : Coefficient de proportionnalité (fraction de l'énergie cinétique du fluide);

λ : Nombre des coudes;

N_C : Nombre de tubes Capillaires.

$$\Delta P = \beta \cdot \frac{Z_C}{\lambda \cdot d_C} \cdot \frac{\rho_F}{2} \cdot U_C^2 ; \quad \text{Trouvez : } \frac{\Delta P}{Z} = ?$$

Après le remplacement de Z_C , U_C , et d_C : on obtient :

$$\Delta P = \beta \cdot \frac{T \cdot Z}{\lambda \cdot \frac{4\varepsilon}{a_p(1-\varepsilon)}} \cdot \frac{\rho_F}{2} \cdot \frac{U_F^2 \cdot T^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{\Delta P}{Z} = \beta \cdot \frac{T}{\lambda \cdot \frac{4\varepsilon}{a_p(1-\varepsilon)}} \cdot \frac{\rho_F}{2} \cdot \frac{U_F^2 \cdot T^2}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = \beta \cdot \frac{T^3}{8\lambda} \cdot \rho_F \cdot a_p \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot U_F^2$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = h_{B-P} \cdot \rho_F \cdot a_p \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot U_F^2 \quad \text{Equation de Burke-Plummer en régime turbulent (RT).}$$

Avec : $h_{B-P} = 0,3 \pm 0,1$: Constante de Burke-Plummer.

III.2.3- Modèle d'Ergun

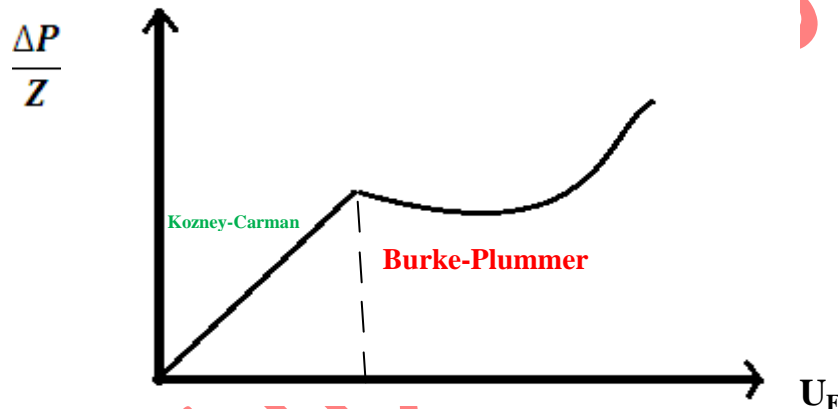
Ergun a additionné les relations de Kozeny-Carman et de Burke-Plummer pour rendre compte de l'ensemble domaine des régions d'écoulement (RL + RT).

$$\frac{\Delta P}{Z} = \underbrace{h_{K-C} \cdot \frac{\mu_F \cdot a_p^2 \cdot (1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot U_F}_{\text{RL}} + \underbrace{h_{B-P} \cdot \rho_F \cdot a_p \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot U_F^2}_{\text{RT}}$$

On a aussi une autre forme de l'équation d'Ergun en fonction de diamètre équivalent :

$$a_p = \frac{6}{d_a}; \text{ où } d_a : \text{Diamètre équivalent de la particule par rapport à la surface spécifique.}$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = 150 \cdot \frac{\mu_F \cdot (1-\varepsilon)^2}{d_a^2 \cdot \varepsilon^3} \cdot U_F + 1,75 \cdot \rho_F \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{d_a \cdot \varepsilon^3} \cdot U_F^2$$



Remarque: La relation d'Ergun rend compte non seulement de la chute de pression dans les lits poreux fixe ; mais aussi à la chute de pression dans les lits libre exemple : lit fluidisé.

Application :

Des vapeurs hydrocarbures sont craqués dans un réacteur catalytique constitué d'un garnissage ou les grains de forme cubique de cote $a=0,5\text{cm}$; $\rho_s = 500\text{kg/m}^3$, $\rho_{lit} = 300\text{kg/m}^3$. La section droite du réacteur est 1m^2 et la couche du catalyseur à une profondeur de $1,8\text{m}$.

1°/ Calculer le volume V_p ; la surface A_p et la surface spécifique a_p .

2°/ Calculer les diamètres des sphères équivalentes d_v , d_A , d_g .

3°/ Démontrer que : $\Psi_a \cdot \Psi_A^2 = 1$ et $\Psi_v^3 \cdot \Psi_A^2 = 1$

4°/ Calculer les pertes de charge subit au passage d'un gaz à travers la couche ou $V_s = 0,9\text{m/s}$.

Avec : $\rho_f = 0,14 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,015 \cdot 10^3 \text{ kg/s.m}$

Solution:

1°/ Calcul de A_p , V_p , a_p :

$$A_p = 6a^2 = 6(0,5 \cdot 10^{-2})^2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$V_p = a^3 = (0,5 \cdot 10^{-2})^3 = 0,125 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$a_p = \frac{A_p}{V_p} = \frac{6}{a} = 12 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$$

2°/ Calcule de d_v , d_A , d_a

$$\bullet \quad d_v = \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} a^3 = a^3 \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\bullet \quad d_A = \sqrt{\frac{A_p}{\pi}} = \sqrt{\frac{6a^2}{\pi}} = a \sqrt{\frac{6}{\pi}} = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\bullet \quad d_a = \frac{d_v^3}{d_A^2} = a = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

3°/ Démonstration : $\Psi_g \cdot \Psi_A^2 = 1$ et $\Psi_v^3 \cdot \Psi_A^2 = 1$

$$1^\circ / \Psi_a = \frac{\text{volumedusphèreayantmemesurfacespécifique que la particule}}{\text{volumedeparticule}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{6} d_g^3}{V_p} = \frac{\frac{\pi}{6} a^3}{a^3} = \frac{\pi}{6}$$

$$2^\circ / \Psi_A = \frac{\text{volumedusphèreayantmemesurface que la particule}}{\text{volumedelaparticule}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{6} d_A^3}{V_p} = \frac{\frac{\pi}{6} (a \sqrt{\frac{6}{\pi}})^3}{a^3} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$\text{Alors : } \Psi_a \cdot \Psi_A^2 = \frac{\pi}{6} \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)^2 = 1.$$

$$3^{\circ} \Psi_V = \frac{\text{surface de la sphère ayant le même volume que la particule}}{\text{surface de la particule}}$$

$$= \frac{\pi d_V^2}{A_p} = \frac{\pi \left(a \sqrt{\frac{6}{\pi}} \right)^2}{6a^2} = \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/3}$$

$$\Psi_V^3 \cdot \Psi_A^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \right)^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} \right)^2 = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{6}{\pi} = 1$$

$$4^{\circ} \text{ Calcul de } \left(\frac{\Delta P}{Z} \right):$$

$$Re_p = ? \quad R_e = \frac{\rho_F \cdot U_F \cdot d_a}{\mu_F \cdot (1 - \varepsilon)} ; \quad \varepsilon = ? \text{ (Taux de vide = Porosité)}$$

masse Totale de lit (m_T) = masse de fluide (m_f) + masse de solide (m_s) : $m_T = m_f + m_s$

$$\rho_T \cdot V_T = \rho_f \cdot V_f + \rho_s \cdot V_s$$

$$\rho_{lit} \cdot V_T = \rho_s (1 - \varepsilon) \cdot V_T + \rho_f \cdot \varepsilon \cdot V_T \quad \Rightarrow \varepsilon = \frac{\rho_{lit} - \rho_s}{\rho_f - \rho_s}$$

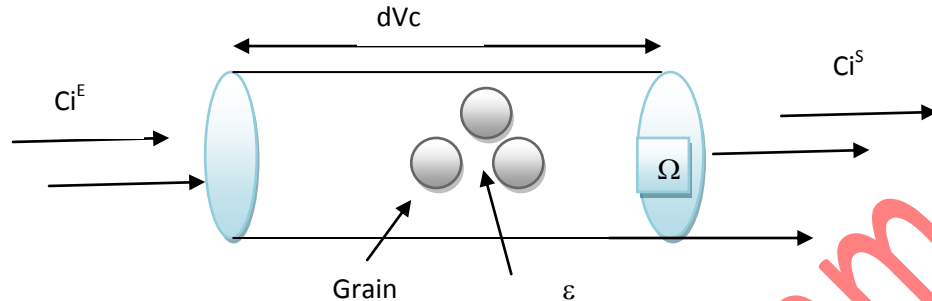
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{300 - 500}{0.74 - 500} = 0,4$$

$$Re_p = \frac{0.9 \times 0.5 \cdot 10^{-3} \times 0.74}{\mu (1 - 0.4)} = 370 ; \quad Re_p > 10 \text{ (Régime Turbulent)}$$

Donc d'après le modèle de Burke-Plummer on a : $\frac{\Delta P}{Z} = h_{B-P} \cdot \rho_F \cdot a_p \cdot \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot U_F^2$

II- DISPERSION

Le bilan de matière pour le constituant i dans un élément de volume dV_c de la colonne, qui décrit le phénomène de transfert intergranulaire au sein du lit s'écrit:



$$\left[\text{Flux de entrant} \right]_{\text{à travers la section } \Omega_z} = \left[\text{Flux de sortant} \right]_{\text{à travers la section } \Omega_{z+dz}} + \left[\text{Débit d'accumulation} \right]_{\text{dans le volume}}$$

Le flux axial de matière qui entre à travers la section Ω au point z est donné par :

$$\left[u \varepsilon C_i - D_L \varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial z} \right]_{z} \Omega \quad (\text{Diffusion} + \text{Dispersion axiale})$$

Le flux axial de matière qui sort à travers la section Ω au point $z+dz$ est donné par :

$$\left[u \varepsilon C_i - D_L \varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial z} \right]_{z+dz} \Omega$$

L'accumulation du constituant i à l'intérieur du volume élémentaire est donnée par :

$$\varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial t}$$

Le bilan par unité de volume s'écrit alors :

$$\left[u \varepsilon C_i - D_L \varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial z} \right]_{z} \Omega = \left[u \varepsilon C_i - D_L \varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial z} \right]_{z+dz} \Omega + \varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial t} dV$$

Après simplification, on obtient l'équation de la distribution de la concentration du constituant i .

$$\varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial t} + u \varepsilon \frac{\partial C_i}{\partial z} = D_L \varepsilon \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2}$$

III- TRANSFERT DE CHALEUR DANS DES LITS FIXE

KRAMERS a montré que pour les conditions de convection forcée, le coefficient de transfert de chaleur peut être représenté par:

$$Nu = 2 + 1.3 Pr^{0.15} + 0.66 Pr^{0.31} Re^{0.5}$$

Pr : nombre de Prandtl ($C_p \cdot \mu / k$)

Pour la **convection naturelle**, RANZ et MARSHALL ont donné:

$$Nu = 2 + 0.6 Pr^{1/3} Gr^{1/4}$$

Gr : Number de Grashof.

Les résultats pour les lits garnis sont beaucoup plus difficiles à obtenir pour cela les résultats expérimentaux a déterminée le facteur j_h pour le transfert de chaleur, comme suit:

$$\varepsilon \cdot j_h = 2.06 \cdot Re^{-0.575} \dots \dots \dots (**)$$

Les facteurs j pour le transfert de chaleur et de masse, j_h et j_d , sont égaux et, par conséquent, l'équation (**) peut également être utilisée pour le calcul des taux de transfert de masse.

IV- COLONNES GARNIES

La construction de la colonne garnie est relativement simple. La coquille de la colonne peut être fabriquée en céramique, en verre ou en matière plastique, ou en métal résistant à la corrosion. La colonne devrait être montée vraiment verticalement pour aider la distribution uniforme de liquide. Les organes de la colonne sont:

- **Le garnissage** présent dans une colonne a pour objectif de mettre en contact la phase liquide, qui redescend par gravité, avec la phase vapeur qui monte vers la tête de colonne. Il doit offrir un degré de vide suffisant pour laisser passer le liquide et la vapeur à contre-courant, Et cela pour améliorer l'échange de matière entre le liquide et la vapeur.
- **Grille-support** est également utilisée pour soutenir le garnissage.
- **Grille de retenue** est également utilisée pour éviter au garnissage de se soulever.

- **Distributeurs** et **collecteurs** sont également nécessaires pour assurer une bonne répartition des flux sur l'ensemble des éléments de garnissage.
- **Redistributeurs** sont nécessaires lorsque la hauteur totale du garnissage est supérieure à 4,5 mètres.

IV.1- LES DIFFERENTS TYPES DES COLONNES

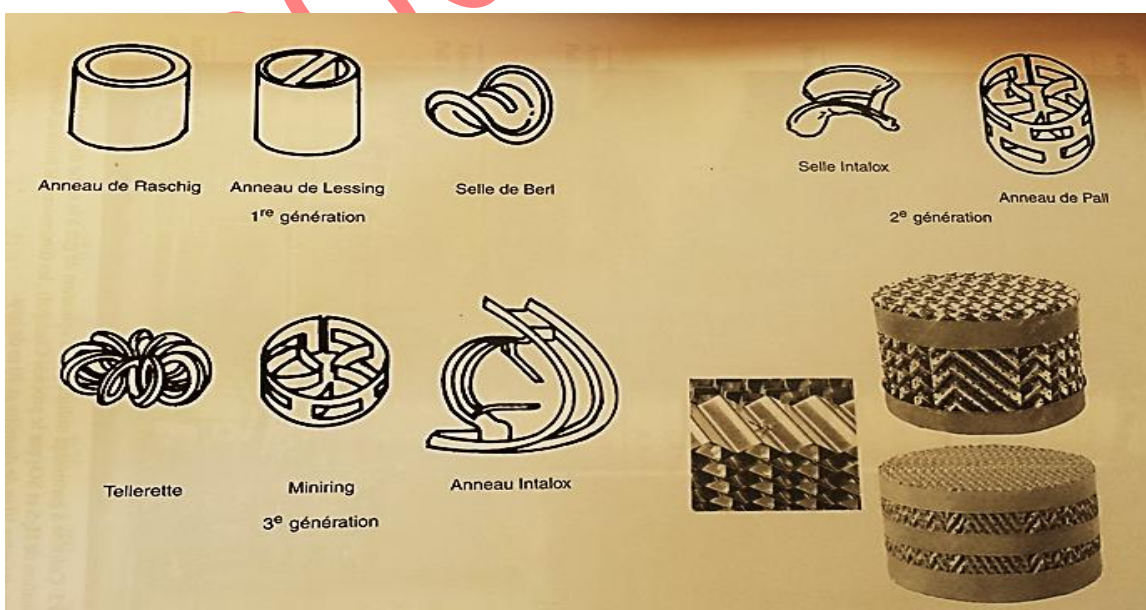
IV.1.1- Colonne à garnissage structuré:

Le **garnissage ordonné**, aussi appelé **garnissage structuré**, est un garnissage reconnu pour son efficacité et ses faibles pertes de charge. Il permet de diminuer la taille des colonnes. Ce garnissage est composé d'un ensemble de tôles ondulées assemblées dos à dos en forme de nids d'abeilles (hauteur moyenne de 270 mm). Les matériaux mis en œuvre sont métalliques (aciers inoxydables, aluminium,..) ou plastiques (PS, PPH, PVC,...).

Le garnissage structuré assure une répartition uniforme des phases ascendantes vapeur et descendantes liquide ainsi qu'un contact optimal favorable au transfert de matière. Ce garnissage permet une faible résistance à l'écoulement et des pertes de charges réduites par rapport à celles du garnissage en vrac.

IV.1.2- Le garnissage vrac:

Le **garnissage vrac** est composé d'éléments aux formes complexes disposés de manière aléatoire dans la colonne. Le transfert de matière entre le liquide et la vapeur se fait à la surface de chaque élément.



Garnissage

V- ECOULEMENT D'UNE SUSPENSION « FILTRATION »

La filtration est un processus de rétention de la fraction des matières solides en suspension lors du passage d'un fluide (solide + liquide) à travers un milieu poreux (filtre), elle est surtout utilisée pour diminuer les matières solides des eaux potables, aussi que les eaux usées.

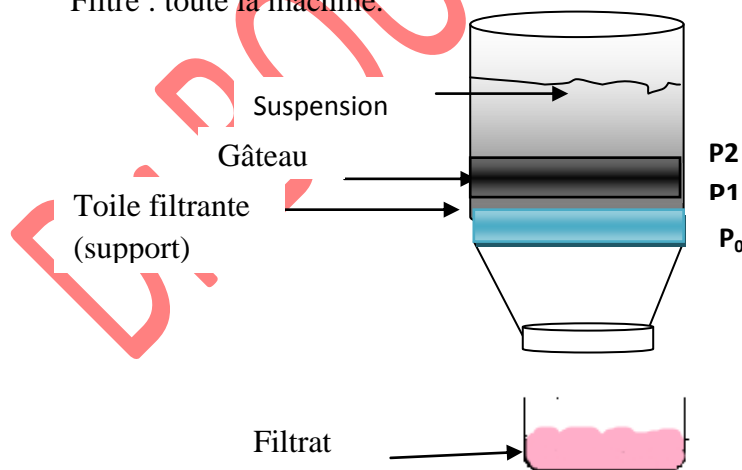
Si on a Microfiltration, ou bien ultrafiltration c.-à-d. à travers les membranes.

Les particules solides qui sont retenues sur la surface filtrante forment un dépôt, désigné sous le nom gâteau.

A l'échelle laboratoire, la filtration est généralement mise en œuvre dans des cellules selon la technique utilisée (filtration gravitaire, filtration sous pression et filtration sous vide). Dans l'industrie, la filtration est mise en œuvre dans diverses machines et sous différentes conditions opératoires : Les filtres sous pression (filtres presses, à plateaux), les filtres sous vide (rotatifs, buchner).

* termes :

- Milieu filtrant : milieux poreux.
- Support (toile, grille, membrane).
- Filtrat : liquide récupéré après filtration.
- Gâteau : couche formée par les particules solides après filtration.
- Filtre : toute la machine.



P2: Pression appliquée au liquide à l'entrée du gâteau (contacte suspension gâteau).

P1: Pression appliquée au liquide à la sortie du gâteau (contacte gâteau support).

P0: Pression du liquide à la sortie du support.

V.1- LOIS GENERALE DE LA FILTRATION

Les lois de la filtration sont obtenues à partir de l'équation de DARCY, qu'on applique sur une couche élémentaire de gâteau d'épaisseur dz.

Les hypothèses sont:

- *Le régime laminaire.
- *Le gâteau est incompressible $\epsilon = C$ constante

a)- Les pertes de charges à travers le gâteau:

A partir de DARCY on a : $V_s = \frac{k \Delta P}{\mu Z}$

Avec : $k = \beta$: cte de perméabilité de la couche.

ΔP : Chute de pression.

D'autre part nous définissons de la résistance du gâteau par : $R_G = \frac{Z}{k}$ $k : [L]^{-1}$

$$\rightarrow V_s = \frac{\Delta P_2}{\mu \cdot R_G} = \frac{P_2 - P_1}{\mu \cdot R_G}$$

$$\Rightarrow \Delta P_2 = \mu \cdot R_G V_s \text{ Perte de charge à travers le gâteau.}$$

*D'autre part la résistance du gâteau R_G peut être défini par le rapport M/Ω .

$$R_G = \propto \frac{M}{\Omega}$$

Avec ; M : Masse de gâteaux sèche.

\propto : C'est la résistance spécifique du gâteaux est une constante si le gâteau est incompressible.

$$\Delta P_2 = \mu \cdot \propto \frac{M}{\Omega} V_s$$

- L'écoulement à travers le gâteau peut être décrit par l'équation au lit fixe tel que l'équation de KOZNEY.

$$\rightarrow \Delta P_2 = \underbrace{\mu \cdot \propto \frac{M}{\Omega}}_{R_G} \cdot V_s = \underbrace{h_K \frac{\mu \cdot a g^2 (1-\epsilon)^2}{\epsilon^3}}_{R_G} V_s$$

$$R_G = h_K \cdot \frac{a g^2 (1-\epsilon)^2 Z}{\epsilon^3}$$

b)-Les pertes de charges à travers la membrane:

Par analogie on a : $\Delta P_1 = P_1 - P_2 = \mu \cdot R_m \cdot V_s$

R_m : la résistance de la membrane.

c)- Les pertes de charges totales:

Donc la perte de charge totale ΔP est:

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = P_2 - P_0 = (R_G + R_m) \cdot \mu \cdot V_s$$

→ L'équation générale de la filtration est: $V_s = \frac{\Delta P}{(R_G + R_m) \cdot \mu}$

V.2- CALCULE LA HAUTEUR DU GATEAU

$$\frac{W}{1 - W} = \frac{M_s}{M_L} = \frac{\text{Masse du solide dans la suspension}}{\text{Masse du liquide dans la suspension}}$$

W: fraction massique du solide dans la suspension.

$$M_s = \rho_s \cdot V_s = \rho_s (1 - \varepsilon) \cdot \Omega \cdot L \quad \text{avec} \quad V_s = (1 - \varepsilon) V_T = (1 - \varepsilon) \cdot \Omega \cdot L$$

$$M_L = M_{L(\text{gateau})} + M_{L(\text{filtrat})}$$

$$\rho_L \cdot V_{\text{vide}} = \rho_L \varepsilon \cdot \Omega \cdot L + \rho_L \cdot V = \rho_L \cdot (\varepsilon \cdot \Omega \cdot L + V) \quad ; \quad V \text{ volume du filtrat.}$$

$$\frac{W}{1 - W} = \frac{M_s}{M_L} = \frac{\rho_s (1 - \varepsilon) \cdot \Omega \cdot L}{\rho_L \cdot (\varepsilon \cdot \Omega \cdot L + V)}$$

$$\text{Si } V \gg \varepsilon \cdot \Omega \cdot L \quad \frac{W}{1 - W} = \frac{\rho_s (1 - \varepsilon) \cdot \Omega \cdot L}{\rho_L \cdot V} \quad L = \frac{W \cdot \rho_L \cdot V}{(1 - W) \rho_s (1 - \varepsilon) \cdot \Omega}$$

V.3- CALCULE LE TEMPS NECESSAIRE POUR L'OBTENTION D'UN CERTAIN VOLUME DE FILTRAT.

Le régime est laminaire d'après KOZENY on a:

$$\frac{\Delta P}{Z} = 5 \cdot \frac{\mu \cdot a g^2 (1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} V_s$$

Ou : $h_K = 4,5 \cong 5$

$$V_s = \frac{\varepsilon^3}{5 \cdot \mu \cdot a g^2 (1 - \varepsilon)^2} \frac{\Delta P}{Z} \dots \dots \dots 1$$

On a : $Q_v = \Omega \cdot V_s = \frac{dV}{dt}$ puisque $V = f(t)$

$$V_s = \frac{1}{\Omega} \frac{dV}{dt} \dots\dots\dots 2$$

$$1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\Omega \epsilon^3}{5 \mu a g^2 (1 - \epsilon)^2} \frac{\Delta P}{L} \quad \text{et} \quad L = Z = \frac{W \rho_L V}{(1 - W) \rho_s (1 - \epsilon) \Omega}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Omega \cdot \epsilon^3}{5 \cdot \mu \cdot a g^2 (1 - \epsilon)^2} \frac{\Delta P}{\frac{W \cdot \rho_L \cdot V}{(1 - W) \rho_s (1 - \epsilon) \cdot \Omega}}$$

On note que : La résistance spécifique $\alpha = \frac{5 \cdot a g^2 (1 - \epsilon) \cdot \rho_L}{\epsilon^3 \rho_s}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Omega^2 \cdot \Delta P}{\mu \cdot \alpha \cdot \frac{W}{(1 - W)} V}$$

Par l'intégration de l'équation on a :

$$\int_0^V V dV = \int_0^t \frac{\Omega^2 \cdot \Delta P}{\mu \cdot \alpha \cdot W} dt$$

Cas $\Delta P = \text{constante}$.

$$\frac{V^2}{2} = \frac{\Omega^2 \cdot \Delta P}{\mu \cdot \alpha \cdot W} t \quad t = \frac{V^2}{2} \left(\frac{\mu \cdot \alpha \cdot W}{\Omega^2 \cdot \Delta P} \right)$$

V.4- FILTRATION IDEALE: C'est la filtration ou les particules du gâteau est parfaitement rigides qui ne puissent être tassées quelque soit les efforts de pression appliquées au gâteau $\epsilon = \text{cst}$ sur toute l'épaisseur du gâteau.

D'après l'équation générale de la filtration on a: $\Delta P = (R_G + R_m) \cdot \mu \cdot V_s$

$$V_s = \frac{\Delta P}{(R_G + R_m) \cdot \mu} \dots\dots\dots 1$$

D'autre part on a: $Q_v = \Omega \cdot V_s = \frac{dV}{dt}$ puisque $V = f(t)$

$$V_s = \frac{1}{\Omega} \frac{dV}{dt} \dots\dots\dots 2$$

$$1 = 2 \quad V_s = \frac{1}{\Omega} \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{(R_G + R_m) \cdot \mu} = \frac{\Delta P}{\left(\alpha \frac{M}{\Omega} + R_m\right) \cdot \mu}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{\Omega} \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{\left(\alpha \frac{M}{\Omega} + R_m\right) \cdot \mu} \dots\dots\dots 3$$

Avec : $W = \frac{M(\text{masse du gâteau sèche})}{V(\text{volume du filtrat})}$; Donc : $M = W \cdot V$

$$\text{D'après l'équation 3 ; } \Delta P = \left(\alpha \frac{V \cdot W}{\Omega} + R_m \right) \cdot \frac{\mu}{\Omega} \cdot \frac{dV}{dt} \dots\dots\dots 4$$

V.4.1- Filtration à débit constant ($Q_v = \text{cst}$):

Soit $Q_v = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{t} = \text{cst}$ donc l'équation 4 devient:

$$\Delta P = \left(\alpha \frac{W \cdot V}{\Omega} + R_m \right) \cdot \frac{\mu}{\Omega} \cdot \frac{V}{t} = \left(\alpha \frac{W \cdot \mu}{\Omega^2 \cdot t} \cdot V^2 + \frac{R_m \cdot \mu}{\Omega \cdot t} \cdot V \right)$$

$$\Rightarrow \Delta P = \left(\alpha \frac{W \cdot \mu}{\Omega^2} \cdot Q_v^2 \cdot t + \frac{R_m \cdot \mu}{\Omega} Q_v \right)$$

V.4.2- Filtration à pression constante ($\Delta P = \text{cst}$):

D'après l'équation 4 ; $\Delta P = \left(\alpha \frac{V \cdot W}{\Omega} + R_m \right) \cdot \frac{\mu}{\Omega} \cdot \frac{dV}{dt}$ on a:

$$dt = \alpha \frac{W \cdot \mu}{\Omega^2 \cdot \Delta P} \cdot V \cdot dV + \frac{\mu \cdot R_m}{\Omega \cdot \Delta P} \cdot dV$$

à $t = 0, V = 0$

$$\int_0^t dt = \alpha \frac{W \cdot \mu}{\Omega^2 \cdot \Delta P} \cdot \int_0^V V \cdot dV + \frac{\mu \cdot R_m}{\Omega \cdot \Delta P} \cdot \int_0^V dV$$

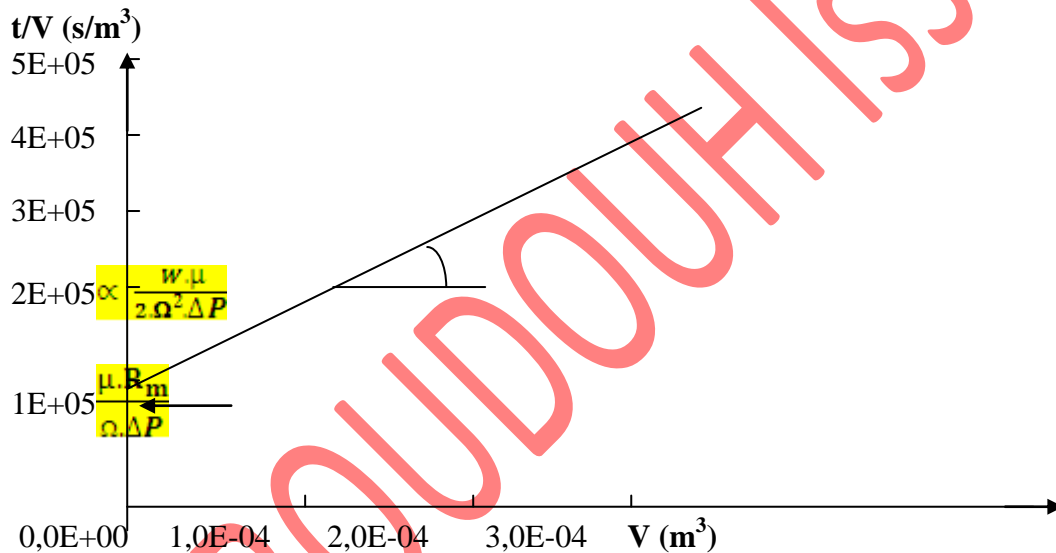
$$t = \alpha \frac{W \cdot \mu}{2 \cdot \Omega^2 \cdot \Delta P} \cdot V^2 + \frac{\mu \cdot R_m}{\Omega \cdot \Delta P} \cdot V$$

V.5- EQUATION DE Ruth

Ruth obtient une relation qui permet, pour une filtration réalisée à pression ΔP constante, d'exprimer l'inverse du débit moyen de filtrat en fonction du volume de filtrat :

$$\frac{t}{V} = \alpha \frac{W \cdot \mu}{2 \cdot \Omega^2 \cdot \Delta P} \cdot V + \frac{\mu \cdot R_m}{\Omega \cdot \Delta P}$$

L'interprétation de cette équation suggère que α et R_m peuvent être déterminées respectivement par la pente et l'ordonnée à l'origine de la courbe $t/V = f(V)$.

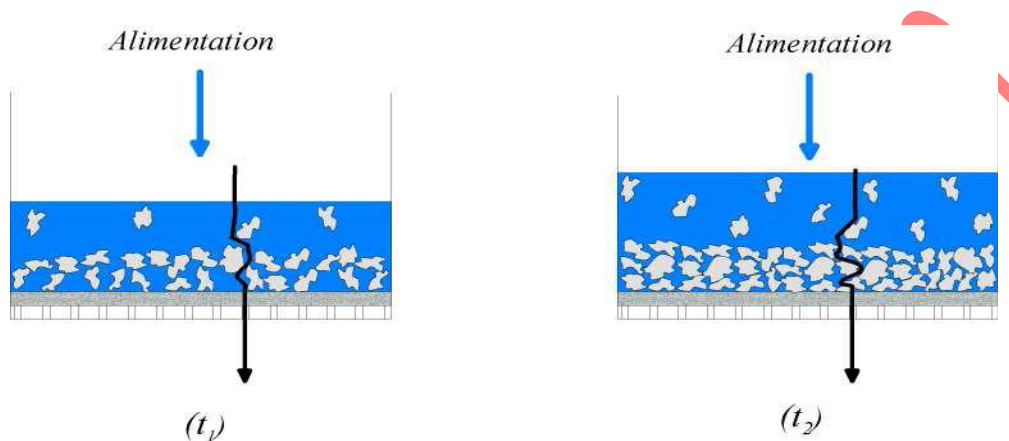


Représentation selon Ruth les données de filtration

Le modèle basé sur l'équation de **Ruth** est largement utilisé pour la caractérisation des gâteaux de filtration et son domaine de validité est limité.

V.6- FILTRATION SUR GATEAU COMPRESSIBLE

L'écoulement d'un liquide à travers un milieu poreux génère, sur les particules solides, des forces de traînée. Ces forces de compression déforment la structure du gâteau et forcent les particules solides à se coller les unes aux autres, alors le milieu poreux est compressible cela implique que ϵ et a_g varient.



Compressibilité du gâteau au cours de la filtration.

Les variations de porosité dans un gâteau entraînent une variation de la résistance à l'écoulement et modifient la vitesse locale du liquide. Les compressions internes se manifestent par une restructuration de la matrice solide, c'est le réarrangement des particules.