المحاضرة الأولى: البرمجة الخطية– صياغة النموذج الرياضي

تمهيد:

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزا مرموقا في مجالات بحوث العمليات،وتكمن أهمية البرمجة الخطية في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، وتعتبر البرمجة الخطية linear Porgramming أحد أساليب البرمجة الرياضية التي تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل لحلها وتلعب دوراً هاماً في الوصول إلى التوزيع الأمثل للموارد المتاحة على الأنشطة المختلفة وفقاً للهدف المطلوب.

تعريف البرمجة الخطية: للبرمجة الخطيةعدة تعاريف وذلك باختلاف أراء المفكرين والمنظرين، وفيما يلي بعض التعاريف التي تناولت هذا الموضوع:

- أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة أي أن يكون توزيعها مثالياٌ،
- أسلوب رياضي يساعد على استخدام كفء للموارد الاقتصادية المتاحة وذلك إما بهدف تعظيم المنافع كالأرباح أو تقليل التكاليف ،وتعتبر البرمجة الخطية بمثابة أداة يمكن للإدارة استخدامها في تسهيل عملية اتخاذ القرار.
- إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير خطية فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (من الدرجة الأولى) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صيغة رياضية سهلة.

وتعتبر نماذج البرمجة الخطية من أبسط وأسهل النماذج الرياضية والتي يمكن إنشاؤها لمعالجة معضلات البرمجة الصناعية والحكومية الكبرى.

استخدامات البرمجة الخطية: تستخدم البرمجة الخطية في أهم المجالات التالية:

1 مشاكل الإنتاج: كتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات، التي ينتجها المشروع بالشكل الذي يعظم الأرباح، وذلك في ظل إمكانيات مختلفة

<u>2 المزيج الإنتاجي</u>: في كثير من الصناعات هناك عدد من المكونات أو العناصر التي تخلط مع بعضها وبنسب معنية لتعطي منتجا آخرا جديدا كصناعة الأعلاف والأدوية والأسمدة ....الخ.والهدف هنا هو تحديد الكميات التي يجب استخدامها من كل عنصر،وذلك لصنع المنتج الجديد عند أقل تكلفة ممكنة مع ضمان وجود خصائص إنتاجية معنية في ذلك المنتج.

<u>3 تخطيط الاستثمارات</u>: لنفترض أن هناك مبلغا ماليا معينا و يراد تحديد مقدار ما ينفق على عدد من البدائل الاستثمارية وذلك لجعل مجموع العوائد السنوية أكبر ما يمكن علما بأن المشروع ليس لديه أية أموال أخرى، عدا هذا المبلغ و يمكن علاج هذا النوع من المشاكل باستخدام البرمجة الخطية.

<u>4 التخطيط للدعاية والإعلان:</u> في هذا النوع من المشاكل يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها على مجموعة مختلفة من وسائل الإعلان، من أجل ترويج السلعة المنتجة بفعالية مثلي، وذلك تحت عدد من القيود، مثل قدرة السوق الاستيعابية، ومحدودية الموارد المالية، والحدود المفروضة على استخدام كل وسيلة من تلك الوسائل الإعلانية.

<u>5 مشاكل الشحن</u>: كم عدد الوحدات التي يجب شحنها من عدد من المنتجات المختلفة وذلك باستخدام وسيلة نقل معنية ذات طاقة تحميلية محدودة لتعظيم الأرباح في الوقت الذي يراد فيه نقل كميات معنية مطلوبة من السلعة المنتجة.

<u>افتراضات البرمجة الخطية</u>: تمثل افتراضات البرمجة الخطية شروط أساسية يجب المحافظة عليها في بناء النموذج لضمان الاستخدام السليم للنموذج. ونعرض فيما يأتي الافتراضات بشكل موجز:

التناسبية: إن دالة الهدف يجب أن تكون متناسبة خطية مع مستوى استخدام متغيرات القرار، إن شرط الخطية تجعل هذا النموذج مختلفا عن النماذج الأخرى ويخضع لمجموعة القيود، حيث تتمثل في دالة خطية تعطى بالعلاقة التالية: $Y= a+bx$

حيث x: متغير مستقل

Y: متغير تابع

الإضافية: ولتوضيح هذا الافتراض فإن كل نشاط يضاف بالعلاقة مع الموارد يتحد بمجموعة القيود، ففي مشكلة المزيج الإنتاجي لمنتجين مثلا (x_1-x_2)، المنتج (x_1) لا يؤثر على ربحية المنتج (x_2) مهما أنتج من (x_1) والعكس صحيح.

التأكد: البرمجة الخطية تفترض أن تكون متغيرات القرار ومعاملات القيود معلومة وثابته. ففي مشكلة المزيج الإنتاجي مثلا فإن الربح الناتج عن الوحدة الواحدة من المنتوج(x_1) والمنتوج (x_2) يكون معلوما وثابتا.

قابلية القسمة: إن هذا الافتراض يشير غلى أن متغيرات القرار يمكن أن تأخذ قيم كسرية، ففي مشكلة المزيج الإنتاجي يمكن أن تكون متغيرات القرار مواد أولية أو ساعات عمل وبالتالي فإن(0.2)وحدة من مادة أولية أو من ساعات عمل تكون قيمة ممكنة.

عدم السلبية أو السالبية: وهذا الافتراض سهل الفهم لأنه مثلا في مشكلة المزيج الإنتاجي من غير الممكن توقع أن تنتج أقل من الصفر وبالتالي فإن $(x_1.x_2 \geq 0)$ وهذا هو مضمون هذا الافتراض.

<u>شروط البرمجة الخطية</u>: هناك عدد من الشروط ينبغي توافرها عند استخدام البرمجة الخطية، ومن أبرزها ما يلي:

- وجود هدف واضح ومحدد وهو ما يمثل دالة الهدف، والذي يعبر عن أقصى عائد أو أدنى كلفة، إذ لا بد من التعبير عن ذلك الهدف بصورة عددية.

- وجود عدد من المتغيرات، إذ يتأثر حدوث أي تغير فيها على القرارات المتخذة من قبل الإدارة، ويمكن زيادتها أو تخفيضها حسب الخطة الموضوعة لحل المشكلة المطروحة ومن ثم سوف تؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه.

- وجود علاقة خطية بين المتغيرات ودرجة تحقق الأهداف ويمكن تمثيل هذا الشرط رياضيا، أي يتم التعبير عن دالة الهدف و القيود على هيئة معادلات أو متباينات من الدرجة الأولى.

- إمكانية التعبير عن الفعاليات أو المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية، إن هذا الشرط يشير مثلا إلى ضرورة التعبير عن رأس المال بعدد من الدنانير أو الأيدي العاملة بعدد العاملين أو الطاقة الإنتاجية المتاحة بعدد الساعات المتوافرة في العمل خلال مدة زمنية معنية (أسبوع، شهر، سنة، ...... وهكذا).

- وجود عدد من القيود أو المحددات تعبر عن محدودية الموارد المتاحة مثل الأيدي العاملة، المواد الأولية، الآلات ورأس المال المطلوب، والتي تستلزم الاستخدام الأمثل لتلك الموارد بسبب المنافسة الشديدة للحصول عليها.

- ينبغي أن تكون المتغيرات المختلفة والممثلة للقيود أكبر أو مساوية للصفر، وهو ما يطلق عليه بشرط عدم السلبية.

صياغة نموذج البرمجة الخطية: إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية. و نعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية على دراسة الواقع وتحليله.وبعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الانتقال إلى المرحلة التالية والمتمثلة في تقييمه وتحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة والوصول إلى الحل المناسب.

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية:

- **دالة الهدف**Function objective: وتعبر عن الهدف المنشود الذي نرغب في تحقيقه وإمكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية linearfunction والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيم(**Maximization**) هذه القيمة إذا كان الهدف المنشود ربحا أو تقليل القيمة (**Minimization**)إذا كان الهدف تكلفة أي الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة،

وتتكون دالة الهدف من المتغيرات القرارية على أن يكون المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

- **القيود (الموارد)** Contraints: **وتشير عادة إلى كميات الموارد المتاحة أو العلاقات الفنية التي** توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة بشكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط منهما.

- **شرط عدم السلبية** Non-Negativiy: إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية ولا يمكن أن تكون سالبة.

لتوضيح عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية سنطرح بعض الأمثلة:

المثال الأول:

مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الخزانات المعدنية هما A وB وكل نوع يمر بماكنتين: الماكنة الأولى لقطع الصفائح وطاقاتها التشغيلية 80 ساعة أسبوعيا، **والماكنة** الثانية لطي ووصل الصفائح لتعطيها شكل الخزان المناسب المطلوب وطاقاتها التشغيلية 70 ساعة أسبوعيا.

إذا علمت أن النوع الأولA يحتاج 4 ساعات على الماكنة الأولى و10 ساعات على الماكنة الثانية والنوع B يحتاج 5ساعات على الماكنة الأولى و6 ساعات على الماكنة الثانية.

المطلوب:

كتابة وصياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها من النوعين A وB لتحقيق أعلى ربح ممكن إذا كان ربح الخزان الواحد من النوع الأولA يقدر بـ 30 دنانير وربح الخزان من النوع الثاني Bيقدر بـ 60دنانير.

الحل:

الهدف هو تحقيق أعلى ربح ممكن للمصنع من خلال إنتاج الخزانات المعدنيةمن النوعين A وB.

نقرض أن x_1: عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوع A

x_2: عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوع B

دالة الهدف: هي دالة تعظيم الربح الأسبوعي المصنع

إذا ربح إنتاج خزان واحد من النوع A 30 دنانير **فان ربح إنتاج x_1خزان** هو: $\mathbf{30\,x_1}$؛

وإذا ربح إنتاج خزان واحد من النوع B 60 دنانير **فان ربح إنتاج x_2خزان** هو: $\mathbf{60x_2}$.

ربح المصنع **الأسبوعي** هو: $Z = 30x_1 + 60\,x_2$

- **دالة تعظيم ربح المصنع الأسبوعي هي**: $Max\ Z = 30x_1 + 60\,x_2$

القيود:

القيد الأول: قيد الماكنة الأولى، عدد الساعات المستغلة أسبوعيا على الماكنة الأولى يجب أن لا تتعدى80 ساعة (طاقاتها التشغيلية أسبوعيا) $4x_1 + 5x_2 \leq 80$

القيد الثاني: قيد الماكنة الثانية، عدد الساعات المستغلة أسبوعيا على الماكنة الثانية يجب أن لا تتعدى 70 ساعة (طاقاتها التشغيلية أسبوعيا) $10x_1 + 6x_2 \leq 70$

شرط عدم السلبية: : أن لا يكون عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوعين A و B عددا سالبا: $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$

- ويكون بذلك النموذج الرياضي في صورته النهائية كما يلي: $Max\ Z = 30x_1 + 60\,x_2$

Subject to:

$4x_1 + 5x_2 \leq 80$

$10x_1 + 6x_2 \leq 70$

$x_1, x_2 \geq 0$

<u>المثال الثاني:</u>

تلقت إحدى المؤسسات طلب 1000 كغ من خليط خاص متكون من ثلاث مواد كيماوية يرمز لها بالرمز: M_1, M_2, M_3 وتقدر تكاليفها بالترتيب : 500 دج، 600 دج، 700 دج لكل كيلو غرام.

تخضع هذه المواد للشروط التالية :

لا يمكن استعمال أكثر من 300 كغ من M_1،

في نفس الوقت يجب استعمال 500 كغ على الأقل من M_2،

يجب استعمال 200 كغ على الأقل من M_3 .

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي المحدد للكميات الواجب استعمالها من المواد الثلاثة لتلبية هذا الطلب وذلك بأقل تكلفة ممكنة.

الحل:

كتابة البرنامج الخطي

نقرض أن x_1: كمية المادة M_1 المستعملة في الخليط

x_2: كمية المادة M_2 المستعملة في الخليط

x_3: كمية المادة M_3 المستعملة في الخليط

دالة الهدف: $\text{Min } Z = 500\, x_1 + 600\, x_2 + 700\, x_3$

القيود: القيد الأول: **قيد** كمية المادة $M_1 x_1 \leq 300$

القيد الثاني : **قيد** كمية المادة $M_1 x_2 \geq 500$

القيد الثالث: **قيد** كمية المادة $M_1 x_3 \geq 200$

القيد الرابع: قيد الكمية الإجمالية للخليط $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- ويكون بذلك النموذج الرياضي في صورته النهائية كما يلي:

$\text{Min } Z = 500\, x_1 + 600\, x_2 + 700\, x_3$

Subject to:

$x_1 \leq 300$

$x_2 \geq 500$

$x_3 \geq 200$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

المحاضرة الثانية: طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة البيانية

بعد أن تتم صياغة نماذج البرمجة الخطية سواء كانت مشكلة تعظيم أرباح أو تقليل تكاليف، سيتم التعرف على كيفية حل هذه النماذج وما هي قيم التغيرات التي تحدد أعلى ربح أو أقل تكلفة.

وتعتبر طريقة الرسم البياني وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية وتستخدم هذه الطريقة إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط، إذا يتعذر رسم النموذج في حالة إحتوائه على أكثر من متغيرين وتقوم هذه الطريقة على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن ثمة تحديد منطقة الحلول الممكنة ولحل نموذج البرمجة الخطية نتبع الأتي:

- ✍ نرسم محورين أحدهما أفقي وليكن X_1 والثاني عمودي وليكن X_2.
- ✍ نرسم القيود بعد تحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بتحويل إشارات ≤ و≥ إلى إشارة مساواة =، إن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحورX_2 نعوض قيمة $X_1=0$ ولمعرفة نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_1 نعوض قيمة $X_2=0$.
- ✍ نحدد منطقة حل كل قيد من القيود.
- ✍ تحديد منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد.
- ✍ شرط عدم السلبية يحدد منطقة الحل لتكون في الربع الأول.
- ✍ نجد قيمة Z عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول العملية الممكنة، ويكون الحل أكبر قيمة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تدنئة.

<u>المثال الأول</u>: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$\text{Max. } Z = 1000\, x_1 + 800\, x_2$

Subject to:

$8\, x_1 + 6\, x_2 \leq 2400$

$4x_1 + 9x_2 \leq 1800$

$2x_1 \leq 500$

$x_1 , x_2 \geq 0$

الحــل:

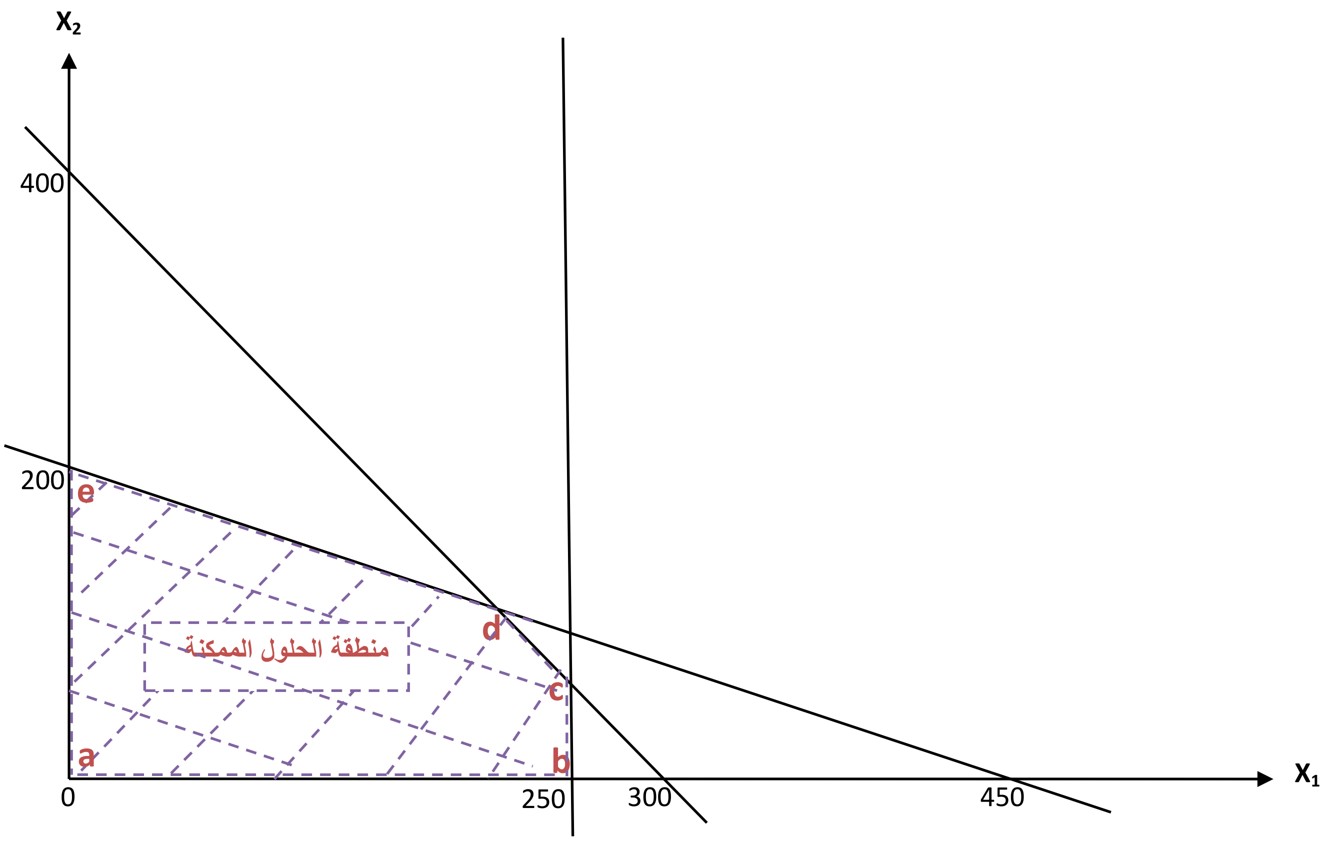
1- تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$8x_1 + 6x_2 = 2400$ $(x_1=0 , x_2=400)$ $(x_1=300 , x_2=0)$

$4x_1 + 9x_2 = 1800$ $(x_1=0 , x_2=200)$ $(x_1=450 , x_2=0)$

$2x_1 = 500$ $(x_1 = 250)$

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- عند النقطة a : $a(0.0) \Rightarrow Z_a = 1000 \times 0 + 800 \times 0 = 0$

ب- عند النقطة b: $b(250.0)\Rightarrow Z_b = 1000 \times 250 + 800 \times 0 = 250000$

ج- عند النقطة c:

لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها، أي الأول والثالث كما يلي:

$$\begin{cases} 8X1 + 6X2 = 2400 \ldots..(1) \\ 2X1 = 500 \ldots \ldots \ldots. \ldots..(3) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد:

$$X1 = \frac{500}{2} = 250$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$8 \times 250 + 6X2 = 2400 \Longrightarrow X2 = \frac{200}{3}$$

$$c(250.200/3)\Rightarrow Z_a = 1000 \times 250 + 800 \times \frac{200}{3} = \frac{410000}{3}$$

د- عند النقطة d:

لإيجاد إحداثيات النقطة d نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها، أي الأول والثاني كما يلي:

$$\begin{cases} 8X1 + 6X2 = 2400 \ldots..(1) \\ 4X1 + 9X2 = 1800 \ldots..(2) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة (1) على -2 وجمعها مع المعادلة (2) نجد:

$$6X2 = 600 \Longrightarrow X2 = \frac{600}{6} = 100$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$X1 = \frac{2400 - 100 \times 6}{8} = 225$$

$d(225.100) \Rightarrow Z_d = 1000 \times 225 + 800 \times 100 = 305000$

د- عند النقطة e: $e(0.200) \Rightarrow Z_e = 1000 \times 0 + 800 \times 200 = 160000$

4 –الحل الأمثل:

225 وحدة من X1 و 100 وحدة من X2 لتحقيق أكبر ربح والمقدر بـ 305000 وحدة نقدية.

<u>المثال الثالث</u>: اوجد حل البرنامج الخطي التالي:

Min. $Z = 40\, x_1 + 35\, x_2$

S.T.

$2\, x_1 + 3\, x_2 \geq 600$

$x_1 + 2\, x_2 \leq 600$

$6\, x_1 + 3\, x_2 \geq 900$

$0.6\, x_1 + 0.25\, x_2 \geq 60$

$x_1 , x_2 \geq 0$

الحــل:

1- تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

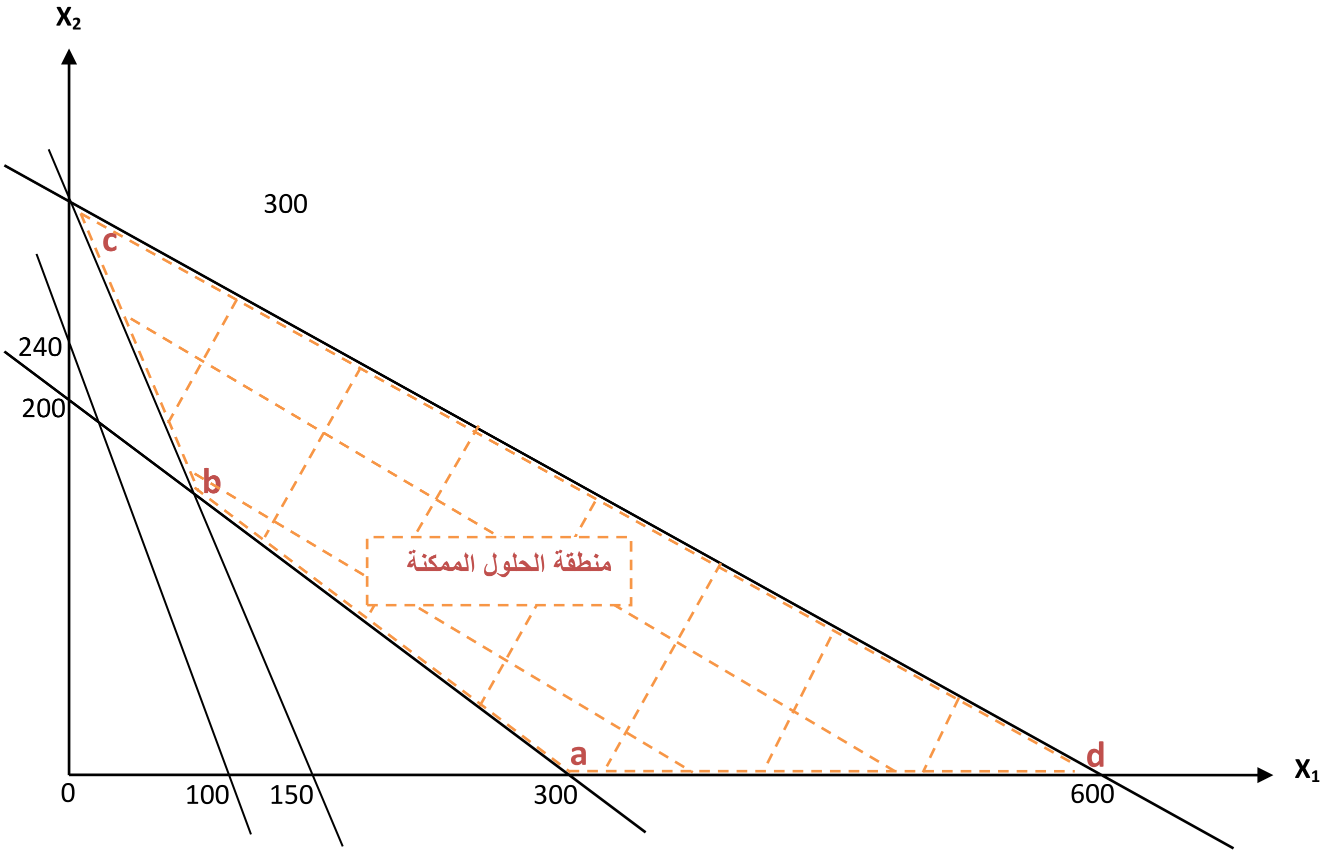
$2x_1 + 3x_2 = 600$ $(x_1=0 , x_2=200)$ $(x_1=300 , x_2=0)$

$x_1 + 2x_2 = 600$ $(x_1=0 , x_2=300)$ $(x_1=600 , x_2=0)$

$6x_1 + 3x_2 = 900$ $(x_1=0 , x_2=300)$ $(x_1=150 , x_2=0)$

$0.6\, x_1 + 0.25\, x_2 = 60$ **$(x_1=0 , x_2=240)$ $(x_1=100 , x_2=0)$**

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- **عند النقطة a:** $a(300.0) \Rightarrow Z_a = 40 \times 300 + 35 \times 0 = 12000$

ب- عند النقطة b:

لإيجاد إحداثيات النقطة b نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها، أي الأول والثالث كما يلي:

$$\begin{cases} 2X1 \ + 3X2 = \ 600 \ldots\ldots (1) \\ 6X1 \ + 3X2 \ = \ 900 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$4X1 \ = \ 300 \ \Longrightarrow X1 = \frac{300}{4} = 75$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$X2=\frac{600-2\times 75}{3}=150$$

$$\mathrm{b}\ (75.150)\Rightarrow Z_a=40\times 75+35\times 150=8250$$

ج- عند النقطة c: $\mathrm{C}\ (0.300)\Rightarrow Z_b=40\times 0+35\times 300=10500$

د- النقطة d: $\mathrm{d}(600.0)\Rightarrow Z_d=40\times 0+35\times 600=24000$

4 – الحل الأمثل:

75 وحدة من X1 و 150 وحدة من X2 لتحمّل أدنى تكلفة والمقدرة بـ 8250 وحدة نقدية

المحاضرة الثالثة: طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة المبسطة

تمهيد:

ما يميز الطريقة المبسطة (طريقة السمبلاكس) الدقة والكفاءة كما يمكن استخدامها لأي عدد من المتغيرات والقيود، وعملية هذه الطريقة تظهر من خلال تتبع خطوات نظامية متتالية تبدأ بالحل الممكن مرورا بالحل الأفضل وصولا إلى الحل الأمثل؛ وتتمثل خطوات الطريقة المبسطة فيما يلي:

<u>الخطوة الأولى</u>: تحويل النموذج الرياضي إلى الشكل المعياري (القياسي) أي تحويل كل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

- إذا كانت إشارة القيد اقل من أو تساوي (≤) يتم إضافة متغير الفجوة (المتغير الراكد)

Slack Variable إلى الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (S_i ; $i = 1, 2, 3, 4, ...,m$).

- إذا كانت إشارة القيد اكبر من أو تساوي (≥) يتم طرح متغير الفجوة (المتغير الفائض) Surplus Variable من الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (S_i ; $i = 1, 2, 3, 4, ...,m$)، ونضيف متغير وهمي (متغير اصطناعي) Artificial Variable إلى الطرف الأيسر ويرمز له بالرمز (A_i ; $i = 1, 2, 3, 4, ...,m$).

- إذا كانت إشارة القيد مساواة (=) يتم إضافة متغير وهمي (متغير اصطناعي) Artificial Variable إلى الطرف الأيسر ويرمز له بالرمز (A_i ; $i = 1, 2, 3, 4, ...,m$).

- إعادة كتابة دالة الهدف في ضوء المتغيرات الجديدة، حيث تظهر مغيرات الفجوة بمعامل صفر (0) وتظهر المتغيرات الاصطناعية بمعامل (M) - والتي ترمز إلى عدد كبير جدا- وبإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم (+M) وإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تقليل.

<u>الخطوة الثانية</u>: تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) كما يلي:

<table>
<tr><td colspan="2">$C \longrightarrow$</td><td>C_{ij}</td><td>0</td><td>$\pm M^*$</td><td>الطرف الأيمن للقيود</td></tr>
<tr><td colspan="2">T_0</td><td>X_{ij}</td><td>S_i</td><td>A_i</td><td>RHS</td></tr>
<tr><td rowspan="4">معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف</td><td rowspan="4">عمود المتغيرات الأساسية Basic Variable</td><td colspan="3">معاملات المتغيرات في القيد الأول</td><td>b_1</td></tr>
<tr><td colspan="3">معاملات المتغيرات في القيد الثاني</td><td>b_2</td></tr>
<tr><td colspan="3">........
........</td><td>.
.</td></tr>
<tr><td colspan="3">معاملات المتغيرات في القيد m</td><td>b_m</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z</td><td>Z_1</td><td>...........</td><td>Z_k</td><td>Z</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z - C</td><td>$Z_1 - C_1$</td><td>...........</td><td>$Z_k - C_k$</td><td></td></tr>
</table>

* توضع الإشارة حسب طبيعة دالة الهدف.

ملاحظات حول جدول الحل الأولي:

1- توضع المتغيرات الاصطناعية والراكدة كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأولي، أما المتغيرات الفائضة فلا يمكن إن تكون كمتغيرات أساسية.

2- يمثل العمود الأيمن من جدول الحل الأولي الكميات أو الطرف الأيمن Right Hand Side للقيود أو للمعادلات في الشكل القياسي.

3- يتم احتساب السطر (Z) على النحو التالي: (معامل المتغير الأساسي الأول × معامل X_1 في القيد الأول) + (معامل المتغير الأساسي الثاني × معامل X_1 في القيد الثاني) + ... + (معامل المتغير الأساسي الأخير × معامل X_1 في القيد m)؛ وهكذا بالنسبة لجميع المتغيرات.

4- يسمى السطر (Z – C) بسطر تقييم الحل ويتم احتسابه على النحو التالي: معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة (Z) المقابلة له في السطر (Z).

<u>الخطوة الثالثة</u>: التحقق من أمثلية الحل من خلال سطر التقييم (Z – C):

- إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر (Z – C) موجبة أو معدومة.

- إذا كانت دالة الهدف تقـليل (Min) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر (Z – C) سالبة أو معدومة.

وفي حالة تحقق شرط الامثلية يتم التوقف عند هذه الخطوة ويكون الحل المتحقق هو الحل الأمثل، وإذا لم يتحقق هذا الشرط يتم الانتقال إلى الخطوة الرابعة.

<u>الخطوة الرابعة:</u>

أ)- تحديد عمود الدوران بتحديد المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة في سطر التقييم (Z – C) وذات إشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) أو إشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف تقـليل (Min).

ب)- تحديد سطر الدوران بتحديد المتغير الخارج من الأساس والذي بقابل اقل حاصل قسمة بين عناصر الطرف الأيمن للقيود وعناصر عمود الدوران (العناصر السالبة و المعدومة في عمود الدوران لا تأخذ بعين الاعتبار)، ويسمى عنصر تقاطع سطر وعمود الدوران بعنصر الدوران (عنصر الارتكاز).

ج)- الانتقال إلى جدول سمبلاكس جديد عن طريق:

- استبدال عناصر عمود الدوران بالصفر ما عدا عنصر الدوران الذي ياخذ القيمة واحد (1).

- استبدال عناصر سطر الدوران بحاصل قسمة كل عنصر على عنصر الدوران.

- استبدال باقي عناصر الجدول بحاصل العملية الحسابية التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم + المقابل في سطر الدوران ×المقابل في عمود الدوران/ عنصر الدوران.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر (Z – C).

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم باختبار أمثلية الحل كما مر في الخطوة الثالثة.

مثال 01: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

Max $Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3$

Subject to:

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 16$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 20$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل: 1- كتابة النموذج على الشكل المعياري

Max $Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3$

Subject to:

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + \mathbf{S_1} = 16$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_2 = 18$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \mathbf{S_3} = 20$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

2- إعداد جدول السمبكس:

Cof		3	9	1	0	0	0	R.H.S
Var		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	1	4	3	1	0	0	16
0	S_2	3	2	2	0	1	0	18
0	S_3	2	4	2	0	0	1	20
Z		0	0	0	0	0	0	0
Z - C		3-	9-	1-	0	0	0	

بعد إتمام جدول السمبلكس نتحقق من شرطي العملية والأمثلية، حيث:

شرط العملية محقق بما أن جميع عناصر عمود الموارد (RHS) موجبة أو معدومة، أما شرط الأمثلية فهو غير محقق بما أنه يستوجب أن تكون عناصر السطر (Z-C) موجبة أو معدومة في البرامج الخطية التي هدفها التعظيم (MAX)، وعليه سننتقل إلى الجدول الجديد بعد تحديد عمود المتغير الداخل (عمود الدوران) الذي يوافق المتغير المرتبط بأقل قيمة سالبة في السطر (Z-C)، وفي مثالنا هذا نجدها القيمة -9 والتي ترتبط بالمتغير X_2، أما الخطوة الموالية فهي تحديد سطر المتغير الخارج، والذي يوافق أقل حاصل قسمة كل عنصر من عناصر عمود الموارد على العنصر الذي يقابله من عمود المتغير الداخل، أي نختار السطر الذي يرتبط بأقل قيمة من بين 4/16 ، 2/18 ، 4/20 ، وعليه نجد المتغير الخارج هو S_1، وبذلك يكون جدول السمبلكس الموالي كما يلي:

Cof		3	9	1	0	0	0	R.H.S
Var		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
9	X_2	4/1	1	4/3	4/1	0	0	4
0	S_2	2/5	0	2/1	2/1-	1	0	10
0	S_3	1	0	1-	1-	0	1	4
Z		4/9	9	4/27	4/9	0	0	36
Z - C		4/3-	0	4/23	4/9	0	0	

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أنه يقترح إدخال المتغير X_2 في عمود الأساس بكمية 04 وحدات بما يحقق قيمة في دالة الهدف قدرها 36. ولاختبار أمثلية الحل نعود لعناصر السطر (Z-C)، أين نلاحظ وجود قيمة سالبة (4/3-) ارتبطت بالمتغير X_1 ما يعني أنه المتغير الداخل في الخطوة اللاحقة، أما سطر المتغير الخارج فهو سطر المتغير S_2 بتطبيق نفس قاعدة القرار، أي أقل حاصل قسمة عمود الموارد على ما يقابله من عنصر في عمود الدوران، وبذلك يكون جدول السمبلكس الجديد كما يلي:

Cof		3	9	1	0	0	0	R.H.S
Var		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
9	**X_2**	0	1	10/7	20/9	10/1-	0	**3**
3	**X_1**	1	0	5/1	5/1-	5/2	0	**4**
0	S_3	0	0	5/6-	5/4-	5/2-	1	0
Z		3	9	10/69	29/69	10/3	0	**39**
Z - C		0	0	10/59	4/9	10/3	0	

نلاحظ أن عناصر السطر (Z-C) كلها موجبة أو معدومة، وعليه فإن الجدول أعلاه يمثل جدول الحل الأمثل، أما قيم الحل الأمثل فنلخصها كما يلي:

S1 =0	X1 = 4
S2 = 0	X2 = 3
S3 = 0	X3 = 0
Z = 39	

<u>مثال 02</u>: تختص مؤسسة في صناعة ثلاث أنواع من الأثاث الخشبي: مكاتب، طاولات، كراسي، أظهر التحليل الفني للإنتاج الأسبوعي بيانات الجدول التالي:

المنتجات / الموارد	متطلبات الوحدة الواحدة من الموارد			الحد الأقصى المتاح من الموارد
	المكاتب	الطاولات	الكراسي	
المادة الأولية (م2)	04 متر مربع	02 متر مربع	01 متر مربع	400 متر مربع
اليد العاملة (سا)	02 ساعة	02 ساعة	04 ساعة	600 ساعة
قوى محركة (سا)	01 ساعة	02 ساعة	01 ساعة	400 ساعة
الربح الوحدوي	200 دينار	160 دينار	100 دينار	

المطلوب:

أكتب النموذج الرياضي للمسألة

أوجد خطة الإنتاج الأسبوعية التي تحقق أكبر ربح ممكن.

الحل:

1– كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

$$MAXZP: 200X_1 + 160X_2 + 100X_3$$

$$Subject\_to:$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 400 \\ 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 600 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 400 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

2 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$MAXZP: 200X_1 + 160X_2 + 100X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$Subject\_to:$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + S_1 = 400 \\ 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + S_2 = 600 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 + S_3 = 400 \\ X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

3 – إعداد جداول Simplex:

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		X1	X2	X3	S1	S2	S3	
0	S1	4	2	1	1	0	0	400
0	S2	2	2	4	0	1	0	600
0	S3	1	2	1	0	0	1	400
Z		0	0	0	0	0	0	0
Z-C		200-	160-	100-	0	0	0	

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		X1	X2	X3	S1	S2	S3	
200	X1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	100
0	S2	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	0	400
0	S3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	1	300
Z		200	100	50	50	0	0	20000
Z-C		0	60-	50-	50	0	0	

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		X1	X2	X3	S1	S2	S3	
200	X1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0

0	S2	0	0	3	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	200
160	X2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	200
Z		200	160	80	40	0	40	32000
Z-C		0	0	-20	40	0	40	

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		X1	X2	X3	S1	S2	S3	
200	X1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0
100	X3	0	0	1	$\frac{-1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{9}$	$\frac{200}{3}$
160	X2	0	1	0	$\frac{-1}{9}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{500}{3}$
Z		200	160	100	$\frac{340}{9}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{320}{9}$	$\frac{100000}{3}$
Z-C		0	0	0	$\frac{340}{9}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{320}{9}$	

الحل الأمثل: $X1 = 0$ ، $X2 = \frac{500}{3}$ ، $X3 = \frac{200}{3}$ ، $S1 = 0$ ، $S1 = 0$ ، $S1 = 0$، $Z = \frac{100000}{3}$

المحاضرة الرابعة: طريقة السمبلكس بإستعمال تقنية M الكبرى

تمهيد:

في المحتوى السابق لحل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة، تعرضنا لحل المسائل ذات هدف التعظيم (MAX) ومكتوبة على شكلها النظامي أين تظهر كل قيودها على الشكل أقل أو يساوي (≤)، في هذه الحالة كانت الكتابة المعيارية لها بإدخال المتغيرات الرّاكدة ($+S_i$) على طرفها الأيسر، في حين لم نتعرض لتلك المسائل التي تقتضي الكتابة المعيارية لها إدخال المتغيرات الفائضة ($-S_i$) والاصطناعية (A_i)، وتظهر هذه المتغيرات عند الكتابة المعيارية لمسائل البرمجة الخطية التي تهدف إلى التدنية (MIN)، أو مسائل التعظيم التي لم ترد على شكلها النظامي، أين لا يظهر من بين قيودها قيد أو أكثر على الشكل أقل أو يساوي (≤).

ويعتبر المتغير الاصطناعي (A_i) متغيرا وهميا ليس له معنى اقتصادي، وانما تتطلّبه الضرورة الشّكلية للبرنامج الخطي (تحقق شرط العملية).فلو أخذنا كمثال للتوضيح القيد التالي: $6X_1 + 3X_2 \geq 900$ في هذه الحالة ستكون كتابته في شكل مساواة كما يلي:

$6X_1 + 3X_2 - S_1 = 900$، وكما لاحظنا في الحل بالطريقة المبسطة أن قيم متغيرات القرار X_i تكون معدومة عند الجدول الأول، في هذه الحالة ستكون قيم حل القيد أعلاه $X_1 = 0$، $X_2 = 0$، $S_1 = -900$، وبما أن أحد قيم الحل أقل من الصفر، يعني أن الحل غير عملي، ولحل هذه المشكلة تقتضي الكتابة المعيارية للقيد إدخال المتغير الاصطناعي كما يلي:

$6X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 900$، وفي هذه الحالة ستكون قيم الحل أول عملي كما يلي:

$X_1 = 0$، $X_2 = 0$، $S_1 = 0$، $A_1 = 900$ ، وهي قيم تحقق شرط العملية بما أنها كلها موجبة أو معدومة.

ويظهر المتغير الاصطناعي في الجدول الأول في الطريقة المبسطة كمتغير أساسي، وبما أنه ليس له معنى اقتصادي سنعمل على تسريع إخراجه من عمود الأساس، وهذا عن طريق ربطه بمعامل في دالة الهدف يؤثر عكسيا على هدف المسألة ككل (يعمل معامل المتغير الاصطناعي على تعظيم دوال التدنية وتدنية دوال التعظيم)، وقد عرف هذا المعامل بـ M الكبيرة وهو

عدد كبير جدا موجب، وقد سمي هذا الإجراء بالجزاء، حيث تعاقب المتغيرات الاصطناعية بمعامل له اتجاه عكس هدف المسألة،

ولشرح الطريقة**المبسّطة باستعمال تقنية Mالكبرى Big- M Technique**

سيتم الاستعانة بالحالات التالية:

الحالة الأولى:حل البرنامج الخطي التالي بالطرقة المبسطة:

$\text{Min } Z: 4X_1 + 6X_2$

Subject to:

$3X_1 + X_2 \geq 90$

$X_1 + 2X_2 \geq 80$

$X_1 + 6X_2 \geq 120$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل:

1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Min } Z: 4X_1 + 6X_2 + M A_1 + M A_2 + M A_3$

Subject to:

$3X_1 + X_2 - S_1 + A_1 = 90$

$X_1 + 2X_2 - S_2 + A_2 = 80$

$X_1 + 6X_2 - S_3 + A_3 = 120$

$X_1 , X_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

2 – إعداد جدول سمبلكس:

Cof		4	6	0	0	0	M	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M	A_1	3	1	1-	0	0	1	0	0	90
M	A_2	1	2	0	1-	0	0	1	0	80
M	A_3	1	6	0	0	1-	0	0	1	120
Z		5M	9M	-M	-M	-M	M	M	M	290M
Z - C		5M-4	9M-6	-M	-M	-M	0	0	0	

من خلال الجدول أعلاه نتحقق من شرطي العملية والأمثلية، حيث شرط العملية محقق بما أن عناصر عمود الموارد موجبة، أما شرط الأمثلية فهو غير محقق بما أنه يوجد على الأقل عنصر موجب من عناصر السطر $Z - C$، وهدف المسألة تدنية (MIN)، وعلى هذا الأساس ننتقل لجدول سمبلكس جديد:

- عمود المتغير الداخل يوافق أعلى قيمة موجبة من السطر $Z - C$،
- سطر المتغير الخارج أقل حاصل قسمة عناصر عمود الموارد على ما يقابله في عمود المتغير الداخل،

وبذلك يكون الجدول الثاني كما يلي:

Cof		4	6	0	0	0	M	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M	A_1	6/17	0	1-	0	6/1	1	0	6/1-	70
M	A_2	3/2	0	0	1-	3/1	0	1	3/1-	40
6	X_2	6/1	1	0	0	6/1-	0	0	6/1	20
Z		7/3M+1	6	-M	-M	1/2M-1	M	M	-1/2M+1	110M+120
Z - C		7/3M-3	0	-M	-M	1/2M-1	0	0	-3/2M+1	

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ عدم تحقق شرط الأمثلية، وعليه سنعيد آلية الانتقال لجدول سمبلكس الموالي كما يلي:

Cof		4	6	0	0	0	M	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
4	X_1	1	0	17/6-	0	17/1	17/6	0	17/1-	17/420
M	A_2	0	0	17/4	1-	17/5	17/4-	1	17/5-	17/400
6	X_2	0	1	17/1	0	17/3-	17/1-	0	17/3	17/270
Z		4	6	(4M-18)/17	-M	(5M-14)17	(-4M+18)/17	M	(-5M+14)/17	(400M+3300)/17
Z - C		0	0	(4M-18)/17	-M	(5M-14)17	(-21M+18)/17	0	(-22M+14)/17	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي يجب الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد:

Cof		4	6	0	0	0	M	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
4	X_1	1	0	5/2-	5/1	0	5/2	5/1-	0	20
0	S_3	0	0	5/4	5/17-	1	5/4-	5/17	1-	80
6	X_2	0	1	5/1	5/3-	0	5/1-	5/3	0	30
Z		4	6	-2/5	-14/5	0	2/5	14/5	0	260
Z - C		0	0	-2/5	-14/5	0	2/5-M	14/5-M	-M	

نلاحظ أن شرط الأمثلية تحقق، وبالتالي فإن الجدول أعلاه هو جدول الحل الأمثل

قيم الحل الأمثل:

	S1 =0
X1 = 20	S2 = 0
X2 = 30	S3 = 80
Z = 260	

الحالة الثانية:

حل البرنامج الخطي التالي بالطريقة المبسطة:

$MINzp: 5X_1 + 6X_2$

Subject to:

$$X_1 + X_2 = 1000$$

$$X_1 \leq 300$$

$$X_2 \geq 150$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$MINzp: 5X_1 + 6X_2 + M A_1 + M A_3$

Subject to:

$$X_1 + X_2 + A_1 = 1000$$

$$X_1 + S_2 = 300$$

$$X_2 - S_3 + A_3 = 150$$

$$X_1 , X_2, S_2, S_3, A_1, A_3 \geq 0$$

2 – إعداد جدول سمبلكس:

Cof		5	6	0	0	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	1	1	0	0	1	0	1000
0	S_2	1	0	1	0	0	0	300
M	A_3	0	1	0	1-	0	1	150
Z		M	2M	0	-M	M	M	1150M
Z - C		M-5	2M-6	0	-M	0	0	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول سمبلكس الثاني

Cof		5	6	0	0	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	1	0	0	1	1	-1	850
0	S_2	1	0	1	0	0	0	300
6	X_2	0	1	0	1-	0	1	150
Z		M	6	0	-6	M	-M+6	850M+900
Z - C		M-5	0	0	-6	0	-2M+6	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول سمبلكس الثالث

Cof		5	6	0	0	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	0	0	-1	1	1	-1	550
5	X_1	1	0	1	0	0	0	300
6	X_2	0	1	0	1-	0	1	150
Z		5	6	-M	M-6	M	-M+6	550M+2400
Z - C		0	0	-M	M-6	0	-2M+6	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول سمبلكس الرابع

Cof		5	6	0	0	M	M	RHS
Var		X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
0	S_3	0	0	-1	1	1	-1	550
5	X_1	1	0	1	0	0	0	300
6	X_2	0	1	-1	0	1	0	700
Z		5	6	-6	0	0	0	5700
Z - C		0	0	-6	0	-M	-M	

نلاحظ أن شرط الأمثلية محقق، وبالتالي نعتبر الجدول الرابع جدول الحل الأمثل حيث:

$X_1 = 300$	$X_2 = 700$	$S_3 = 550$	$S_2 = 0$	$Z = 5700$

الحالة الثالثة:

حل البرنامج الخطي التالي بالطريقة المبسطة:

Max Z_P: $2X_1 + 4X_2$

Subject to:

$X_1 + X_2 = 6$

$2X_1 + X_2 \leq 10$

$2X_1 + 3X_2 \leq 18$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل:

1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

Max Z_P: $2X_1 + 4X_2 - M A_1$

Subject to:

$X_1 + X_2 + A_1 = 6$

$2 X_1 + X_2 + S_2 = 10$

$2 X_1 + 3 X_2 + S_3 = 18$

$X_1 , X_2, S_2, S_3, A_1, \geq 0$

2 – إعداد جدول سمبلكس:

Cof		2	4	0	0	-M	RHS
Var		X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	
-M	A_1	1	1	0	0	1	6
0	S_2	2	1	1	0	0	10
0	S_3	2	3	0	1	0	18
Z		-M	-M	0	0	-M	-6M
Z - C		-2-M	-4-M	0	0	0	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول سمبلكس الثاني

Cof		2	4	0	0	-M	RHS
Var		X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	
4	X_2	1	1	0	0	1	6
0	S_2	1	0	1	0	-1	4
0	S_3	-1	0	0	1	-3	0
Z		4	4	0	0	4	24
Z - C		2	0	0	0	M+4	

نلاحظ أن شرط الأمثلية محقق، وبالتالي الجدول الثاني هو جدول الحل الأمثل حيث:

$X_1 = 0$	$X_2 = 6$	$S_2 = 4$	$S_3 = 0$	$Z = 24$

المحاضرة الخامسة: حالات خاصة في البرمجة الخطية

1)- *حالة عدم وجود الحل (تعذر الحل)*: وتحدث هذه الحالة إذا كان البرنامج يضم قيود متعارضة، حيث تكون منطقة الحل للقيود في الطريقة البيانية متعاكسة ولا تتقاطع في منطقة حل واحدة للقيود، أما في الطريقة المبسطة فيتم الوصول إلى جدول الحل الأمثل ولكن احد المتغيرات الاصطناعية يكون ضمن المتغيرات الأساسية وغير معدوم.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

Max $Z = 2x_1 + 3x_2$

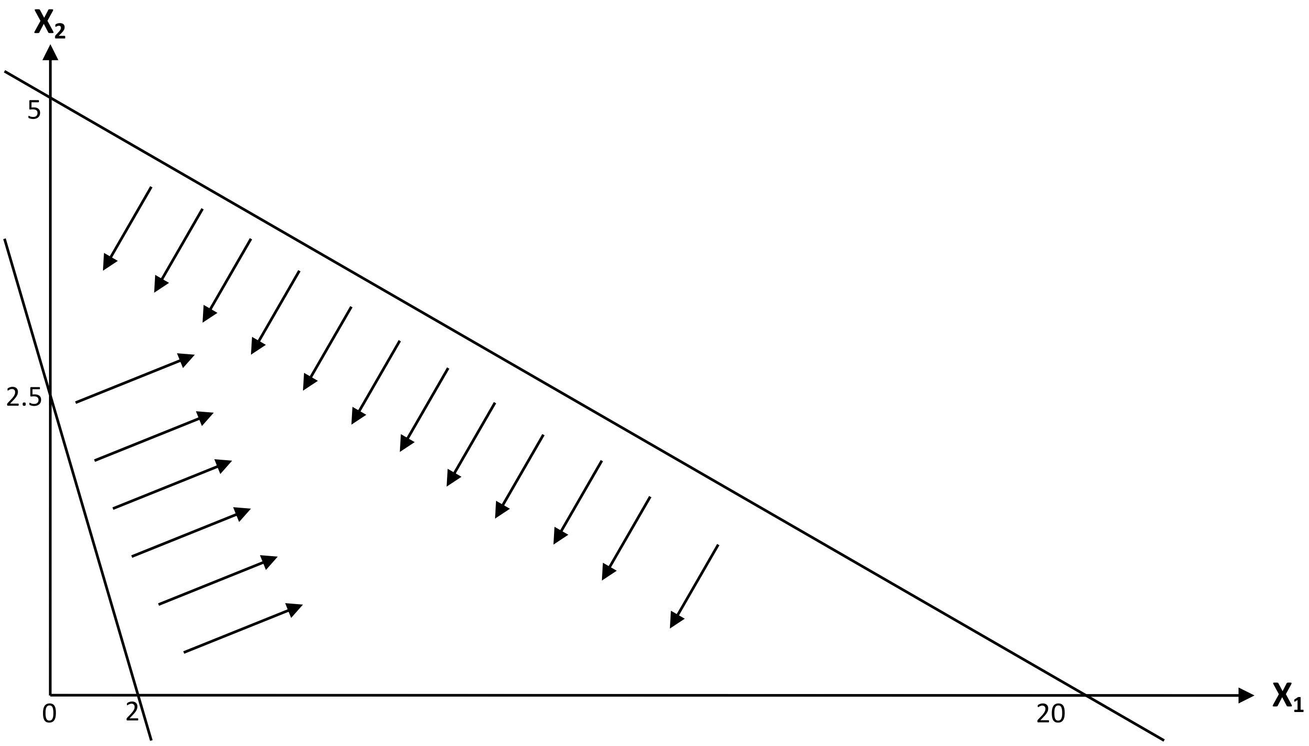
Subject to:

$5/2\, x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + 4x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



نلاحظ إن منطقتا الحل للقيدين الأول والثاني متعاكستان ولا يتقاطعان نهائيا.

- الحل بالطريقة المبسطة:

		2	3	0	0	-M	RHS
T_0		X_1	X_2	S_1	S_2	A_2	
0	S_1	5/2	2	1	0	0	5
-M	A_2	1	4	0	-1	1	20
Z		-M	-4M	0	+M	-M	-20M
Z - C		-M-2	-4M-3	0	+M	0	

		2	3	0	0	-M	RHS
T_1		X_1	X_2	S_1	S_2	A_2	
3	X_2	5/4	1	1/2	0	0	5/2
-M	A_2	0	1	-2	-1	1	10
Z		15/4	3	3/2+2M	+M	-M	15/2
Z - C		7/4	0	3/2+2M	+M	0	-10M

نلاحظ أن شرط الامثلية في T_1 محقق ولكن المتغير A_2 ضمن متغيرات الأساس وقيمته 20.

2)- *<u>حالة منطقة الحل غير المحدودة (عدم توفر الحل)</u>*: وفي هذه الحالة تكون منطقة الحل مفتوحة وبالتالي لا يكون لها حدود وتظهر هذه الحالة جلية في الحل البياني، أما في الطريقة المبسطة فان هذه الحالة تحدث عندما يتعذر تحديد سطر الدوران (المتغير الخارج من الأساس) لان جميع عناصر الدوران سالبة أو معدومة.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

Max Z = $10\ x_1 + 20\ x_2$

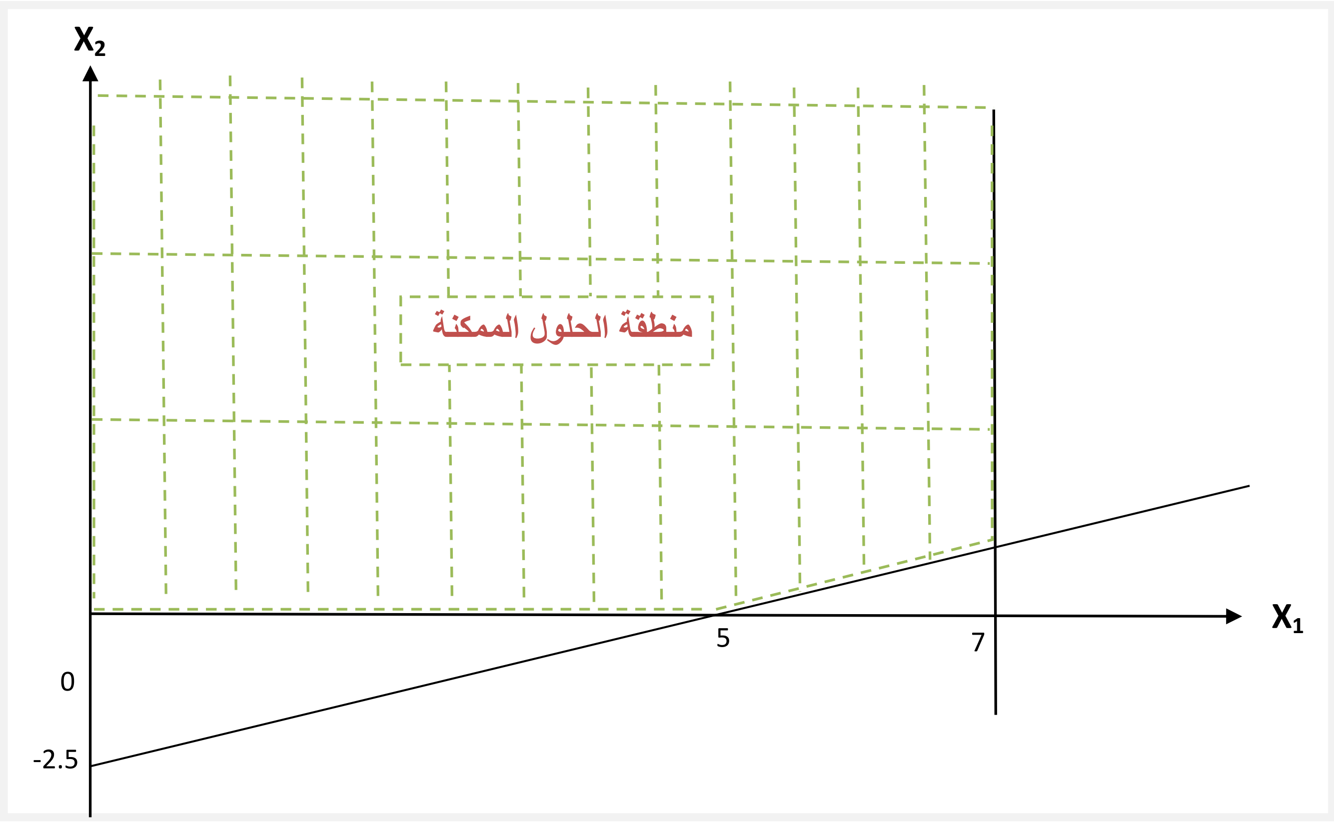
Subject to:

$x_1 - 2\ x_2 \leq 5$

$x_1 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



نلاحظ أن منطقة الحل مفتوحة من الأعلى (ليس لها حدود).

- الحل بالطريقة المبسطة:

		10	20	0	0	RHS
T_0		X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	1	-2	1	0	5
0	S_2	1	0	0	1	7
Z		0	0	0	0	0
Z - C		-10	-20	0	0	

لاحظ أن المتغير الداخل هو X_2 وعموده هو عمود الدوران ولكن يتعذر تحديد المتغير الخارج من الأساس (سطر الدوران) لأنه لا يوجد عنصر موجب من عناصر عمود الدوران (2-، 0) .

3)- *حالة الحل البديل (توفر عدة حلول بديلة)*: وهي احتمالية وجود أكثر من قيمة للمتغيرات لحل واحد لدالة الهدف، ففي الحل البياني نجد أكثر من نقطة حل امثل قيمة أي أن قيمة

(Z) متساوية عند أكثر من نقطة من منطقة الحل، وعند الحل بالطريقة المبسطة تتحقق هذه الحالة عندما تكون قيمة (Z - C) لأحد المتغيرات غير الأساسية تساوي " صفر " فيمكن أن يتحول هذه المتغير إلى متغير أساسي ويتكون جدول سمبلاكس جديد يعطي نفس الحل.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

Max $Z = 2x_1 + 4x_2$

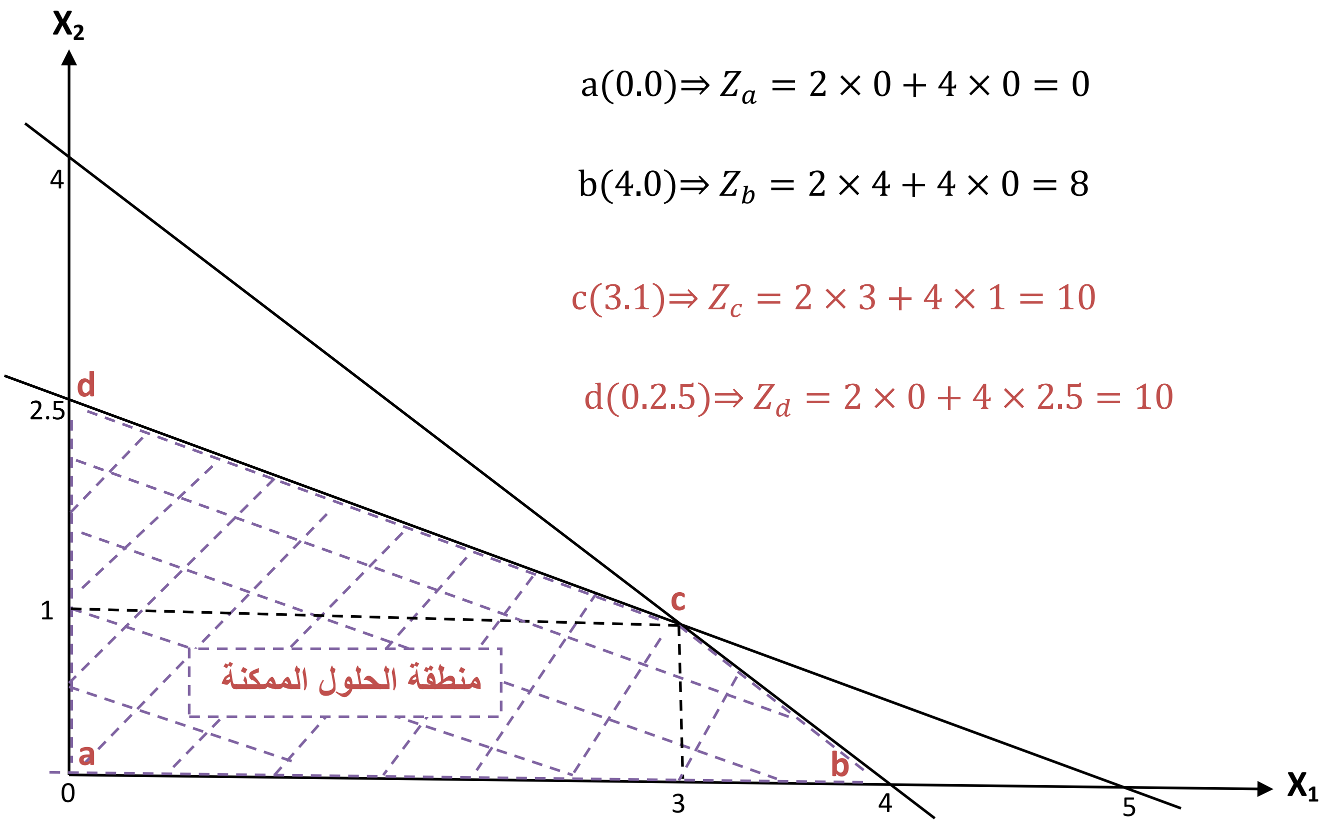
Subject to:

$x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



$$a(0.0) \Rightarrow Z_a = 2 \times 0 + 4 \times 0 = 0$$

$$b(4.0) \Rightarrow Z_b = 2 \times 4 + 4 \times 0 = 8$$

$$c(3.1) \Rightarrow Z_c = 2 \times 3 + 4 \times 1 = 10$$

$$d(0.2.5) \Rightarrow Z_d = 2 \times 0 + 4 \times 2.5 = 10$$

نلاحظ أن قيمة (Z) عند النقطة $C(3,1)$ هي 10 وأيضا عند النقطة $D(0,2.5)$ هي 10، ولكن قيم هذه النقاط مختلفة.

- الحل بالطريقة المبسطة:

		2	4	0	0	RHS
T_0		X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	1	2	1	0	5
0	S_2	1	1	0	1	4
Z		0	0	0	0	0
Z - C		-2	-4	0	0	

		2	4	0	0	RHS
T_1		X_1	X_2	S_1	S_2	
4	X_2	1/2	1	1/2	0	5/2
0	S_2	1/2	0	-1/2	1	3/2
Z		2	4	2	0	10
Z - C		0	0	0	0	

		2	4	0	0	RHS
T_2		X_1	X_2	S_1	S_2	
4	X_2	0	1	1	-1	1
2	X_1	1	0	-1	2	3
Z		2	4	2	0	10
Z - C		0	0	2	0	

وهنا نجد أن الجدول الثاني T_1 والجدول الثالث T_2 تعطي نفس القيمة لدالة الهدف (Z=10) ولكن بقيم مختلفة لـ X_1 و X_2 كما في الحل البياني.

4)- <u>حالة التكرار (الانحلال)</u>: تظهر هذه الحالة عند الحل بالطريقة المبسطة إذا كان واحد أو أكثر من متغيرات الحل الأساسي قيمته صفر وبذلك فان الحل لا يتغير ويتكرر، إما الطريقة البيانية فإنها تظهر أن احد القيود إضافي وليس له أي تأثير على الحل.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

Max Z $=3x_1 + 7x_2$

Subject to:

$2X_1 + 8X_2 \leq 16$

$X_1 + 4X_2 \leq 8$

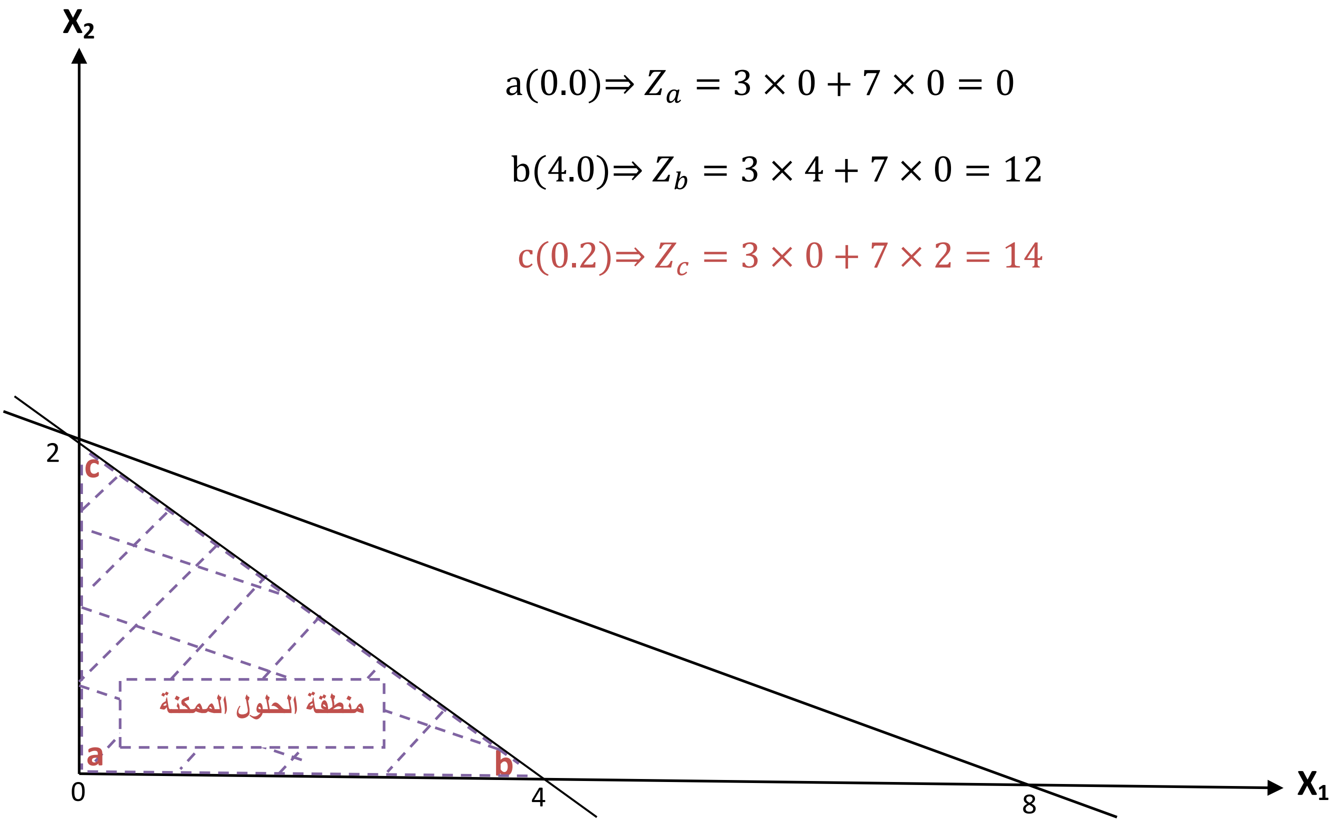
$X_1, X_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:

$$a(0.0) \Rightarrow Z_a = 3 \times 0 + 7 \times 0 = 0$$

$$b(4.0) \Rightarrow Z_b = 3 \times 4 + 7 \times 0 = 12$$

$$c(0.2) \Rightarrow Z_c = 3 \times 0 + 7 \times 2 = 14$$



نلاحظ أن القيد الأول ليس له أي تأثير على منطقة الحل.

- الحل بالطريقة المبسطة:

		3	7	0	0	RHS
T_0		X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	2	8	1	0	16
0	S_2	2	4	0	1	8
Z		0	0	0	0	0
Z - C		-3	-7	0	0	

		3	7	0	0	RHS
T_1		X_1	X_2	S_1	S_2	
3	X_2	1/4	1	1/8	0	2
0	S_2	1	0	-1/2	1	0
Z		7/4	7	7/8	0	14
Z - C		-5/4	0	7/8	0	

		3	7	0	0	RHS
T_2		X_1	X_2	S_1	S_2	
3	X_2	0	3	1/4	-1/4	2
7	X_1	1	3	-1/2	1	0
Z		3	7	1/4	5/4	14
Z - C		0	0	1/4	5/4	

نلاحظ أن الحل في الجدول الثالث T_2هو نفسه في الجدول الثاني T_1 وبالتالي لم يتغير.

المحاضرة السادسة: الثنائية (النموذج المقابل)

تمهيد:

إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية_**Primal Models**، ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب أخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل(الثنائي) **Dual Model**، أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل له ومشتق منه.

مميزات النموذج المقابل(الثنائي):

- يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل عندما يصعب حل النموذج الأولي.

- يمكن إيجاد الحل الأمثل في النموذج المقابل عند وجود متغير أساسي في النموذج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل النموذج الأولي إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأولي قيمة سالبة.

- يساعد النموذج المقابل إلى إجراء تحليل ما بعد الامثلية والتوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمشكلة أو إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل:

1- نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تعظيم **Max** فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تصغير **Min** والعكس بالعكس.

2- عدد القيود في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد المتغيرات في النموذج المقابل، وعدد المتغيرات في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد القيود في النموذج المقابل.

3- استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز X في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار إليها بالرمز U في النموذج المقابل، **وتحويل رمز دالة الهدف من Z_p في النموذج الأولي إلى Z_d** في النموذج المقابل.

4- جعل قيم الجانب الأيمن للقيود في النموذج الأولي معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل.

5- **جعل** معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي **قيم الإطراف** اليمنى لقيود النموذج المقابل.

6- تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في قيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف (إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات).

7- تغيير إشارة القيود من ≥ إلى ≤ أو العكس.

ملاحظة:

1- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تعظيم Max **فان إشارة جميع القيود يجب أن تكون اقل من أو يساوي (≤)**، وأما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تصغيرMin **فان إشارة جميع القيود يجب أن تكون اكبر من أو يساوي (≥).**

2- إذا كانت إشارة قيد مساواة (=) **في** النموذج الأولي **فان المتغير المقابل له في** النموذج المقابل **يكون متغير حر (غير محدد الإشارة)، وإذا كان متغير من متغيرات** النموذج الأولي **حر فان إشارة القيد الذي يقابله في** النموذج المقابل مساواة (=).

مثال: اكتب النموذج المقابل لكل نموذج من النماذج الأولية التالية:

$\text{Max } Z_p = 14x_1 + 20x_2 + 18x_3$

S/T

$5x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 220$

$3x_1 + 10x_2 + 7x_3 \le 360$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\text{Min } Z_p = 200x_1 + 150x_2$

S/T

$5x_1 + 12x_2 \ge 100$

$6x_1 + 10x_2 \ge 180$

$4x_1 + 15x_2 \ge 280$

$x_1, x_2 \ge 0$

$\text{Min } Z_p = 3x_1 + 7x_2 - 5x_3$

S/T

$x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 14$

$2x_1 + 3x_2 \le 22$

$x_1, x_2 \ge 0$

$\text{Min } Z_p = 10x_1 + 20x_2$

S/T

$5x_1 + 4x_2 = 40$

$2x_1 + x_2 \ge 36$

$x_1, x_2 \ge 0$

الحل:

1- النموذج الأول صيغة دالة الهدف **Max** وجميع إشارات القيود (≤) إذن النموذج المقابل هو:

$$Min\ Z_d = 220\ U_1 + 360\ U_2$$

S/T

$$5\ U_1 + 3\ U_2 \leq 14$$

$$4\ U_1 + 10\ U_2 \leq 20$$

$$8\ U_1 + 7\ U_2 \leq 18$$

$$U_1, U_2 \geq 0$$

2- النموذج الثاني صيغة دالة الهدف **Min** وجميع إشارات القيود (≥) إذن النموذج المقابل هو:

$$\mathbf{Max}\ Z_d = 100\ U_1 + 180\ U_2 + 280\ U_3$$

S/T

$$5\ U_1 + 6\ U_2 + 4\ U_3 \leq 200$$

$$12\ U_1 + 10\ U_2 + 15\ U_3 \leq 150$$

$$U_1, U_2, U_3 \geq 0$$

3- النموذج الثالث بما أن صيغة دالة الهدف **Min** فيجب تحويل إشارة القيد الثاني من (≤) إلى (≥) وذلك بضرب طرفيه في (-1) ليصبح النموذج كما يلي:

$$Min\ Z_p = 3\ x_1 + 7\ x_2 - 5\ x_3$$

S/T

$$x_1 + 5\ x_2 + x_3 \geq 14$$

$- 2x_1 - 3 x_2 \geq - 22$

$x_1, x_2 \geq 0$

ويكون بذلك النموذج المقابل له كما يلي:

$\textbf{Max } Z_d = 14 U_1 - 22 U_2$

S/T

$4 U_1 - 2 U_2 \leq 3$

$5 U_1 - 3 U_2 \leq 7$

$1 U_1 + 0 U_2 \leq -5$

$U_1, U_2 \geq 0$

4- النموذج الرابع صيغة دالة الهدف **Min** إشارة القيد الأول مساواة فبذلك يكون المتغير الأول في النموذج المقابل حر، وإشارة القيد الثاني (≥) إذن النموذج المقابل هو:

$\textbf{Max } Z_d = 40 U_1 + 36 U_2$

S/T

$5 U_1 + 2 U_2 \leq 10$

$4 U_1 + 1 U_2 \leq 20$

$U_1, U_2 \geq 0$ غير محدد الإشارة

العلاقة بين الأصلية والثنائية:

1- إذا وجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

2- من خلال الحل الأمثل للأصلية والثنائية تكون قيمة الحل الأمثل متساوية لكليهما.

3- مسائل *Max* للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها ، قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل والعكس في حالة *Min*.

4- لأي زوج أصلي ثنائي حل عملي.

5- يمكن استنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل من الحل الأمثل للنموذج الأولي والعكس بالعكس حيث:

قيم الحل الأمثل للنموذج المقابل (U_1, U_2, U_3 ....) هي قيم السطر (Z) المقابلة لمتغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

قيم الحل الأمثل للنموذج الأولي(...... X_1, X_2, X_3) هي قيم السطر (Z) المقابلة لمتغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

<u>مثال</u>: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z_p = 500\, x_1 + 100\, x_2 + 150\, x_3$$

S/T

$$x_1 + x_2 + 2\, x_3 \geq 40$$

$$x_1 + 2\, x_2 + 2\, x_3 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1- اكتب النموذج المقابل وأوجد حله الأمثل.

2- من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل استنتج الحل الأمثل للنموذج الأولي.

<u>الحل</u>: 1- كتابة النموذج المقابل وإيجاد حله الأمثل.

$$\text{Max } Z_d = 40\, U_1 + 10\, U_2 + 30\, U_3$$

S/T

$U_1 + U_2 + U_3 \leq 500$

$U_1 + 2U_2 + U_3 \leq 100$

$2U_1 + 2U_2 \leq 150$

$U_1, U_2, U_3 \geq 0$

جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل بالطريقة المبسطة:

		40	10	30	0	0	0	RHS
T_2		U_1	U_2	U_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	-1	0	1	-1	0	400
30	U_3	0	1	1	0	1	-1/2	25
40	U_1	1	1	0	0	0	1/2	75
Z		40	70	30	0	30	5	3750
Z - C		0	60	0	0	30	5	

الحل الأمثل للنموذج المقابل هو:

$U_1 = 75$, $U_2 = 0$, $U_3 = 25$, $Z_d = 3750$.

2- استنتاج الحل الأمثل للنموذج الأولي من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

$x_1 = 0$, $x_2 = 30$, $x_3 = 5$, $Z_P = Z_d = 3750$.

$Z_p = 500(0) + 100(30) + 150(5) = 3750$

المحاضرة السابعة: تحليل الحساسية

تمهيد:

افترضنا سابقاً بأن الوصول للحل الأمثل في البرمجة الخطية يفترض ثبات الأسعار سواء كانت للمواد الأولية أو السلع المنتجة و كذلك معرفة تامة للمصادر المتاحة (جميع الإمكانيات المتعلقة بالمسألة المدروسة ثابتة خلال الدراسة)، لكن في الواقع العملي وعلى ضوء التجارب وبمجرد صياغة وحل نموذج البرمجة الخطية تظهر العديد من التساؤلات حول الحل المثالي لنموذج البرمجة الخطية .ولذا يثار الاهتمام بمدى حساسية الحل الأمثل للتغيرات في مختلف المعاملات الرقمية التي يحتويها النموذج ويرجع سبب تلك التغيرات إلى ظروف عدم التأكد التي تواجه صانع القرار، بالإضافة إلى بعض التطورات التي يمكن أن تحدث مثل:

1. تطور تقنيات الإنتاج: فقد يحدث تطور علمي يؤدي إلى زيادة الطاقة الإنتاجية للألأت المستخدمة في الإنتاج مما ينعكس على الطاقة الإنتاجية للمنشأة أو المصنع وبالتالي ينتج عن ذلك تغير في الإمكانيات المتاحة.
2. المواد الأولية المستخدمة في العملية الإنتاجية: حيث أن هذه المواد تتطور بشكل دائم نتيجة التطور العلمي، كما أن أسعار هذه المواد تتغير باستمرار تبعاً للتغيرات في العرض والطلب.
3. سرعة دوران اليد العاملة: وذلك نتيجة انتقالها من مشروع لأخر و من قطاع لأخر مما يؤدي على تقليل الطاقة الإنتاجية للمنشأة.
4. حالة الاقتصاد العام: أي ما يصيب الاقتصاد من حالات ازدهار و انتعاش وحالات ركود وكساد وهذا ما ينعكس على العرض والطلب من السلع وبالتالي على أسعارها ومقدار الربح المتحقق منها للمنشأة موضوع الدراسة.

يستمد تحليل الحساسية من حقيقة مفادها ضرورة معرفة مدى حساسية (تأثر) الحل المثالي للتغيرات في البيانات المتعلقة بالمدخلات المستخدمة في نموذج البرمجة الخطية (الأسعار، التكاليف، الموارد المتاحة، .....).

إن تحليل الحساسية لا يتطلب إعادة الحل للمشكلة ولكن يتم استنباطه من جدول الحل الأمثل لذا يطلق عليه (تحليل ما بعد الامثلية).

سيتم الاعتماد على هذا المثال في توضيح تحليل الحساسية.

مثال: تنتج شركة كهربائية ثلاث أنواع من المنتوجات الكهربائية تمر بثلاث أقسام إنتاجية كما يوضحه الجدول التالي :

	ساعات العمل المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
	قسم التصنيع	قسم التجميع	قسم الرقابة
أجهزة التكييف	5	5	10
أفران كهربائية	5	10	5
مجففات كهربائية	5	5	5
الساعات المتاحة	110	180	200

أوجد حجم الإنتاج الأمثل من المنتجات الثلاث إذا كان هامش الربح الوحدوي لأجهزة التكييف 145 و.ن وللأفران الكهربائية 200 و.ن وللمجففات الكهربائية 185 و.ن.

الحل: 1- كتابة البرنامج الخطي: نقرض أن x_1: عدد أجهزة التكييف المنتجة.

x_2: عدد الأفران الكهربائية المنتجة.

x_3: عدد المجففات الكهربائية المنتجة.

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 145\,x_1 + 200\,x_2 + 185\,x_3$

القيود: القيد الأول: **قيد** قسم التصنيع $5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 110$

القيد الثاني : **قيد** قسم التجميع $5x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 180$

القيد الثالث: **قيد** قسم الرقابة $10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 200$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2- حل النموذج بالطريقة المبسطة:

		145	200	185	0	0	0	RHS
T_2		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
185	X_3	1	0	1	2/5	-1/5	0	8
200	X_2	0	1	0	-1/5	1/5	0	14
0	S_3	5	0	0	-1	0	1	90
Z		185	200	185	34	3	0	4280
Z - C		40	0	0	34	3	0	

لكي تحقق الشركة أعظم ربح يقدر بـ 4280 و.ن يجب إنتاج 14 فرن كهربائي و8 مجففات كهربائية.

ملاحظة: يمكن الوصول من جدول الحل الأمثل إلى عدة استنتاجات أهمها:

1- طبيعة الموارد: من خلال قيم المتغيرات الراكدة (S_1, S_2.....) في الحل الأمثل نحدد نوع المورد.

- موارد نادرة: استغلت كليا إذا كان $S_i = 0$.

- موارد متوفرة: لم تستغل كليا إذا كان $S_i > 0$، والجزء غير المستغل هو قيمة S_i.

2- طبيعة الأنشطة: أنشطة مربحة $(X_j \neq 0)$، و أنشطة غير مربحة $(X_j = 0)$

أولا- التغير في الإمكانيات المتاحة (ثوابت القيود) :

1- تحديد المجال المسموح به للتغير في الموارد: وهو تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) دون أن يتأثر الحل (يبقى الحل امثلا).

لتحديد مجال التغير المسموح به لأي مورد من الموارد النادرة نستخدم العلاقة التالية:

$$b_i - Max^{-}\left|\frac{RHS}{S_i}\right| \leq \Delta b_i \leq b_i + Min^{+}\left[\frac{RHS}{S_i}\right]$$

حيث Δb_i : مجال التغير المسموح به في المورد i.

b_i : قيمة المورد.

$\frac{RHS}{S_i}$: حاصل قسمة كل قيمة من عمود الطرف الأيمن للقيود (RHS) في جدول الحل الأمثل على القيم المقابلة لها في عمود المورد المدروس(S_i).

$Min^+\left[\frac{RHS}{S_i}\right]$: أصغر حاصل قسمة موجب.

$Max^-\left|\frac{RHS}{S_i}\right|$: القيمة المطلقة لأكبر حاصل قسمة سالب.

- وبالتطبيق على المثال: حدد مجال التغير المسموح به في الموارد النادرة الذي يبقي على الحل امثلا؟

المورد الأول نادر لان $S_1 = 0$ ، أي انه في قسم التصنيع استغلت كل الساعات المتاحة 110 ساعة.

المورد الثاني نادر لان $S_1 = 0$ ، أي انه في قسم التجميع استغلت كل الساعات المتاحة 180 ساعة.

المورد الثالث متوفر لان $S_1 = 90$ ، أي انه في قسم الرقابة استغلت 110 ساعة وبقيت 90 ساعة عاطلة.

<u>مجال التغير المسموح به في المورد الأول:</u>

قيم عمود RHS	قيم عمود S_1	حاصل القسمة
8	2/5	20
14	-1/5	-70
90	-1	-90

ولإيجاد الحد الأعلى نقوم بأخذ أكبر حاصل قسمة سالب بالقيمة المطلقة ونقوم بجمعه مع قيمة المورد الأول $110 + |-70| = 180$

ولإيجاد الحد الأدنى نقوم بأخذ أصغر حاصل قسمة موجبة و نقوم بطرحه من قيمة المورد الأول $110 - 20 = 90$

ويكون مدى التغير لإمكانيات القيد الأول هو: $90 \leq \Delta b_1 \leq 180$

ساعات عمل قسم التصنيع يمكن أن تزيد بـ 70 ساعة لتصل إلى 180 ساعة كحد أعلى أو تنخفض بـ 20 ساعة لتصل إلى 90 ساعة كحد أدنى.

<u>مجال التغير المسموح به في المورد الثاني:</u>

قيم عمود RHS	قيم عمود S_2	حاصل القسمة
8	-1/5	-40
14	1/5	70
90	0	/

$$180-70 \leq \Delta b_2 \leq 180+|-40|$$

$$110 \leq \Delta b_2 \leq 220$$

إذن مجال التغير المسموح به في ساعات عمل قسم التجميع هو 110 ساعة كأدنى حد و220 ساعة كأقصى حد.

<u>ملاحظة</u>: بالنسبة للموارد المتوفرة فان الحد الأعلى لتغيرها غير محدد والحد الأدنى لتغيرها هو الكمية المستغلة.

<u>2- تحديد أثر التغير في الموارد قيم الحل الأمثل:</u> **إن أي تغير في** الموارد ضمن المجال المسموح به سيؤثر على قيم الطرف الأيمن لجدول الحل الأمثل (قيم الحل الأمثل)، ويمكن ايجاد قيم الحل الأمثل الجديدة في حالة تغير قيمة مورد أو اكثر من خلال العلاقة التالية:

$$\begin{pmatrix} \text{القيم} \\ \text{المثلى} \\ \text{الجديدة} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{المصفوفة} \\ \text{الاستراتيجية} \\ \text{مصفوفة الموارد} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{عمود} \\ \text{الموارد} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix}$$

- وبالتطبيق على المثال: ما هو اثر زيادة ساعات العمل في قسم التجميع بـ 20 ساعة وانخفاض ساعات عمل قسم التصنيع الى 100 ساعة على التشكيلة المثلى للإنتاج.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{s}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 15/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

إذن هذا التغير في الموارد يغير قيم الحل الأمثل إلى:

$X_3=0, x_2=20, S_3+100$

$$Z_P = 145(0) + 200(20) + 185(0) = 4000$$

ثانيا – التغير في معاملات متغيرات دالة الهدف:

1- تحديد المجال المسموح به للتغير في معاملات متغيرات دالة الهدف:

وهو تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لتغير معاملات المتغيرات في دالة الهدف (الربح، التكلفة،....) والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثلا.

لتحديد مجال التغير المسموح به في أحد معاملات المتغيرات الأساسية نستخدم العلاقة التالية:

$$C_j - Min^{+}\left[\frac{Z-C}{X_j}\right] \leq \Delta C_j \leq C_j + Max^{-}\left|\frac{Z-C}{X_j}\right|$$

$\frac{Z-C}{X_j}$: حاصل قسمة كل قيمة من السطر (Z - C) على القيم المقابلة لها في سطر المتغير المدروس.

$Max^{-}\left|\frac{Z-C}{X_j}\right|$: أكبر قيمة سالبة من نواتج القسمة بالقيمة المطلقة.

$Min^{+}\left[\frac{Z-C}{X_j}\right]$: أصغر قيمة موجبة من نواتج القسمة.

- وبالتطبيق على المثال: أوجد مجال التغير المسموح به في معاملات الأنشطة المربحة.

النشاط X_1 هو نشاط غير مربح ($X_1=0$)

الأنشطة X_2 و X_3 هي أنشطة مربحة ($X_2=14$ و $X_3=8$)

<u>مجال التغير المسموح به في معامل النشاط X_2:</u>

قيم السطر Z -C	40	0	0	34	3	0
سطر المتغير X_2	0	1	0	-1/5	1/5	0
حاصل القسمة	/	0	/	-170	15	/

$$200 - 15 \leq \Delta C_2 \leq 200 + |-170|$$

$$185 \leq \Delta C_2 \leq 370$$

الحد الأدنى المسموح به في تغير ربح الفرن الواحد هو 185 و.ن و الحد الأعلى المسموح به في تغير ربح الفرن الواحد هو 370 و.ن.

<u>مجال التغير المسموح به في معامل النشاط X_3:</u>

قيم السطر Z -C	40	0	0	34	3	0
سطر المتغير X_3	1	0	1	2/5	-1/5	0
حاصل القسمة	40	/	0	85	-15	/

$$185 - 85 \leq \Delta C_3 \leq 185 + |-15|$$

$$100 \leq \Delta C_3 \leq 200$$

أي أن معامل النشاط X_3 (الربح الوحدوي للمجففات الكهربائية) يتغير في المجال [100,200]

ويبقى الحل أمثلا.

ملاحظة: بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية في الحل الأمثل (الأنشطة غير المربحة) يتم تحديد مجال التغير المسموح به في معاملها بموجب العلاقة التالية: $-\infty \leq \Delta C_j \leq$ قيمة Z المقابلة له

- في مثالنا مجال التغير المسموح به في معامل النشاط X_1 هو $-\infty \leq \Delta C_1 \leq 185$

<u>2-- تحديد أثر تغير معاملات متغيرات دالة الهدف على الثنائية المثلى:</u> إن أي تغير في معاملات الأنشطة في دالة الهدف لن يؤثر في قيم الحل الأمثل للأصلية (عمود الموارد) بل يؤثر

فقط على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف، ولإيجاد اثر ذلك التغير نستخدم العلاقة التالية:

$$\begin{pmatrix} \text{المصفوفة} \\ \text{الاستراتيجية} \\ \text{مصفوفة الموارد} \end{pmatrix} \times \left(\text{معاملات متغيرات الاساس في الحل الامثل}\right) = \left(\text{القيم الجديدة المثلى للثنائية}\right)$$

- وبالتطبيق على المثال: لو فرضنا أن معامل النشاط X_2 أصبح 300 و معامل النشاط X_3 أصبح 200 ما هو اثر ذلك على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف،

بعبارة أخرى ما هو اثر تغير دالة الهدف إلى الشكل: $\mathbf{Max\ Z}\ \ 145\ x_1 + \mathbf{300}\ x_2 + \mathbf{200}\ x_3$ = على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف

$$(U_1 \quad U_2 \quad U_3) = (200 \quad 300 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (20 \quad 20 \quad 0)$$

$$Z_d = 110(20) + 180(20) + 200(0) = 5800$$

$$Z_P = 145(0) + 300(14) + 200(8) = 5800$$

المحاضرة الثامنة: مشاكل النقل

تمهيد:

تعتبر مشكلة النقل أحد الحالات الخاصة في البرمجة الخطية وتعتبر من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع (أو المواد) من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بهدف سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل كلفة ممكنة.

شروط استخدام طريقة النقل:

- وجود مجموعة من مراكز أو مصادر التوزيع (المنابع)، وتمثل جانب العرض.
- وجود مجموعة من مراكز الاستلام أو الطلب (المصبات)، وتمثل جانب الطلب.
- توفر مجموعة من بدائل النقل الممكنة لكل بديل منها تكلفة معينة وقابلية استيعابية معينة.
- وجود هدف يسعى صانع القرار لتحقيقه، وغالبا ما يكون الهدف النقل بأقل تكلفة ممكنة.
- يجب أن يتساوى مجموع المعروض في مصادر التوزيع مع مجموع المطلوب مراكز الطلب.
- تجانس الموارد (نفس وحدة القياس: طن، كلغ، لتر،......)

الصيغة العامة لنموذج النقل:

بافتراض وجود (m) مصدر من مصادر التوزيع و (n) مركز من مراكز الطلب، فان الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل هي على النحو التالي:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,3,4,\dots\dots,m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_i \qquad j = 1,2,3,4,\dots\dots,n.$$

$$X_{ij} \geq 0$$

لتوضيح عناصر ومكونات نموذج مشكلة النقل لا بد من بناء جدول النقل الذي على أساسه يتم إيجاد الحل والذي يأخذ عادة الشكل التالي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	....	D_n	العرض
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	....	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C21 X_{21}	C22 X_{22}	....	C2n X_{2n}	a_2
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	....	$\downarrow$	$\downarrow$
S_m	Cm1 X_{m1}	Cm2 X_{m2}	....	Cmn X_{mn}	a_m
الطلب	b_2	b_2	....	b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

دالة الهدف: الهدف هو تقليل تكاليف النقل الإجمالية.

$$\text{Min } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \cdots \ldots . \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + C_{mn}X_{mn}$$

القيود:

- قيود مصادر الإنتاج: تساوي الكمية المعروضة في كل مصدر مع الكميات الموزعة منه نحو جميع مراكز الطلب.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \cdots \ldots \ldots \ldots + X_{1n} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \cdots \ldots \ldots \ldots + X_{2n} = a_2$$
$$\vdots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + \cdots \ldots \ldots + X_{mn} = a_m$$

- *قيود مراكز الاستهلاك: تساوي الكمية المطلوبة في كل مركز مع الكميات الموزعة اليه من جميع مصادر الإنتاج.*

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+\cdots\ldots\ldots\ldots+X_{m1}=b_1$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+\cdots\ldots\ldots\ldots+X_{m2}=b_2$$
$$\vdots$$
$$X_{1n}+X_{2n}+X_{3n}+\cdots\ldots\ldots..+X_{mn}=b_n$$

شرط عدم السلبية:

$$X_{11},X_{12},X_{13},\ldots\ldots\ldots\ldots,X_{mn}\geq 0$$

حيث:

C_{ij}: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i نحو المركز j.

X_{ij}: الكمية المنقولة من المصدر i نحو المركز j.

a_i: الكمية المعروضة في المصدر i.

b_j: الكمية المطلوبة في المركز j.

<u>طرق حل نموذج النقل الخطي:</u> تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين الأولى هي مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول وتتم بعدة طرق والثانية هي مرحلة اختبار الحل الأساسي وتحسينه وتتم بطريقتين.

<u>أولا/ تحديد الحل الأولي:</u> هذا الحل المبدئي يضمن أن كل منطقة إنتاجية توزع إنتاجها وأن كل مركز توزيع يشبع حاجته، حيث في الحل الأولي يجب تساوي العرض والطلب.

مثال: شركة الجنوب للنقل تريد نقل السلع من ثلاث مخازن (S_1, S_2, S_3) نحو ثلاث مراكز تسويق (D_1, D_2, D_3)، الكمية المعروضة في كل مخزن والكمية المطلوبة في كل مركز وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلع مبينة في الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2	1	8	100
S_2	7	4	3	250
S_3	6	2	4	200
الطلب	150	180	220	

- اوجد خطة النقل بأقل تكلفة.

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: من خلال اسم هذه الطريقة، فان التوزيع يكون في الخانة التي تقع في أقصى الشمال الغربي (أول خانة يسارا) حيث نطبق القاعدة $X_{ij} = Min\ (a_i , b_j)$ وكلما نوزع كمية يتم تعديل الطلب والعرض.

إن عملية التوزيع بموجب هذه الطريقة تستمر بنفس الصف حتى يتم إغلاقه ونفاذ الكمية المعروضة في المصدر المقابل للصف المعني.

- إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

في البداية يجب التأكد من شرط التوازن: مجموع العرض = مجموع الطلب

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2 100	1	8	100 0
S_2	7 50	4 180	3 20	250 200 20 0
S_3	6	2	4 200	200 0
الطلب	150 50 0	180 0	220 200 0	550 550

التكلفة الإجمالية للنقل هي: $Z = 2(100)+7(50)+4(180)+3(20)+4(200)=2130$

طريقة أقل التكاليف: وهي أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية وتختلف عنها في إيجاد الحل الأولي، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ في ملء الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا دائما بتطبيق قاعدة التوزيع $X_{ij} = Min\ (a_i\ ,\ b_j\ )$ حتى يتم استفاء كل العرض والطلب.

- إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة اقل التكاليف.

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2	1 100	8	100 0
S_2	7 30	4	3 220	250 220 0
S_3	6 120	2 80	4	200 80 0
الطلب	150 120 0	180 80 0	220 0	550 / 550

التكلفة الإجمالية للنقل هي: $Z =1(100)+7(30)+3(220)+6(120)+2(80)=1850$

طريقة فوجل التقريبية Vogel: وتعرف أيضا بطريقة الجزاء وتقوم هذه الطريقة على الخطوات التالية:

خ1- حساب الفرق بين أقل تكلفتين للأعمدة وكذلك للصفوف وتأشير هذه الفروق على جانبي الجدول.

خ2- تحديد العمود أو السطر ذو الفرق الأكبر.

خ3- نختار الخلية ذات التكلفة الأقل في السطر أو العمود المحدد ويتم إشباعها بالكامل وذلك بتطبيق قاعدة التوزيع $X_{ij} = Min\ (a_i\ ,\ b_j\ )$ ونعدل الطلب والعرض.

خ3- نعيد الخطوات السابقة إلى أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

ملاحظة:

1- إذا تساوى اكبر فرق لأكثر من سطر أو عمود نحسب نأخذ الفرق الثاني ثم الثالث .... وهكذا، وإذا تساوت جميع الفروق نختار الخانة الأقل تكلفة.

2- تعتبر طريقة فوجل التقريبية أكثر دقة في توزيعها مقارنة بالطرق الأخرى فهي تمكننا من الوصول إلى الحل الأمثل أو حل قريب من الحل الأمثل.

- إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل فوقل التقريبية.

	D_1	D_2	D_3	العرض			
S_1	2 100	1	8	100	1		
S_2	7 30	4	3 220	250	1	1	4
S_3	6 20	2 180	4	200	2	2	2
الطلب	150	180	220				
	4	1	1				
	1	2	1				
	1		1				

التكلفة الإجمالية للنقل هي: $Z = 2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)=1550$

وهي أقل من تكلفة مقارنة بالتكلفة عند استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو طريقة أقل التكاليف.

ثانيا/ اختبار أمثلية الحل الأولي: إن الحصول على الحل الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى للاختيار هل الحل الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل؟ وهل هو الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولا أمثل منه؟

طريقة التوزيع المعدلة MODI: وتعتمد هذه الطريقة على الأرقام القياسية للصفوف والأعمدة على افتراض منطقي هو أن تكون هناك في كل صف أو عمود على الأقل خلية مشغولة واحدة لأنها ضرورية لاحتساب الأرقام القياسية لكل صف أو عمود، أما خطوات الطريقة فهي:

خ1- احتساب الرقم القياسي لكل صف Ui ولكل عمود Vj وذلك بالاعتماد على الخلايا المشغولة فقط من خلال ما يأتي:

- افتراض أن الرقم القياسي للصف الأول في جدول الحل الأول هو صفر أي $U_1=0$.

- احتساب الرقم القياسي للعمود الخاص بكل خلية مشغولة في الصف الأول وفق الصيغة:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

- استخدام الأرقام القياسية لكل عمود ولكل صف أيضا التي تم التوصل إليها لاحتساب الأرقام القياسية للصفوف والأعمدة المتبقية.

خ2- تقييم الخلايا الفارغة بحساب التكاليف غير المباشرة لكل خلية فارغة باستخدام الصيغة التالية:

$$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

خ4- يكون الحل امثلا إذا كانت التكاليف غير المباشرة للخلايا الفارغة موجبة او معدومة، ولكن في حالة وجود تكاليف سالبة فان ذلك يعني ان شغل الخلايا الموافقة لها سيؤدي الى خفض تكاليف النقل (تحسين الحل).

خ5- من بين الخلايا ذات التكاليف السالبة نختار الخلية الأكثر سلبية في التكلفة لان شغلها يكون أكثر فاعلية في خفض التكاليف، ويتم عمل مسار مغلق لها بشرط:

- أن يبدأ المسار من الخلية الفارغة المعنية وينتهي عندها.

- أن يتألف المسار من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المملوءة في الزوايا القائمة.

خ6- وضع إشارة (+) للخلية الفارغة المراد ملؤها ثم إشارة (-) للخلية التي تليها في المسار ثم إشارة (+) للخلية التي تليها في المسار، وهكذا تتالي الإشارات (+) و (-) إلى نهاية المسار المغلق.

أقل قيمة في الخلايا التي تحمل إشارة (-) يتم إضافتها إلى الخلايا التي تحمل إشارة (+) وإنقاصها من قيم الخلايا التي تحمل إشارة (-).

خ7- تعديل الجدول وفقا لما تم في الخطوة السابقة وإعادة الخطوات.

ملاحظة: إن تطبيق هذه الطريقة يتطلب أن يكون الحل الأولي أساسي [عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة)= عدد الصفوف + عدد الأعمدة- 1]

<u>مثال</u>: اختبار أمثلية الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة اقل التكاليف لمؤسسة الجنوب.

عدد الخلايا المملوءة = عدد المراكز + عدد المصادر - 1 (الحل الأولي أساسي)

- حساب الرقم القياسي لكل صف U_i ولكل عمود V_j:

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	2	1 100	8	100	$U_1=0$
S_2	7 30	4	3 220	250	$U_2=2$
S_3	6 120	2 80	4	200	$U_3=1$
الطلب	150	180	220	550 550	
	$V_1=5$	$V_2=1$	$V_3=1$		

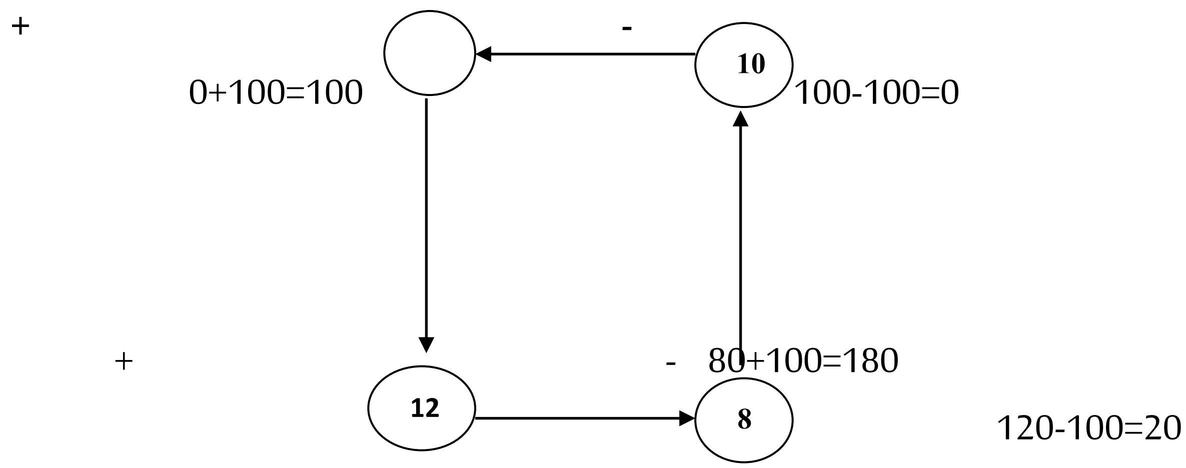
التكلفة الإجمالية للنقل هي: $Z = 1(100)+7(30)+3(220)+6(120)+2(80)=1850$

- تقييم الخلايا الفارغة:

$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$	الخلية
2-0-5=-3	S_1،D_1
8-0-1=7	S_1،D_3
4-2-1=1	S_2،D_2
4-1-1=2	S_3،D_3

الخلية (S_1،D_1) شغلها إلى تخفيض تكاليف النقل.

- المسار المغلق للخلية (S_1،D_1): موضح في الجدول



Min (100, 120) =100

- تعديل الجدول:

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	2 100	1	8	100	$U_1=0$
S_2	7 30	4	3 220	250	$U_2=5$
S_3	6 20	2 180	4	200	$U_3=5$
الطلب	150	180	220	550 550	

$V_1=2$ $V_2=-3$ $V_3=-2$

التكلفة الإجمالية للنقل هي: $Z=2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)=1550$

- إعادة الخطوات السابقة: (اختبار أمثلية الحل الجديد)

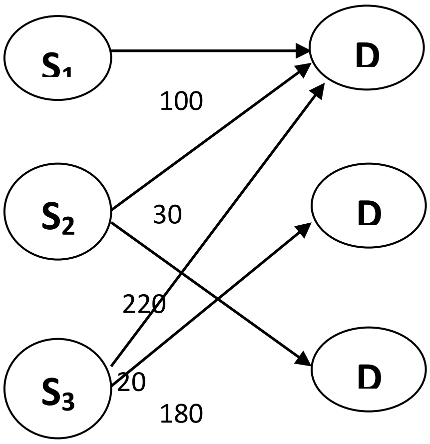
عدد الخلايا المملوءة = عدد المراكز + عدد المصادر - 1 (الحل أساسي)

- حساب الرقم القياسي لكل صف U_i ولكل عمود V_j: (موضحة في الجدول أعلاه)

- تقييم الخلايا الفارغة:

الخلية	$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
S_1،D_2	1-0-(-3)= 3
S_1،D_3	8-0-(-2)=10
S_2،D_2	4-5-(-3)=2
S_3،D_3	4-5-(-2)=1

بما أن التكاليف المباشرة لجميع الخلايا الفارغة موجبة فان الجدول السابق يعطي خطة النقل المثلى وهي:



التكلفة الإجمالية للنقل هي: Z =2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)=1550