نتيجة(4.2.1):مساحة المتراص D من $\mathfrak{R}^2$ تعطى حسب العلاقة

$$AireD = \frac{1}{2}\iint_D (xdy - ydx)$$

مثال(6.2.1): استخدم قانون قرين – ريمان لحساب التكامل المنحني للشكل التفاضلي التالي

$w = \ln\left(\frac{y+2}{x^2+1}\right)dx + x\frac{3y+7}{y+2}dy$ على طول الدائرة $S(1,o(0,0))$ الموجه في الاتجاه الموجب

الحل: $$\int_{\partial D} w = \iint_D \left(\frac{3y+7}{y+2} - \frac{1}{y+2}\right)dxdy = \int_D 3dxdy$$

$$= 3Aire(D) = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta = 3\pi$$

3-1 - التكامل الثلاثي:

تعريف و خواص(1.3.1): ليكن $IR^3 \supset V$ حجم مغلق و محدود (متراص)معرف بالعبارة

$V = \{(x, y, z) \in IR^3 / (x, y) \in D, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$ حيث $IR^2 \supset D$

و $g_1, g_2 : D \to IR$ دالتين مستمرتين، والتكن $[a_3, b_3], [a_2, b_2], [a_1, b_1]$ مساقط الحجم V على المحاور oz, oy, ox على الترتيب. نعتبر متوازي المستطيلات الجزئي $P_{i,j,l}$ المعرف بـ: $P_{i,j,l} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_l, z_{l+1}] \cap V$ ، لدينا مجموع ريمان

$$\forall X_{i,j,l} \in P_{i,j,k}, R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) v_{i,j,l}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k-1} f(X_{i,j,l})(x_{i+1}, x_i)(y_{j+1}, y_j)(z_{l+1}, z_l)$$

تعريف(2.3.1): تكون الدالة المستمرة $f : V \to IR$ قابلة للمكاملة على الحجم V إذا كانت

$\lim_{v_{i,j,l} \to 0} R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \lim_{v_{i,j,l} \to 0}\sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) v_{i,j,l}$ موجودة و محدودة و تسمى التكامل الثلاثي للدالة f على الحجم V و نكتب

$$\lim_{v_{i,j,l} \to 0} R(f, S(V), X_{i,j,l}) = \lim_{v_{i,j,l} \to 0}\sum_{i,j,l} f(X_{i,j,l}) v_{i,j,l} = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

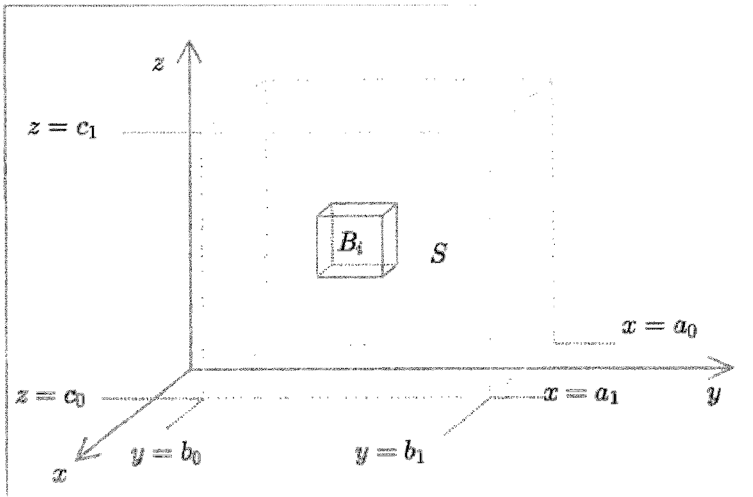
ملاحظة(1.3.1): الخواص الجبرية للتكاملات الثنائية صحيحة من أجل التكاملات الثلاثية.

طرق حساب التكامل الثلاثي:

حالة متوازي السطوح(متوازي المستطيلات)

ليكن متوازي السطوح S المحدود بالمستويات الستة

$a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2, c_1 \le z \le c_2$ كما هو موضح في الشكل



شكل 1

مثال(1.3.1):: ليكن S مكعب معرف كما يلي:

$$S = \{(x, y, z) \in \Re^3 : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, -2 \le z \le 0\}$$

احسب التكامل الثلاثي $\iiint\limits_S ye^{xy} dv$

الحل:

$$\iiint\limits_S ze^{xy} dv = \int_0^2 \int_1^3 \int_{-2}^0 ye^{xy} dzdxdy = 2\int_0^2 \int_1^3 ye^{xy} dxdy$$

$$= 2\int_0^2 \left(e^{3y} - e^y\right)dy = 2\left(\frac{e^{3y}}{3} - e^y\right)\Big|_0^2 = \frac{2e^6}{3} - 2e^2 + \frac{4}{3}$$

قانون فبني:

نظرية(1.3.1): ليكن $D \subset \Re^2$ و التكن الدالتين المستمرتين $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \Re$ و V متراص من IR^3 معرف تحليليا بـ

$$V = \{(x, y, z) \in \Re^3 / (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$$

التكامل الثلاثي للدالة المستمرة $f : V \to IR$ هو

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right)dxdy$$ و بنفس الكيفية اذا كان

او يكون لدينا مثلا $V' = \{(x,y,z)\in \Re^3 / (x,z)\in D, \phi_1(x,z)\le y \le \phi_2(x,z)\}$

$$V'' = \{(x,y,z)\in \Re^3 / (y,z)\in D, \gamma_1(y,z)\le x \le \gamma_2(y,z)\}$$

مثال(2.3.1): احسب حجم المنطقة $V \subset \Re^3$ المحددة بالمنحنيين للدالتين

$\varphi_1(x,y) = x^2+y^2$ و $\varphi_2(x,y) = 4-3(x^2+y^2)$ و اليكن D اسقاط V على

المستوي oxy وبالتالي D محدد بالمنحنى c الناتج عن تقاطع تمثلي φ_1, φ_2 أي

$D = \{(x,y)\in IR^2 / x^2+y^2 \le 1\}$ و

$$V = \{(x,y,z)\in IR^3 / (x,y)\in D, x^2+y^2 \le z \le 4-3(x^2+y^2)\}$$

وبالتالي حسب نظرية فبني

$$vol(V) = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4-3(x^2+y^2)} dz \right) dxdy = 4\iint_D \left[1-(x^2+y^2)\right] dxdy$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = 2\pi$$

نظرية(2.3.1):: نفرض أن المنطقة V معرفة بالمنحنيات التالية:

$$\varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y),\ p(x)\le y \le q(x),\ a\le x\le b$$

بحيث الدوال $\varphi_1, \varphi_2, p, q$ مستمرة و كانت الدالة f مستمرة في S فإن

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z) dxdydz$$

مثال(3.3.1):: اوجد قيمة التكامل $\iiint_V (x^2-y^2)dv$ حيث

$V = \{(x,y,z)\in \Re^3; -y^2 \le z \le x^2; (x,y)\in D\}$ و

$$D = \{(x,y)\in \Re^2; 0\le y \le x; 0\le x\le 1\}$$

الحل:

$$\iiint_V (x^2-y^2)dv = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_{-y^2}^{x^2} (x^2-y^2) dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x (x^4-y^4) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{4}{5} x^5 dx = \frac{2}{15}$$

تحويل المتغيرات:

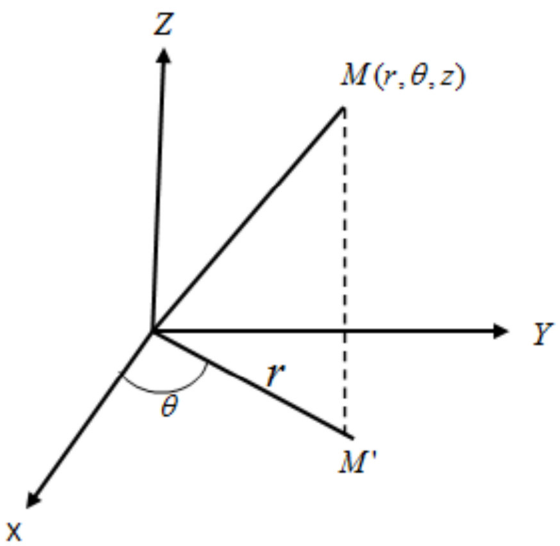
نظرية(2.3.1): ليكن U_2, U_1 مفتوحين غير خاليين من $\Re^3$ و اليكن $T : U_1 \to U_2$ تطبيق تقابلي من الصنف C^1 وتحويله العكسي $T^{-1} : U_2 \to U_1$ فإنه من أجل كل متراص $V' \subset U_1$ من أجل كل دالة مستمرة $f : U_1 \to U_2$ لدينا

$$\iiint_{T(V')} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V'} (f \circ T)(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$$

الاحداثيات الاسطوانية:

اذا عينا النقطة M' مسقط النقطة M على المستو (XOY) قطبيا النقطة M تمثل بالثلاثية (r,θ,z) و التي تسمى الاحداثيات الاسطوانية و الانتقال من الاحداثيات الديكارتية الى الاسطوانية بالتحويل التالي:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



نتيجة(1.3.1): (الاحداثيات الاسطوانية) اذا كان $T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ فإن $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$ و بالتالي $\iiint_{T(V')} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V'} f(r,\theta,z)\,rdrd\theta dz$

مثال(4.3.1): احسب التكامل الثلاثي $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ على الاسطوانة

$V=\{(x,y,z)\in \Re^3 / x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le h, h>0\}$ و

$$V'=\{(r,\theta,z)\in \Re^3 / 0\le r\le R, 0\le \theta\le 2\pi, 0\le z\le h, h>0\}$$

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^h r^2dz\right)d\theta\right)dr=\frac{2\pi}{3}hR^3$$

مثال(5.3.1):: احسب التكامل الثلاثي $\iiint_V x^2dv$ على الاسطوانة

$V=\{(x,y,z)\in \Re^3 / x^2+y^2\le 1, (x^2+y^2)^2\le z\le 1\}$ و

$$V'=\{(r,\theta,z)\in \Re^3 / 0\le r\le 1, 0\le \theta\le 2\pi, r^4\le z\le 1\}$$

الحل:

$$\iiint_V x^2dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_{r^4}^1 r^2\cos^2\theta dz\right)rdrd\theta=\pi\int_0^1\left(r^3-r^7\right)dr$$

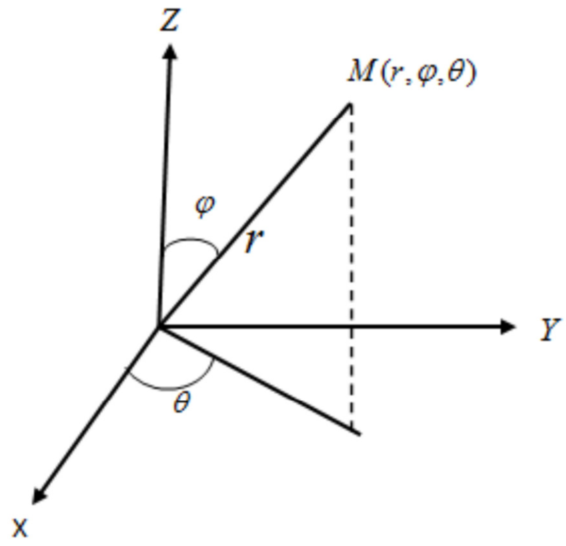
$$=\pi\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^8}{8}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{8}$$

الاحداثيات الكروية:

يتم تعيين النقطة M في الفضاء (OX,OY,OZ) بالثلاثية المرتبة (r,φ,θ) و التي نسميها الاحداثيات الكروية حيث r هو بعد M عن المبدأ O و φ قيس الزاوية $(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM})$ و θ قيس الزاوية القطبية و يتم التحويل من الاحداثيات الديكارتية الى الكروية وفق العلاقات التالية

$$\begin{cases} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{cases}$$

و يكون هذا التحويل تقابلي إذا تحقق $(r>0, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi)$.



نتيجة(2.3.1): (الاحداثيات الكروية) اذا كان

$T(r,\varphi,\theta)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ حيث $0\leq r\leq R, R\in IR_+$

، $0\leq\varphi\leq\pi$ ، و $0\leq\theta\leq 2\pi$

فإن $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$ و بالتالي

$$\iiint_{T(V')} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V'} f(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

مثال(6.3.1): احسب حجم الكرة ذات المركز $o(0,0,0)$ و نصف القطر R أي

$V=\{(x,y,z)\in IR^3 / x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$ و بالتالي

$V'=\{(r,\varphi,\theta)\in IR^3 / 0\leq r\leq R, 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ و منه

$$vol(V)=\iiint_V dv=\int_0^R(\int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi} r^2\sin\theta d\theta)d\varphi)dr=4\pi R^3/3.$$

مثال(7.3.1):: احسب التكامل $\iiint_V x^2dv$ حيث V يمثل المجسم المحصور بين الكرتين

$x^2+y^2+z^2=4$ و $x^2+y^2+z^2=9$

الحل: لدينا $V=\{(x,y,z)\in IR^3 / 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 9\}$،

وبالتالي $V'=\{(r,\varphi,\theta)\in IR^3 / 2\leq r\leq 3, 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ و منه:

$$\iiint_V x^2 dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^{3} r^4 \cos^2\theta \sin^3\varphi dr d\varphi d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(3^5-2^5\right)\sin^3\varphi \cos\theta d\varphi d\theta$$

$$= -\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right) d\cos\varphi \cos^2\theta d\theta = \frac{844}{15}\int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta = \frac{844\pi}{15}.$$

تغيير المتغيرات بصورة كيفية

مثال(8.3.1):: Ω منطقة من الفضاء xyz معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x, y, z); 1 \le x \le 2, 0 \le xy \le 2, 0 \le z \le 1\}$$

فأوجد التكامل $\iiint_\Omega \left(x^2 y + 3xyz\right) dxdydz$

الحل: من خلال عبارة الدالة المكاملة وحدود المنطقة Ω يستحسن ان نستعمل التحويل التالي:

$$u = x, v = xy, w = 3z \Rightarrow x = u, y = \frac{u}{v}, z = \frac{3}{w}$$

و منه G صورة المنطقة Ω بهذا التحويل تعرف كما يلي:

$G = \{(u, v, w) \in IR^3; 1 \le u \le 2, 0 \le v \le 2, 0 \le w \le 3\}$ والمحدد الجاكوتي

المرفق هو
$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} = 1/3u$$

إذن
$$\iiint_\Omega \left(x^2 y + 3xyz\right) dxdydz = \int_1^2\left(\int_0^2\left(\int_0^3 (uv+vw)(1/3u)dw\right)dv\right)du$$

$$= \int_1^2\left(\int_0^2\left(v + \frac{3v}{2u}\right)dv\right)du = \int_1^2\left(2+\frac{3}{u}\right)du = 2 + \ln 2.$$