الفصل الأول
التكاملات المضاعفة

يعتبر فرع التحليل من الفروع الهامة في الرياضيات الحديثة، والذي يقدم حلولا عملية لكثير من المسائل المطروحة في مختلف التخصصات التقنية ومن بين أهم الأدوات المستعملة في هذا التخصص مفهوم التكامل الذي يعد أهم فروع الرياضيات البحتة و التطبيقية، يلعب دورا رئيسيا في تطوير الرياضيات، ويساهم مساهمة فعالة في حل المسائل المطروحة في ميادين شتى كالطب والفيزياء والكيمياء والهندسة....إلخ.

ليس من السهل اعطاء مفهوما بسيطا وميسرا من خلال هذا القدر البسيط من المعلومات حول التكامل الثنائي و الثلاثي وذلك خشية الحشو و الإكثار على الطالب مع ذلك يمكنه الجوع إلى المراجع التي اعتمدت عليها في تلخصي هذا الفصل و هي المرجع $[1-6]$، $[8-9]$، $[11-13]$، $[15]$.

1-1 - تذكير:

1-1-1- الدوال متعددة المتغيرات

الدالة لمتغيرين:

تعريف(1.1.1): نسمي دالة f لمتغيرين حقيقين (x,y) العلاقة التي ترفق بكل ثنائية (x,y) من مجال التعريف $D_f \subset IR^2$ العدد الحقيقي الوحيد نرمز اليه $f(x,y)$

مثال(1.1.1): عين مجموعة تعريف الدالة $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2/9-x^2-y^2\geq 0\}$$

اي

$$=\{(x,y)\in IR^2/x^2+y^2\leq 9\}$$

النهايات و الاستمرار:

تعريف(2.1.1): يكون العدد الحقيقي l نهاية للدالة f عندما (x,y) تنتهي الى (a,b) - ليس شرطا من D_f - و نكتب $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$ اذا وفقط اذا كان

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x,y)\in D_f;\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\to|f(x,y)-l|<\varepsilon$$

مثال(2.1.1): احسب نهاية الدالة f عندما (x,y) تنتهى الى $(0,0)$ حيث

$$f(x,y)=\frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

ملاحظة(1.1.1): اذا كانت $f(x,y)\to l_1$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ وفق المسار c_1 و كانت $f(x,y)\to l_2$ عندما $(x,y)\to(a,b)$ وفق المسار c_2 بحيث $l_1\neq l_2$ فإن $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غير موجودة

مثال(3.1.1): احسب النهاية ان وجدت عندما $(x,y)\to(0,0)$ الدوال التالية:

$$h(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ، g(x,y)=\frac{x^2+\sin^2 y}{2x^2+y^2} \quad ، f(x,y)=xy\cos(x-2y)$$

الاستمرار:

1. تعريف(3.1.1): نقول عن دالة لمتغيرين حقيقين f انها مستمرة عند (a,b) اذا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$ و نقول عن الدالة f انها مستمر ة على المنطقة D اذا كانت مستمرة عند كل نقطة (a,b) من D

مثال(4.1.1): بين فيما اذا كانت الدالة التالية مستمرة
$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x+xy+y^2};(x,y)\neq(0,0)\\ 0;si,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الاشتقاق الجزئي:

تعريف(4.1.1): المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x عند النقطة(a,b) و نرمز له $f'_x(a,b)$ وذلك بتثبيت y $(y=b)$ و نحسب المشتق بالنسبة للمتغير x أي $f'_x(a,b)=g'(a)$ و نكتب

$$g'(a)=\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f'_x(a,b)$$

بنفس الطريقة المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير y عند النقطة(a,b)

$$f'_y(a,b)=\lim_{h\to0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

نرمز للمشتقات الجزئية كما يلي:

$$f'_y(x,y)=f'_y=\frac{\partial f}{\partial y}=D_2f=D_yf \quad ، f'_x(x,y)=f'_x=\frac{\partial f}{\partial x}=D_1f=D_xf$$

مثال(5.1.5): احسب المشتقات الجزئية الأولى و الثانية للدالتين بالنسبة للمتغير x,y

$$، g(x,y)=\ln(1-xy), h(x,y)=xy\sin x$$

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير x,y .

المشتقات من الرتب العليا:

$$f_{x^n}^{(n)}=\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \;\ldots\ldots\; (f'_x)'_y=f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \quad و \quad (f'_x)'_x=f''_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

مثال(6.1.1): احسب المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x,y

$$، f(x,y)=e^{xy-3}+y\sin xv$$

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير x,y .

الدوال لثلاث متغيرات او اكثر:

تعريف(5.1.1): نسمي دالة f لثلاث متغيرات حقيقية (x, y, z) العلاقة التي ترفق بكل ثلاثية (x, y, z) من مجال التعريف $IR^3 \supset D_f$ عدد حقيقي وحيد نرمز اليه $f(x, y, z)$.

مثال(7.1.1): عين مجموعة تعريف الدالة $g(x, y, z) = \ln(z - y) + xy\sin z$

$$D_g = \{(x, y, z) \in IR^3 / z - y > 0\}$$

اي
$$= \{(x, y, z) \in IR^3 / z > y\}$$

المشتقات الجزئية:

تعريف(6.1.1): المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x عند النقطة (x, y, z) و نرمز له $f'_x(x, y, z)$ و

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

و اذا كانت الدالة ذات n متغير اي $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ فإن

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, .., x_i + h, .., x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} = f_{x_i}^{(i)}$$

و نرمز $f_{x_i}^{(i)} = D_{x_i} f$ ، المشتقات الجزئية المتتابعة للتابع $f_{x_1 \dots x_k}^{(k)} = D^k{}_{x_1 .. x_k} f$

مثال(8.1.1): احسب المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x, y

$g(x, y, z) = \ln(z - y) + xy\sin z$ ،

ثم المشتقات الجزئية من الرتب الثانية و الثالثة بالنسبة للمتغير x, y.

2-1-1 - الدوال الدرجية:

تعريف(7.1.1): نسمي تقسيما للمجال $[a, b]$ من IR كل جملة $(x_0, \dots\dots, x_n)$ من نقط المجال $[a, b]$ بحيث $a = x_0 < x_1 \dots . < x_n = b$ ندعو خطوة التقسيم $S = (x_0, \dots, x_n)$ للمجال $[a, b]$ العدد الحقيقي الموجب $|S|$ والمعرفة بـ:

$$|S| = \underset{0 \le i \le n-1}{Max}(x_{i+1} - x_i)$$

تعريف(8.1.1): نسمي الدالة الحقيقية f المعرفة على المجال $[a, b]$ من IR دالة درجية (سلمية)على المجال $[a, b]$ اذا وجد تقسيم $S = (x_0, \dots, x_n)$ بحيث تكون f ثابتة على كل مجال جزئي $]x_i, x_{i+1}[, i = 0,1,2,\dots, n$ و نسمي S تقسيما موصولا بالدالة f ، ونسمي

ايضا $\forall x\in[x_i,x_{i+1}];R(f,s([a,b]))=\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)f(x)$ مجموع ريمان

المرفق بالتقسيم S

التكامل:

ليكن $IR\supset[a,b]$ ، $E([a,b])$ يرمز الى مجموعة الدوال الدرجة المعرفة على $[a,b]$

تعريف(9.1.1): ليكن $f\in E([a,b])$ و اليكن التقسيم $S=(x_0,\dots,x_n)$ للمجال $[a,b]$ بحيث $\forall x\in\,]x_i,x_{i+1}[,i=0,1,2,\dots,n;f(x)=c_i$

تكامل التابع f على المجال $[a,b]$ العدد الحقيقي الذي نرمز إليه $\int_a^b f(x)dx$ والمعرف بـ:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{x_{i+1}-x_i\to 0}R(f,S([a,b]))=\lim_{x_{i+1}-x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)c_i$$

نظرية(.1.1.1): اذا كان f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ فانه توجد متتالية من الدوال الدرجية (f_n) تقارب بانتظام نحو الدلة f على المجال $[a,b]$.

نتيجة(1.1): كل تابع f مستمر على المجال $[a,b]$ فهو قابل للمكاملة عليه.

ملاحظة(2.1): تكفي بعض الامثلة للتذكير بما سبق دراسته في المستوى السابق.

2-1- التكامل الثنائي:

تعريف(1.2.1): نسمي منطقة جزئية من المستوي IR^2 ، كل جزء $D\subset IR^2$ يعرف كما يلي:

$$D=\{(x,y)\in IR^2,a\le x\le b,f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$$

حيث f_1 ، f_2 دالتين مستمرتين على $[a,b]$ و تأخذان قيمهما في IR

ملاحظة(1.2.1): إذا كان الجزء المغلق $D'\subset IR^2$ يتكون من اتحاد أجزاء فرعية مغلقة يدعى متراص جزئي

لتكن المنطقة الجزئية D المعرفة كالتالي:

حيث $D=\{(x,y)\in IR^2,a\le x\le b,f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$

$f:D\to IR$ دالة محدودة، و اليكن $[c,d]$ إسقاط للمنطقة D على المحور oy و التقسيمين التاليين للمجالين $[a,b]$ ، $[c,d]$ إلى m و n جزء على الترتيب أي

$$a=x_0\le x_1\le\ldots\le x_m=b \quad \text{و} \quad c=y_0\le y_1\le\ldots\le y_n=d$$

و المربع الجزئي $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], 0 \le i \le m-1, 0 \le j \le n-1$

نعرف التقسيم $S(D)$ للمنطقة D كما يلي:

$S(D) = \{(x_i, y_j) \in IR^2, 0 \le i \le m, 0 \le j \le n\}$ و العددين الحقيقين

$m_{i,j} = \inf\{f(x,y)/(x,y) \in R_{i,j}\}$ ،

$M_{i,j} = \sup\{f(x,y)/(x,y) \in R_{i,j}\}$

تعريف(2.2.1): نسمي العددين الحقيقين التاليين

$$\underline{S}(f, S(D)) = \sum_{R_{ij} \subset D} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) m_{ij}$$

$$\overline{S}(f, S(D)) = \sum_{R_{ij} \subset D} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) M_{ij}$$ مجموعي داربو السفلي و العلوي

على الترتيب.

تعريف(3.2.1): في الرباعي R_{ij} نثبت التقسيم $S(D)$ و ζ_{ij} نقطة من $R_{ij} \cap D$ واليكن العدد الحقيقي $R(f, S(D)) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ الذي يسمى مجموع ريمان

$\forall \zeta_{ij} \in R_{ij} \cap D, / D \subseteq [a,b] \times [c,d]$

المرفق بالدالة المحدودة f ويحقق $\underline{S}(f, S(D)) \le R(f, S(D)) \le \overline{S}(f, S(D))$

تعريف(4.2.1):ليكن $IR^2 \supset D$ و $f : D \to IR$ دالة محدودة

1) نقول عن الدالة f أنها قابلة للمكاملة وفق داربو على المنطقة D إذا كان المجموعين العلوي و السفلي متساويين.
2) نقول عن الدالة f أنها قابلة للمكاملة وفق ريمان على المنطقة D إذا كان للمجموع $R(f, S(D))$ نهاية محدودة عندما $x_{i+1} - x_i$, $y_{j+1} - y_j$ ينتهيان الي الصفر.
3) إذا كانت الدالة f قابلة للمكاملة وفق ريمان او داربو على المنطقة D يكون

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{x_{i+1} - x_i \to 0 \\ y_{j+1} - y_j \to 0}} R(f, S(D))(\zeta_{ij})$$

$$= \sup_{R_{ij} \subset D} \underline{S}(f, S(D)) = \inf_{R_{ij} \subset D} \overline{S}(f, S(D))$$

نظرية(1.2.1): ليكن $IR^2 \supset D$ متراص جزئي فإن كل الدوال $f : D \to IR$ و المستمرة عليه قابلة للمكاملة وفق ريمان (باتجاه ريمان).

الخواص الجبرية للتكامل الثنائي:

قضية(1.2.1): التكامل الثنائي وفق ريمان لدالة محدودة على متراص تحقق الخواص التالية

1) الخطية: ليكن $IR^2 \supset D$ و $f, g : D \to IR$ دالتين قابلتين للمكاملة وفق ريمان على D فإنه مهما كان العددان الحقيقيان α, β

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y) dxdy = \alpha \iint_D f(x, y) dxdy + \beta \iint_D g(x, y) dxdy$$

2) الاضافة: ليكن $IR^2 \supset D_1, D_2$ و $IR^2 \supset D_1 \cup D_2$ بحيث $D_1 \cap D_2 = \phi$ ، $f : D_1 \cup D_2 \to \Re$ لدينا

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dxdy = \iint_{D_1} f(x, y) dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) dxdy$$

3) التزايد: إذا كان

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dxdy \geq \iint_D g(x, y) dxdy$$

و بالتالي $\forall (x, y) \in D, f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x, y) dxdy \geq 0$

4) المتباينة المضاعفة:

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dxdy \leq \sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)|$$

طرق حساب التكامل الثنائي:

نظرية فبني(Fibini)

نظرية(2.2.1): ليكن $IR^2 \supset D$ و $f : D \to IR$ دالة مستمرة إذا كانت D معرفة بالكيفية التالية

$$D = \{(x, y) \in IR^2 / a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$
$$= \{(x, y) \in Ir^2 / c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

حيث f_1 ، f_2 دالتين مستمرتين على $[a,b]$ و تأخذان قيمهما في مجموعة الاعداد الحقيقية IR وكذلك g_1 ، g_2 دالتين مستمرتين على $[c,d]$ و تأخذان قيمهما في IR

فإن التكامل الثنائي للدالة $f(x, y)$ على D هو

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

تنبيه(1.2.1): برهان نظرية فبني صعب بالنسبة لهذا المستوى لكن يمكن اعطاء تفسير حدسي للنتيجة التالية

نتيجة(1.2.1): اذا كان $D=[a,b]\times[c,d]$ فإن

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

تفسير للنتيجة (1.2.1): اذا كان $\forall(x,y)\in D; f(x,y)\geq 0$ في هذه الحالة التكامل الثنائي $\iint_D f(x,y)dA$ يفسر على أنه الحجم V للجسم S في الحيز D الى غاية المساحة $z=f(x,y)$ ، كما يمكن أن نصيغ V كالتالي: $V=\int_a^b A(x)dx$ حيث $A(x)$ تمثل مساحة مقطع الجسم S بالمستوي العمودي على المحور ox للإحداثية x و بالتالي $A(x)$ هي المساحة المحدود بالمنحنى C الممثل للدالة $z=f(x,y)$ حيث x يعتبر ثابت و $c\leq y\leq d$

أي أن $A(x)=\int_c^d f(x,y)dy$

و منه $\iint_D f(x,y)dA=V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$ و بنفس الطريقة بالنسبة لمساحة مقطع الجسم S بالمستوي العمودي على المحور oy للإحداثية y .

مثال(1.2.1): احسب التكامل الثنائي $\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy$ حيث Δ المثلث المحدد كالتالي

$$\Delta=\{(x,y)\in IR^2/0\leq x\leq 1, x-1\leq y\leq 1-x\}$$

الحل:

$$\iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x-1}^{1-x}(x^2+y^2)dy\right)dx=\int_0^1 x^2y+y^3/3\Big|_{x-1}^{1-x}dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(3x^2(x-1)+(x-1)^3\right)dx=\frac{1}{3}$$

مثال(2.2.1):احسب مساحة الحيز D حيث

$D=\left\{(x,y)\in\Re^2/-\frac{\sqrt{3}}{2}R\leq y\leq\frac{\sqrt{3}}{2}R, R-\sqrt{R^2-y^2}\leq x\leq\sqrt{R^2-y^2}\right\}$ الحل:

بوضع $Air(D)=\iint_D dxdy=\int_{-\sqrt{3}R/2}^{\sqrt{3}R/2}dy\int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}dx=\int_{-\sqrt{3}R/2}^{\sqrt{3}R/2}(2\sqrt{R^2-y^2}-R)dy$

$y = R\sin t$ نستنتج أن $-\pi/3 \le t \le \pi/3$ وبالتالي

$$Aire(D) = R^2 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2\cos t - 1)\cos t dt = \frac{2\pi R^2}{3}$$

تحويل المتغيرين:

نظرية(3.2.1):(قانون تحويل المتغيرين)

ليكن D', D منطقتين من IR^2 و $T : D' \to D$ تطبيق تقابلي من الصنف C^1 بحيث $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ إذا كانت المحددة الجاكوبية للتطبيق T غير معدومة على المنطقة D فإنه من أجل كل دالة مستمرة $f : D \to IR$ لدينا قانون التحويل التالي

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$$

حيث $$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

نتيجة(2.2.1): اذا كان $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ يمثل تطبيق (تحويل متغير) من D' في D فإنه من أجل كل دالة $f : D' \to D$ لدينا قانون التحويل الى الاحداثيات القطبية

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$ حيث $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$

مثال(3.2.1): احسب التكامل الثنائي $\iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy$ حيث D الحيز المحدد بربع الدا $S(1, o(0,0))$ و $x \ge 0, y \ge 0$ لدينا الاحداثيات القطبية $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

وبالتالي الحيز الجديد هو $D' = \{(r,\theta) \in IR^2 / 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2\}$ و منه

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy = \iint_{D'} (1 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (r - r^3) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

مثال(4.2.1): باستخدام الاحداثيات القطبية أحسب التكامل الثنائي $\iint_D (x-y)^2 dxdy$ حيث

D يمثل القرص الذي مركزه $O(0,0)$ ونصف قطره 1 و $0 \le y \le x$

الحل: لدينا $D=\{(x,y)\in IR^2; x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$

$$D'=\{(r,\theta)\in IR^2; 0\le r\le 1, 0\le\theta\le \pi/4\}$$

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy=\iint_{D'} r^3(\cos\theta-\sin\theta)^2\,drd\theta$$

$$\int_0^1 r^3dr\int_0^{\pi/4}(1-2\sin\theta\cos\theta)d\theta=\frac{1}{4}\left[\theta-\sin^2\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]$$

تحويل المتغيرين بصورة كيفية

مثال(5.2.1) :اوجد قيمة التكامل $\iint_D (y-2x)^2\sqrt{x+y}\,dxdy$

حيث $D=\{(x,y)\in IR^2; 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$

مستعملا التحويل التالي :

$$v=y-2x, u=x+y\Rightarrow x=\frac{1}{3}(u-v), y=\frac{1}{3}(2u+v)$$

حل : أي $D'=\{(u,v)\in IR^2; 0\le u\le 1, -2u\le y\le u\}$

و المحدد الجاكوبي المرفق بهذا التحويل هو $J(u,v)=\begin{vmatrix}1/3 & -1/3\\ 2/3 & 1/3\end{vmatrix}=1/3$

$$\iint_D (y-2x)^2\sqrt{x+y}\,dxdy=1/3\iint_{D'} v^2\sqrt{u}\,dudv=1/3\int_0^1\int_{-2u}^{u} v^2\sqrt{u}\,dvdu=2/9$$

قانون قرين - ريمان:

تعريف(5.2.1)**:** منطقة مستوية (أو مساحة مستوية) $IR^2\supset D$ نقول أنها موجه في الاتجاه الموجب اذا كان المتحرك على الحافة ∂D يتحرك باتجاه حركة عقارب الساعة.

نظرية(4.2.1): ليكن $\partial D, D\subset IR^2$ حافته متجه بالاتجاه الموجب و كان $w(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ شكل تفاضلي معرف D على من الصنف C^1

فإن قانون قرين - ريمان

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

نتيجة(3.2.1): اذا كان الشكل التفاضلي $w(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ شكل تفاضلي من الصنف C^1 معرف على المغلق D فإن $\oint_{\partial D} w=0$