جامـــــــــعة الشهيد حمـــــــــه - لخضـــــــــــر الـــــــوادي.

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفـــــــيزياء

السنة الثانية فيزياء.

مقياس: الدوال ذات المتغير المركب.

التاريخ: 2021/06/9

مدة الامتحان: ساعة و ربع

الامـــــــــــــتحان الـــــــــنهائـــــــــــي.

التمرين الاول : (6 نقاط)

اثبت ان الدالة التالية دالة تحليلية :

$$f(z) = sh(z)$$

التمرين الثاني:(8 نقاط)

احسب التكاملات التالية باستعمال نظرية كوشي:

$$\oint_{C:|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+i)^2} dz$$

$$\oint_{C:|z-1|=1} \frac{dz}{(z^3-1)}$$

التمرين الثالث:(6 نقاط)

احسب باستعمال نظرية الرواسب التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$$

بالـــــــــتوفيق.

(6 نقاط)

ت اه: إثبت أن الدالة $f(z) = sh(z)$ دالة تحليلية.

الدالة f تحليلية على $\mathbb{C}$ $\Leftarrow$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$. (0,5)

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$ $\Leftarrow$ تحقق شرطي كوشي-ريمان. (0,5)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

$$f(z) = u + iv = sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} - e^{-x-iy}\right) \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-iy}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right) \quad (0,5)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos y\left(e^x - e^{-x}\right) + i\sin y\left(e^x + e^{-x}\right)\right) = \cos y\, sh x + i \sin y\, ch x. \quad (0,5)$$

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y\, ch x \quad (0,5), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos y\, ch x \quad (0,5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x\, sh x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \sin y\, sh x.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$ محققين

شرطي كوشي وريمان محققين عند كل نقاط الفضاء $\mathbb{C}$ $\Leftarrow$

الدالة $f(z) = sh(z)$ تحليلية على $\mathbb{C}$

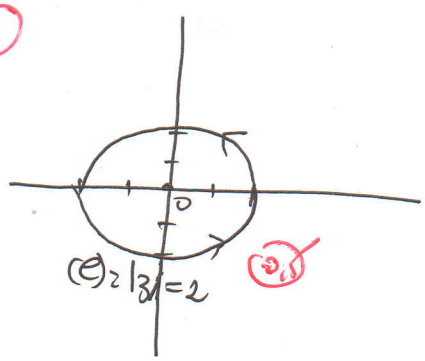
تمرين 02: باستعمال نظرية كوشي:

$$\oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$ إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل (c) و z_0 داخل المسار (c)

$$\oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

(1)

$$\oint_{(c):|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+i)^2}\,dz = \begin{cases} f(z)=e^{2z} \text{ لدالة} \\ z_0=-i : \text{النقطة} \\ \text{داخل المسار} \end{cases}$$



$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f^{(1)}(z_0)$$

$$= 2\pi i \cdot (2e^{2z})\Big|_{z=-i} = 2\pi i (2e^{-2i}) = 4\pi i(\cos 2 - i\sin 2)$$

$$\oint_{(c):|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+i)^2} = 4\pi(\sin(2) + i\cos(2))$$

(2)

$$\oint \frac{dz}{z^3-1} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$(c): |z-1|=1$

$z^3-1=0 \Rightarrow z^3 = 1 = e^{i2k\pi}$

$\Rightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$

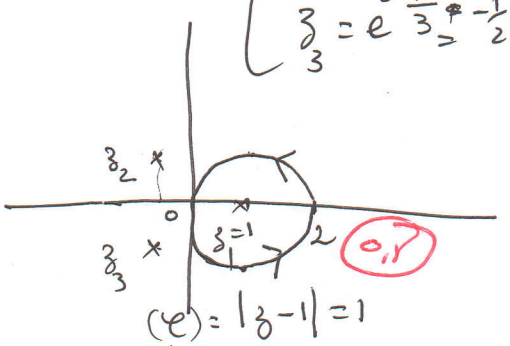
$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$= \oint_{(c)} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$z_1 = 1$ داخل المسار

z_2 و z_3 خارج المسار

$\Rightarrow$ تحليلية داخل (c) لأن z_2 و z_3 خارج (c) $\quad f(z) = \frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)}$



$$\Rightarrow \oint \frac{dz}{z^3-1} = 2\pi i f(z_1) = 2\pi i \times \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{2\pi i}{(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$\oint_{(e):|z-1|=1} \frac{dz}{(z^3-1)} = 2\pi i \times \frac{1}{\frac{9}{24}+\frac{3}{4}} = \frac{(2\pi i)\,4}{(9+3)} = \frac{8\pi i}{12} = \frac{2\pi i}{3}$$ (1)

تـ 03 : باستعمال نظرية الرواسب : (6 نقاط)

$$\oint_{(e)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}(f, z_i)$$ (0,75)

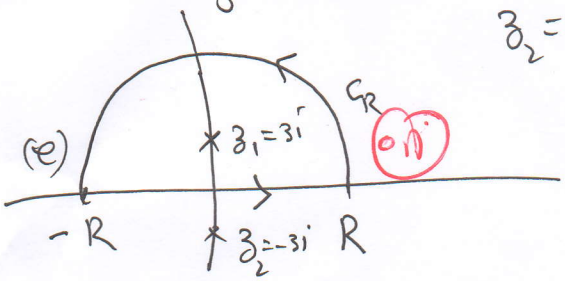
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx.$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)^2}$$ (0,75)

* دالة مركبة كسرية ماعدا عند الأقطاب لها

$(z^2+9)^2 = 0$

$z^2 = -9 \Rightarrow$ $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ (0,5) أقطاب من الرتبة $m=2$



(0,5)

* الحساب

$z_1 = 3i$ داخل (e).

$$\oint_{(e)} f(z)\,dz = 2\pi i\, \text{Res}(f, z_1)$$ (0,5)

*

$$\int_{-R}^{R} \frac{z^2}{(z^2+9)^2}\,dz + \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+9)^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+9)^2} Rie^{i\theta}\,d\theta$$

(0,5) $z=x$ (0,5) $z=Re^{i\theta}$ (0,5)

$R \longrightarrow \infty$ *

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = 2\pi i\, \text{Res}(f, z_1)$$ (0,5)

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[(z-z_1)^m f(z)\right]_{z=z_1} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right]_{z=z_1} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z^2}{(z-z_2)^2}\right]_{z=z_1}$$ (0,5)

$$= \frac{2z(z-z_2)^2 - 2z^2(z-z_2)}{(z-z_2)^4}\Bigg|_{z=z_1} = \frac{2z_1(z_1-z_2) - 2z_1^2}{(z_1-z_2)^3} = \frac{2(3i)(2(3i)) - 2(3i)^2}{2(3i)^3} = \frac{2(3i)}{4\times 2(3i)}$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \left(\frac{1}{4\times 3i}\right)$$ (0,5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{2\pi i}{4} \times \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{4\times 3} \quad (1) = \frac{\pi}{6}$$