تمرين1 **فرض** (10ن) ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(0,0,0)$ وموجه بالشعاع $\vec{u}(1,2,3)$ ، وليكن (D') المستقيم الذي يشمل النقطة $A'(0,1,1)$ وموجه بالشعاع $\overrightarrow{u'}(1,-2,-3)$.

1. عين التمثيل الوسيطي والتمثيل الديكارتي لـ (D) و (D')

✓

$$(D'):\begin{cases} x=t \\ y=-2t+1 \\ z=-3t+1 \end{cases} /t\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad (D):\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases} /t\in\mathbb{R}$$

$$(D'):\begin{cases} y=-2x+1 \\ z=-3x+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (D):\begin{cases} y=2x \\ z=3x \end{cases}$$

2. هل المستقيمان (D) و (D') متوازيان؟ هل هما متقاطعان ؟ ماهي الوضعية إذن

✓ غير متوازيان لأن الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ غير مرتبطين خطيا.

الجملة $y=2x$ ، $z=3x$ و $y=-2x+1$ تقبل $(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ حل، لكنه لايحقق المعادلة $z=-3x+1$ ومنه المستقيمان غير متقاطعين.

نستنتج وضعية (D) و (D') أنهما لا يقعان في نفس المستوي.

3. عين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A وموجه بالجملة $\{\vec{u},\vec{u}\wedge\overrightarrow{u'}\}$ ، وكذا المعادلة الديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A' وموجه بالجملة $\{\overrightarrow{u'},\vec{u}\wedge\overrightarrow{u'}\}$

✓

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{u'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$$

$$(P'):\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0 \quad ، \quad (P):\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$$

ومنه

$$(P'):-13x-2y-3y+10=0 \quad ، \quad (P):13x-2y-3y=0$$

4. حدد وضعية المجموعة $(P\cap P')$ بالنسبة إلى (D) و (D')

✓ $(P\cap P')$ هو مستقيم يقطع المستقيمين (D) و (D') وعمودي عليهما.

5. عين إسقاط (D') على المستوي ذو المعادلة $z=0$ بالموازاة مع (D)

✓ مسقط المستقيم (D') هو مستقيم ينتمي إلى المستوي $z=0$.

لإيجاد هذا المستقيم يكفي تعيين نقطتين منه.

النقطة الأولى هي تقاطع (D') مع $z=0$ وهي $N\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ (مسقطها هو نفسها).

نختار نقطة أخرى من (D') مثلا $A'(0,11)$ ولتكن $Q(a,b,0)$ مسقط A' على $z=0$ بالتوازي مع (D)، لدينا إذن $\overrightarrow{A'Q}//\vec{u}(1,2,3)$ ، ومنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث $(a,b-1,-1)=\lambda(1,2,3)$. نجد $\lambda=-\frac{1}{3}$ وبالتالي $a=-\frac{1}{3}$ و $b=\frac{1}{3}$.

إذن النقطة الثانية هي $Q\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

ومنه إسقاط (D') هو المستقيم (NQ)، معرف بـ : $y=\frac{1}{3}$ و $z=0$.

قد يتكرر تمرين من هذا الامتحان في الدورة الاستدراكية

تمرين2 (5ن) ليكن $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق تآلفي منسوب إلى المعلم القانوني $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. من أجل كل نقطتين A و B من $\mathbb{R}^2$ ومن أجل كل عددين α و β من $\mathbb{R}$ بحيث $\alpha+\beta \neq 0$.

نضع $G = \frac{\alpha A+\beta B}{\alpha+\beta}$، المطلوب إثبات أن $f(G) = \frac{\alpha f(A)+\beta f(B)}{\alpha+\beta}$

✓ نسمي $\vec{f}$ التطبيق الخطي المرفق بـ f، لدينا

$$f(G) = f(O)+\vec{f}(\overrightarrow{OG}) = f(O)+\vec{f}\left(\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}}{\alpha+\beta}\right) = f(O)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{f}(\overrightarrow{OA})+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{f}(\overrightarrow{OB}) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[f(O)+\vec{f}(\overrightarrow{OA})\right]+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[f(O)+\vec{f}(\overrightarrow{OB})\right] = \frac{\alpha f(A)+\beta f(B)}{\alpha+\beta}.$$

2. عين العبارة التحليلية لـf الذي يحول بالترتيب النقاط $O(0,0)$، $A(-1,1)$، $B(1,1)$ إلى النقاط $O'(2,3)$، $A'(1,4)$، $B'(11,12)$

✓ كون $f(O) = O^{'}$ ، عبارة f تكتب

$$f(x,y) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

من العلاقتين $f(A) = A^{'}$ ، $f(B) = B^{'}$ نجد : $a = 5$ ، $b = 4$، $c = 4$ و $d = 5$. ومنه

$$f(x,y) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5x+4y+2\\4x+5y+3\end{pmatrix}$$

تمرين3 (5ن) ليكن Π المستوي ذو المعادلة $x+2y+3z = 6$ ونعتبر الشعاع $\vec{v}(1,1,1)$.

نعرف $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تطبيق الاسقاط الذي يحقق من أجل كل نقطة M من $\mathbb{R}^3$، القضية:

$$P(M) \in \Pi \text{ و } \overrightarrow{Mp(M)}//\vec{v}$$

ونعرف $s: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الذي يحقق من أجل كل نقطة M من $\mathbb{R}^3$، العلاقة:

$$\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$$

1. عين الاحداثيات $M'(x',y',z')$ للنقطة $M' = p(M)$ كتابع لإحداثيات النقطة $M(x,y,z)$

✓ يوجد عدد حقيقي λ بحيث

$$\overrightarrow{Mp(M)} = (x'-x,y'-y,z'-z) = \lambda(1,1,1)$$

ومنه $(x',y',z') = (\lambda+x,\lambda+y,\lambda+z)$. كون $M' \in \Pi$ نجد $\lambda = \frac{6-x-2y-3z}{6}$. إذن

$$(x',y',z') = \left(\frac{6+5x-2y-3z}{6},\frac{6-x+4y-3z}{6},\frac{6-x-2y+3z}{6}\right).$$

2. عين الاحداثيات $M''(x'',y'',z'')$ للنقطة $M^{''} = s(M)$ كتابع لإحداثيات النقطة $M(x,y,z)$

✓

$$(x''-x,y''-y,z''-z) = 2(x'-x,y'-y,z'-z)$$

بالتعويض نجد

$$(x'',y'',z'') = \left(\frac{6+2x-2y-3z}{3},\frac{6-x+y-3z}{3},\frac{6-x-2y}{3}\right).$$

قد يتكرر تمرين من هذا الامتحان في الدورة الاستدراكية