# Topologie Générale & Théorèmes Fondamentaux de la Topologie

## MASTER

## Mathématiques Fondamentales

**Université Echahid Hamma Lakhdar El-Oued**

**Algeria**

**Rédigé par :**

**Dr. Tedjani Hadj Ammar**

# Préface

Ce texte représente le cours de Topologie Générale dispensé en première année Master ( semestre I) et Théorèmes fondamentaux de la topologie en deuxième année Master ( semestre III), de Mathématiques fondamentales à El Oued, pendant l'année universitaire 2020/2021.

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune : elle émerge (sous le nom d'analysis situs) au début du vingtième siècle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déjà fait sentir à la fin du dix-neuvième siècle dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental aussi bien en Analyse Fonctionnelle qu'en Géométrie Différentielle ou encore en Topologie Algébrique.

Ce polycopie n'est cependant qu'une introduction aux notions de base. Il contient le strict minimum pour celui qui souhaite poursuivre les études en mathématiques. Comme la topologie repose sur relativement peu de connaissances aquises, elle présente l'occasion idéale pour l'étudiant de combler d'éventuelles lacunes en logique ou en théorie des ensembles. C'est la raison pour laquelle la plupart des énoncés sont suivis d'une preuve complète.

J'espère enfin que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants et les aidera à améliorer leurs résultats aux examens, qui ont été jusque à la limite de la médiocrité pour l'écrasante majorité d'entre eux.

# TABLE DES MATIÈRES

# 1. INTRODUCTION À LA TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Dans ce chapitre, on pose les bases de l'analyse : les notions d'espace topologique et d'espace métrique sont constamment utilisées en analyse. On a choisi de ne traiter en détails que les espaces métriques. Néanmoins, tout espace métrique étant un espace topologique, on a décidé de donner, à part, la définition d'espace topologique ainsi que les principales terminologies qui lui sont attachées. Dans tout le cours qui suit, on pourra ainsi distinguer, dans l'étude des espaces métriques, ce qui résulte de la structure d'espace topologique sous-jacente et ce qui résulte de la structure métrique.

## *1.1 Généralités sur les espaces topologiques*

Dans cette section, on donne la définition d'espace topologique ainsi que l'essentiel du vocabulaire topologique de base.

**Définition** 1.1: **[Topologie] :** On appelle *espace topologique* un ensemble $E$ muni d'une partie $\mathcal{T}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de $E$ vérifiant les propriétés suivantes :

- *(T1)* $E$ et $\emptyset$ appartiennent à $\mathcal{T}$ ;
- *(T2)* Toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$ ;
- *(T3)* Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les *ouverts* de l'espace topologique $E$. De plus les complémentaires d'ouverts de $E$ sont appelés les *fermés* de $E$. $\mathcal{T}$ est parfois appelée la topologie de $E$.

On notera donc que toute intersection de fermés est un fermé et que toute réunion finie de fermés est un fermé et que $E$ et $\emptyset$ sont des fermés (une partie de $E$ peut être à la fois ouverte et fermée).

**Exemple** 1.1: **[L'espace topologique $\mathbb{R}$] :** Une partie $U$ de $\mathbb{R}$ est dite ouverte si, $\forall x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est contenu dans $U$. Il est bien clair que ceci défini une topologie sur $\mathbb{R}$.

**Définition** 1.2: **[Topologie induite] :** Si $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $A \subset E$, on appelle topologie induite par $E$ sur $A$ le couple $(A, \mathcal{T}_A)$ où $\mathcal{T}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$.

**Exercice** 1.1: Vérifier que la topologie induite est une topologie.

**Exercice** 1.2: Décrire la topologie induite sur $[0,1]$ par celle de $\mathbb{R}$, et celle induite sur une droite de $\mathbb{R}^2$ par la topologie euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$.

**Définition** 1.3: **[définition de voisinage] :** Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique.

1. On appelle *voisinage* de $x \in E$ tout sous-ensemble de $E$ contenant un ouvert contenant $x$ et on notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$.
2. On appelle *voisinage* d'une partie $A$ de $E$ tout sous-ensemble de $E$ qui contient un ouvert contenant $A$ et on notera $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble des voisinages de $A$.

**Exemple** 1.2: Dans l'espace topologique usuel $\mathbb{R}$, un voisinage de $x$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert de la forme $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.

**Proposition** 1.1: La famille $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(E)$ des voisinages de $x$ vérifie :

1. Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors $x \in V$.
2. Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset A$ alors $A \in \mathcal{V}(x)$.
3. Toute intersection finie de voisinages de $x \in E$ est un voisinage de $x$.
4. Si $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et $W$ voisinage de chacun de ses points.

**Preuve :** Les assertions **(1)** et **(2)** sont immédiates.
**(3)** : Si $V_i \in \mathcal{V}(x)$ pour $i \in \{1,...,n\}$ On peut alors trouver pour tout $i \in \{1,...,n\}$, un ouvert $O_i$ tel que $x \in O_i \subset V$. Mais alors $O = \cap_{i=1}^{n} O_i$ est un ouvert, qui contient $x$ et qui est contenu dans $\cap_{i=1}^{n} V_i$. Donc $\cap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de $x$.
**(4)** : Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe un ouvert $W$ tel que $x \in W \subset V$. Mais d'après la définition $W$ est voisinage de chacun de ses points. □

**Remarque** 1.1: On peut définir la topologie en partant des voisinages avec (1)(2)(3) et (4) dans la proposition précédente comme axiomes, puis définir les ouverts comme les parties qui sont voisinages de chacun de leurs points et (T1)(T2) et (T3) deviennent des propriétés.

**Conséquences :**

— Un ouvert est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si $A$ est voisinage de chacun de ses points et si $x \in A$, il existe $W_x$ ouvert tel que $x \in W_x \subset A$. Donc $A$ est la réunion de tous les $W_x$ quand $x$ parcourt $A$ et de ce fait est ouvert.

— Les ouverts d'un espace sont connus des que sont connus pour tout $x$ les voisinages de $x$, ou même une base de voisinages (définition suivante).

**Définition** 1.4: **[base des voisinages] :** On appelle *base de voisinages* de $x \in E$, toute partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}(x)$ telle que si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset V$.

**Définition** 1.5: **[systeme fondamental de voisinage] :** Une partie $\mathcal{W}(a) \subset \mathcal{V}(a)$ est appelle systeme fondamental de voisinage (note SFV) de $a$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $W \in \mathcal{W}(a)$ tel que $W \subset V$.

**Exemple** 1.3: Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique $\mathcal{W}(a) = \{O \in \mathcal{T};\ a \in O\}$ est un systeme fondamental de voisinage de $a$,

**Exemple** 1.4: Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $a \in \mathbb{R}$, alors les familles $\{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[;\ \varepsilon > 0\}$, $\{]a-q, a+q[;\ q \in \mathbb{Q}^{+,*}\}$ et $\{]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[;\ n \in \mathbb{N}^*\}$, sont systeme fondamental de voisinage de $a$.

**Exemple** 1.5: **[espace métrisable]** Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit métrisable s'il existe une *distance* sur $E$ telle que $\mathcal{T}$ coïncide avec l'ensemble des unions arbitraires de boules. Une base de voisinages ouverts commode est alors constitué par les boules ouvertes elles-mêmes. Les boules ouvertes centrées en $x$ forment une base de voisinages ouverts de $x$ et également les boules ouvertes contenant $x$.

**Définition** 1.6: **[base d'ouverts] :** On appelle *base d'ouverts* de $E$, toute famille d'ouverts $\mathcal{B}$ de $E$ vérifiant l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. Tout $x \in E$ a une base de voisinages constituée par une sous-famille de $\mathcal{B}$,
2. Tout ouvert de $E$ est réunion d'une sous-famille de $\mathcal{B}$,
3. Pour tout point $x \in E$, et pour tout ouverts $O_x$ contenant $x$, il existe un ouvert $B_x$, de la famille $\mathcal{B}$, tel que $x \in B_x \subset O_x$.

**Exemple** 1.6: Montrer que les boules ouvertes d'un espace métrique forment une base d'ouverts de cet espace.

**Exemple** 1.7: Montrer qu'il en est de même pour les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$ dont les rayons sont rationnels et les centres sont rationnels. C'est donc une base d'ouverts dénombrable.

**Définition** 1.7: **[fermé, adhérent, intérieur] :** Une partie $F$ de $E$ est dite fermé si son complémentaire est ouvert. On appelle fermeture, ou adhérent, d'un ensemble $A$, noté $\overline{A}$, l'intersection de tous les fermés contenant $A$. On appelle ouverture, ou intérieur, de $A$, noté $\mathring{A}$, l'union de tous les ouverts contenus dans $A$.

**Remarque** 1.2:

- ✓ L'adhérence de $A$ est *le plus petit fermé* contenant $A$.
- ✓ Un point $x$ est adhérent à $A$ si et seulement si tout ouvert contenant $x$ contient également au moins un point de $A$.
- ✓ On a les relations : $X - \mathring{A} = \overline{X - A}$, et $X - \overline{A} = (X - A)^{\circ}$.

**Proposition** 1.2: Soient $E$ un espace topologique et $A$ une partie de $E$.

1. Un point $x$ de $E$ est adhérent à $A$ si et seulement si tout voisinage de $x$ rencontre $A$.
2. Supposons que $A$ soit infinie. On dit que $x \in E$ est un *point d'accumulation* de $A$ si tout voisinage de $x$ contient une infinité de points de $A$ (ce qui implique en particulier $x \in \overline{A}$).

**Démonstration.** En effet, dans le cas contraire il existe un ouvert $O$ contenant $x$ et ne rencontrant pas $A$. Alors le complémentaire de $O$ est un fermé contenant $A$ et ne contenant pas $x$. □

**Proposition** 1.3: Soient $E$ un espace topologique et $A$, $B$ deux partie de $E$. Alors :

1. Si $A \subset B$, on a $\overline{A} \subset \overline{B}$, et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$,
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

**Démonstration.** Montrons par exemple la première égalité du 2. L'inclusion $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ provient du 1.; d'autre part $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ ce qui donne l'inclusion inverse. □

**Proposition** 1.4: Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A$, un partie de $E$. On a les égalités

$$\mathring{A} = \{x \in E;\ \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ et } V \subset A\} = \{x \in E;\ A \in \mathcal{V}(x)\}.$$

**Remarque** 1.3: On note qu'on a en général, on a seulement les relations $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $(A \cup B)^\circ \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$, et pas des égalités, comme le montre l'exemple $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2]$ pour la seconde. Un autre exemple est fourni par :$A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ : dans ce cas $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\overline{B} = \mathbb{R}$, $\mathring{A} = \emptyset$ et $\mathring{B} = \emptyset$.

**Définition** 1.8: **[frontière ] :** Si $A$ est un sous-ensemble de $E$, on appelle frontière de $A$, et l'on note $Fr(A)$, l'ensemble : $Fr(A) = \overline{A} - \mathring{A}$.

**Exercice** 1.3:

1. Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé et qu'une union finie de fermés est un fermé.
2. Soit $A$ une partie de $E$, on dit que $x \in E$ est adhérent à $A$ si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$. On appellera adhérence de $A$, l'ensemble des points de $E$ adhérents à $A$.
   — Montrer que $\overline{A}$ et l'adhérence de $A$ sont identiques
   — Montrer que relation $A = \overline{A}$ caractérise les ensembles fermés.

**Définition** 1.9: **[densité] :**

1. On dit qu'une partie $A$ de $E$ est *partout dense* ( ou, *dense* dans $E$ ) si $\overline{A} = E$ et donc, de manière équivalente, si tout ouvert non vide de $E$ rencontre $A$.
2. $A \subset B$ deux parties de $E$. On dit que $A$ est dense dans $B$ si $\overline{A} \supset B$.

**Exemple** 1.8: l'ensemble des points à coordonnées rationnelles est dense dans $\mathbb{R}^N$.

**Définition** 1.10: [**Espace séparable** :] On dit qu'un espace topologique est *séparable* s'il possède une partie dénombrable et dense.

**Définition** 1.11 (**Axiomes de séparation** ): Un espace topologique $X$ est dite :

— Un espace $T_1$ si pour tous $x, y$, points distincts de $X$, il existe un ouvert $O$, tel que $y \in O$, mais $x \notin O$.

— Un espace $T_2$ (ou *Hausdorff*) si pour tous $x, y$, points distincts de $X$, il existe deux ouverts, $O_x$, et $O_y$, tels que $x \in O_x$, $y \in O_y$, et $O_x \cap O_y = \emptyset$.
— On dit que $X$ est régulier si pour tout $x \in X$, pour tout fermé $C \subset X$, $x \notin C$, il existe deux ouverts $O_x$, et $O_C$, contenant $x$, et $C$ respectivement, tels que $O_x \cap O_C = \emptyset$
— Un espace $T_3$ si $X$ est $T_1$, et régulier. (On dit également Hausdorff régulier.)
— Un espace $T_4$ (ou normal) si $X$ est $T_1$, et si, étant donnés deux fermés disjoints de $X$, $C_1$ et $C_2$, il existe deux ouverts disjoints $O_1$, et $O_2$, tels que $C_1 \subset O_1$, et $C_2 \subset O_2$.

Evidemment ; $T_4 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1$.

**Définition** 1.12 (**Axiomes de dénombrabilité.** ): Un espace topologique $X$ est dite :
— Satisfait le premier axiome de dénombrabilité ($D1$), si chaque point de $X$ admet une base de voisinages, qui est dénombrable.
— Satisfait le second axiome de dénombrabilité ($D2$), si la topologie de $X$ est à base dénombrable.

**Remarque** 1.4: ✓ Tout espace qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité ($D1$) est séparable. La réciproque est fausse : voir $\mathbb{R}$, avec la topologie engendrée par les $\{[a, b[;\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

**Exemple** 1.9: montrer que l'espace métrique $\mathbb{R}^N$ muni de la norme euclidienne canonique est séparable.

**Définition** 1.13: **[Espace séparé] :** On dit que l'espace $E$ est *séparé* si $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ et $\exists U \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

**Lemme** 1.1:
1. Un espace $E$ est $T_1$ si et seulement si les singletons $\{x\} \subset E$ sont des fermés.
2. Un espace est régulier si et seulement si les voisinages fermés de chaque point constituent une base de voisinages.

**Démonstration :**

1. Soit $\{x\}$ un singleton dans $E$. La propriété $T_1$ implique que chaque point du complémentaire de $\{x\}$ est contenu dans un ouvert $O$, ne contenant pas $x$. Le complémentaire de $\{x\}$ est donc ouvert. Inversement, si l'on suppose que tout singleton est fermé, et $x, y$ sont deux points distincts de $E$, alors le complémentaire de $\{x\}$ est un ouvert contenant $y$, mais pas $x$.
2. Supposons que les voisinages fermés de chaque point constituent une base de voisinages dans $E$. Soient $x \in E$ et $C$ fermé. Le complémentaire $X - C$, de $C$, est un ouvert contenant $x$, donc, d'aprés l'hypothèse, contient aussi un voisinage fermé, $F$, de $x$. On prend pour $O_C$, le complémentaire de $F$, et pour $O_x$, n'importe quel voisinage ouvert de $x$, contenu dans $F$. Inversement, supposons que $E$ est

régulier. Soient $x$ un point de $E$, et $O$ un voisinage ouvert de $E$. La régularité de $E$ implique qu'il existe un ouvert $U$, contenant le complémentaire de $O$, et un ouvert $V$, contenant $x$, tels que $U \cap V = \emptyset$. Le complémentaire de $U$ est un fermé contenant $V$, et contenu dans $O$. □

**Exercice** 1.4: Sur $\mathbb{R}$, menu de topologie $\mathcal{T} = \{\mathbb{R} - A;\ A \text{ dénombrable }\} \cup \{\emptyset\}$. Montre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est espace topologique non séparé.

**Correction :** puisque si $A$, $B$ deux parties dénombrable avec $(\mathbb{R} - A) \cap (\mathbb{R} - B) = \emptyset$, on a $\mathbb{R} - (A \cup B) = \emptyset$, alors $\mathbb{R} = A \cup B$ impossible.

**Définition** 1.14: **[ topologie moins fine vérifiant une propriété** $P$ **]** On appelle topologie sur $E$ la moins fine vérifiant une propriété $P$ la topologie ayant cette propriété $P$ et qui a le moins d'ouverts possible.

Cette topologie $\mathcal{U}$ est donc telle que pour toute autre topologie $\mathcal{T}$ vérifiant $P$, on ait $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$.

**Exemple** 1.10: Montrer que la topologie de moins fine vérifiant une propriété $P$ peut être construite comme l'intersection de toutes les topologies vérifiant la propriété $P$. (Expliquer d'abord pourquoi cette intersection est non vide !)

**Définition** 1.15: **[ Topologie produit]** Soit $(E_i, \mathcal{O}_i)$ des espaces topologiques. L'espace topologique produit $E = \Pi_i E_i$ peut être muni de la *topologie produit*, définie comme la moins fine rendant les projections de $E$ sur chaque $E_i$ continues.

**Définition** 1.16: **[ Convergence d'une suite] :** On dit qu'une suite $x_n$ *tend vers* $x$ dans $E$ si pour tout voisinage $V$ de $x$ il existe $n_0$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

**Proposition** 1.5: Si $F$ est fermé et si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $F$ convergeant vers $x \in E$, alors $x \in F$.

**Démonstration.** Si on avait $x \in F^c$, qui est ouvert, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ tel que $U \subset F^c$. Mais $x_n \to x$ implique que $\exists n_0, n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in U$, ce qui contredit $x_n \in F$. □

**Définition** 1.17 (**Valeur d'adhérence d'une suite):** Soit $(x_n)_n$ une suite de points de $E$, on dit que $x \in E$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si $\forall n$, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists i \geqslant n$ tel que $x_i \in V$.

**Exemple** 1.11: Si on note $A_n = \{x_i,\ i \geqslant n\}$ alors vérifier que $x$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si et seulement si $x \in \bigcap_n \overline{A_n}$.

**Définition** 1.18 (**Continuité en un point):** Soient $E$ et $F$ deux espaces topologiques et $f$ une application de $E$ dans $F$. Soit $x_0 \in E$, on dit que $f$ est continue en $x_0$ si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U) \subset V$.

Une application d'un espace topologique dans un autre est dite *continue* si elle est continue en tout point.

**Théorème** 1.1: [10] Une application $f$ d'un espace topologique dans un autre est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert par $f$ est un ouvert ou, de manièreé quivalente, si l'image réciproque de tout fermé est un fermé, ou, de manière équivalente, si l'image réciproque par $f$ de chaque élément d'une base d'ouverts de $F$ est un ouvert. On a aussi la propriété suivante : $f$ est continue si et seulement si pour tout ensemble $A \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

**Définition** 1.19 (**Continuité séquentielle):** Soient $E$ et $F$ deux espaces topologiques et $f$ une application de $E$ dans $F$. On dit que $f$ continuité séquentielle si toute suite $(x_n)$ de $E$ converge, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\lim x_n)$.

**Proposition** 1.6: Si $f : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{U})$ est continue, alors elle est séquentiellement continue.

**Démonstration.** Soit $(x_n)$ tendant vers $x$ pour $\mathcal{T}$. Fixons $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) \in U$ et montrons que $\exists n_0, n \geqslant n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U$. Or, $f$ étant continue, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de $x$. Donc $\exists n_0, n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(U)$ et on a donc, comme désiré , $f(x_n) \in U$. □

**Définition** 1.20: **[ Espace compact]** On dit qu'un espace $E$ est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de $E$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

**Exercice** 1.5:

1. Soit $E$ un espace topologique compact, montrer que toute suite de points de $E$ possède une valeur d'adhérence.
2. Montrer que l'image d'un compact par une fonction continue à valeurs dans un espace séparé est un compact.

**Proposition** 1.7: Soit $(E_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$ une famille d'espaces topologiques et $\varphi_j : E \to E_j$ une famille d'applications définies sur un ensemble $E$. Les ouverts de la topologie la moins fine sur $E$ rendant continues les applications $\varphi_j$ sont tous de la forme :

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in F_i} \varphi_j^{-1}(U_j),$$

où $U_j$ désigne un ouvert quelconque de $E_j$, $F_i$ est un sous-ensemble fini quelconque de $J$ et $I$ est un ensemble quelconque d'indices.

La même formule est encore valide si on restreint les $U_j$ à une base de voisinages ouverts de $E_j$.

En conséquence, on a la base de voisinages de $E$ :

$$\bigcap_{j \in F} \varphi_j^{-1}(O_j),$$

où $F \subset J$ est fini, et $O_j$ appartient à une base de voisinages de $E_j$. Donc on peut caractériser la convergence des suites pour cette topologie de la manière très simple suivante :
$x_n \to x$ pour la topologie $\mathcal{O}$ si et seulement si $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ pour tout $i$.

**Lemme** 1.2:
$$\bigcap_{i\in F}\bigcup_{j\in J_i} A_j = \bigcup_{\psi\in\Psi}\bigcap_{i\in F} A_{\psi(i)},$$
où $\Psi$ est l'ensemble de toutes les applications $i \in F \to \psi(i) \in J_i$.

Cette dernière formule prouve que si $\mathcal{A}$ est une famille d'ensembles, alors "toute intersection finie d'unions finies d'éléments de $\mathcal{A}$ est une union d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$."

*Démonstration.* Si $x$ appartient à $\bigcap_{i\in F}\bigcup_{j\in J_i} A_j$, cela revient à dire que
$$\forall i \in F,\ \exists j (= \psi(i)) \in J_i,\ \ x \in A_j \Leftrightarrow$$
$$\exists \psi :\ F \to \cup_i J_i,\ \psi(i) \in J_i,\ \ x \in A_{\psi(i)},\ \ \forall i \in F.$$

***Démonstration de la proposition*** Si les $\varphi_i$ sont continues, tout élément de la forme est bien un ouvert de $E$. Réciproquement, la famille des ensembles de la forme est évidemment stable par union quelconque, et par intersection finie d'après le lemme.
□

## 1.2 Espaces métriques

### 1.2.1 Définitions

**Définition** 1.21: Soit $X$ un ensemble. Une *distance* sur $X$ est une application $d$ : $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$ :

*(d1)* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

*(d2)* $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;

*(d3)* $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

**Définition** 1.22: Un *espace métrique* est un couple $(X, d)$ où $X$ est un ensemble et $d$ est une distance sur $X$.

**Exemple** 1.12:

1. L'ensemble des réels muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique ( *distance usuelle* sur $\mathbb{R}$).
2. Sur $\mathbb{C}$, on remplace la valeur absolue par le module $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique ( *distance usuelle* sur $\mathbb{C}$).
3. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est muni de plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Pour deux éléments arbitraires de $\mathbb{K}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$, on pose :
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|, \qquad d_2(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\text{et} \qquad d_\infty(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i - x_i|.$$

4. Soit $X$ un ensemble. L'application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y, \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y, \end{cases}$$

est une distance sur $X$ (dite *la distance grossière*).

**Définition** 1.23: Deux distances $d_1, d_2$ sur $X$ sont dites équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$, telles que pour tout $x, y \in X : d_1(x,y) \leqslant \alpha d_2(x,y) \leqslant \beta d_1(x,y)$.

### *1.2.2 Propriétés de la distance*

**Proposition** 1.8: Une distance $d$ sur un ensemble $X$ vérifie :

1. La distance est toujours positive ou nulle :

$$\forall x, y \in X;\ d(x,y) \geqslant 0.$$

2. La distance entre les distances est plus petite que la distance :

$$\forall x, y, z \in X;\ |d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z).$$

**Preuve :**

1. En utilisant successivement $(d1)$, $(d3)$ et $(d2)$ on obtient pour $x, y \in X$ :

$$0 = d(x,x) \leqslant d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$$

2. En utilisant $(d3)$ on obtient pour $x, y, z \in X$ : $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. Par symétrie et en utilisant $(d2)$, on a aussi : $d(x,y) - d(x,z) \leqslant d(z,y) = d(y,z)$. On en déduit $|d(x,z) - d(x;y)| \leqslant d(y,z)$. □

**Remarque** 1.5: ✓ Tout espace *métrique* satisfait le premier axiome de dénombrabilité $(D1)$.

✓ Un espace métrique satisfait le second axiome de dénombrabilité $(D2)$, si et seulement si il est séparable.

### *1.2.3 Boules*

**Définition** 1.24: Soit $(X,d)$ est un espace métrique, soit $a \in X$ et $r \in [0, +\infty[$ on définit :

1. la boule ouverte de centre $a$ et rayon $r$ : $B(a,r) = \{x \in X; d(a,x) < r\}$,
2. la boule fermée de centre $a$ et rayon $r$ : $B_f(a,r) = \{x \in X; d(a,x) \leqslant r\}$,
3. la sphère de centre $a$ et rayon $r$ : $S(a,r) = \{x \in X; d(a,x) = r\}$.

**Remarque** 1.6: 1. Soit $0 < r < s$, on a les inclusions $B(a,r) \subset B_f(a,r) \subset B(a,s)$.

2. Soit $r \geqslant 0$, on a $B_f(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.

**Exemple** 1.13: 1. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, les boules sont des intervalles. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$, on a $B(a,r) = ]a-r, a+r[$ et $B_f(a,r) = [a-r, a+r]$.

2. L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance usuelle. La boule ouverte de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, $B(a,r)$, est le disque ouvert de centre $a$ et de rayon $r$ et $B_f(a,r)$ est le disque fermé de centre $a$ et de rayon $r$.
3. Les boules de rayon 0 sont : $B(a,0) = \emptyset$ et $B_f(a,0) = S(a,0) = \{a\}$.
4. Soit $(X,d)$ un espace métrique grossier ($d$ distance grossière) et $a \in X$. on a
   — si $r > 1$ : $B(a,r) = B_f(a,r) = X$, et $S(a,r) = X \backslash \{a\}$,
   — si $r = 1$ : $B(a,1) = \{a\}$, $B_f(a,1) = X$ et $S(a,1) = X \backslash \{a\}$,
   — si $0 < r < 1$ : $B(a,r) = B_f(a,r) = \{a\}$ et $S(a,r) = \emptyset$.

### *1.2.4 Parties bornées, fonctions bornées*

**Définition** 1.25: Soit $(X,d)$ un espace métrique. On dit qu'une partie $A$ de $X$ est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0,r)$ telle que $A \subset B_f(x_0,r)$,

$$\forall x \in A, \quad d(x_0,x) \leqslant r.$$

**Remarque** 1.7: Compte tenu de la remarque ci-dessus sur les inclusions des boules, il est clair que l'on peut remplacer l'adjectif "fermée" par "ouverte". De plus l'inégalité triangulaire entraîne que le caractère borné de $A$ ne dépend pas du choix de $x_0$ (avec un $x_0'$ il suffit de remplacer $r$ par $r' = r + d(x_0, x_0')$).

**Définition** 1.26: Soit $X$ un ensemble et $(Y,d)$ un espace métrique. On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est bornée si son image $f(X)$ est *bornée*. On note $F_b(X,Y)$ le sous-ensemble de $F(X,Y) = Y^X$ des fonctions bornées.

**Exercice** 1.6: Soit $(X,d)$ un espace métrique.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante sous-additive et ne s'annulant qu'en 0, i.e. vérifiant : $\forall t,s \in \mathbb{R}_+,\ "\varphi(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0"$ et $"\varphi(t) \leqslant \varphi(t+s) \leqslant \varphi(t) + \varphi(s)"$.
   Montrer que $\varphi \circ d$ est une distance sur X. Vérifier que $d$ et $\varphi \circ d$ sont métriquement équivalentes si il existe une constante $C > 0$ telle que $c^{-1}.t \leqslant \varphi(t) \leqslant c.t$, et topologiquement équivalentes si $\varphi$ est continue en 0.
2. Etudier les cas $\varphi(t) = \min(1,t),\ \varphi(t) = \frac{t}{1+t}$.

### *1.2.5 Distance entre deux parties, diamètre.*

**Définition** 1.27: **[Distance entre deux parties]** Soit $(X,d)$ un espace métrique. Soit $A$ et $B$ deux parties de $X$ on appelle distance entre $A$ et $B$ la quantité :

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y).$$

**Définition** 1.28: **[Distance d'un point à une partie]** On appelle distance d'un point $a$ de $X$ à une partie non vide $A$ de $X$, le réel :

$$d(a, A) = \inf\{d(a, x)/x \in A\}$$

**Exemple** 1.14: Si on prend $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ on a $d(A, B) = 0$ tandis que $A \neq B$. Ainsi la distance entre les parties ne définit pas vraiment une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$(ou $\mathbb{P}(X)$ en général). Il s'agit donc d'un abus de notation et il faut bien interpréter $d(A, B)$ comme l'infimum de la distance entre les points de $A$ et de $B$.

**Définition** 1.29: On appelle diamètre d'une partie $A$ de $X$ et on note $Diam(A)$ la quantité

$$Diam(A) = \sup\{d(x, y);\ x \in A, y \in A\}$$

On vérifie immédiatement qu'une partie $A$ de $X$ est bornée si et seulement si son diamètre est majoré.

### *1.2.6 Norme, espaces vectoriels normés*

Dans cette section, nous allons étudier plus en détails les espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On verra qu'il y a une différence fondamentale entre les espaces vectoriels normés de dimension finie et ceux de dimension infinie, ces derniers intervenant la plupart du temps comme espaces de fonctions. Les résultats de ce chapitre portant sur la dimension infinie peuvent être vu comme les premiers rudiments d'analyse fonctionnelle. Dans tout ce chapitre, on travaillera sur des espaces vectoriels réels ou complexes, i.e. ayant pour corps de base le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Définition** 1.30: Une norme sur $E$ est une application de $E$ dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|.\|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ :

*(N1)-* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

*(N2)-* $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénéité),

*(N3)-* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

**Définition** 1.31: Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|.\|)$ où $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|.\|$ est une norme sur $E$.

La proposition suivante précise en quel sens les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques. Il s'ensuit que toutes les propriétés des distances données plus haut ont une traduction en terme de norme dans les espaces vectoriels normés (En particulier, comme pour les distances il n'est pas nécessaire de supposer la norme positive ou nulle ; c'est une conséquence des axiomes (N1), (N2) et (N3)).

**Proposition** 1.9: Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé alors la quantité $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur $E$.

**Preuve :** Il est clair que les hypothèses (N1) avec $\lambda = 0$ et (N2) pour la norme $\|.\|$ entraîne la propriété (d1) de la distance $d$. La propriété (N1) avec $\lambda = -1$ pour la norme entraîne la propriété (d2) pour la distance. L'inégalité triangulaire suit immédiatement. □

**Remarque** 1.8: Les boules ou sphères de centre 0 et de rayon 1 sont appelées boules unité, sphère unité.

**Exemple** 1.15: L'espace vectoriel $n-$dimensionnel $\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est muni de trois normes importantes (les normes standard) $\|.\|_2$, $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$, définies par $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ :

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Les trois normes satisfont aux inégalités

$$\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|.\|_2 \leqslant n\|.\|_\infty.$$

**Exercice** 1.7: On va établir en plusieurs étapes que la quantité $\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ pour $(1 \leqslant p < +\infty)$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a
$$a.b \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
(Indication : On pourra utiliser la convexité de la fonction $x \to e^x$. )
2. Inégalité de *Hölder* : Pour $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer
$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$
( Indication on pourra d'abord montrer l'inégalité dans le cas où $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = 1$ ).
3. Inégalité de *Minkowski* : Pour $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$ montrer
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
( Indication écrire $|a_i + b_i|^p \leqslant |a_i + b_i|^{p-1}(|a_i| + |b_i|)$ ).
4. En déduire que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

**Exercice** 1.8: On peut encore généraliser de la façon suivante : Pour une famille finie de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés $(E_i, \|.\|_i)_{i\in\{1,...,n\}}$, et pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, la quantité

$$\|x\|_p = \begin{cases} \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{pour} \quad 1 \leqslant p < +\infty \\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\|_i & \text{pour} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

définit une norme sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

### 1.2.7 *Topologie des espaces métriques*

Soit $(X, d)$ un espace métrique.

**Définition** 1.32: On appelle ouvert de $(X, d)$ toute partie $O$ de $X$ qui est vide ou qui vérife :

$$\forall x \in O,\ \exists r > 0,\ \ B(x, r) \subset O.$$

**Remarque** 1.9: Un sous-ensemble non vide $O \subset X$ est ouvert si et seulement si $O$ s'écrit comme une réunion (finie ou infinie) de boules ouvertes.

**Définition** 1.33: Si $A \subset X$ est un sous-ensemble, un point $a \in A$ est dit point *intérieur* de $A$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs de $A$ s'appelle l'intérieur de $A$ et est désigné par $\mathring{A}$. On a évidemment toujours $\mathring{A} \subset A$. Donc

**Remarque** 1.10: Un sous-ensemble non vide $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

**Proposition** 1.10:

1. $X$ et $\emptyset$ sont des ouverts.
2. Toute réunion (finie ou infinie) de sous-ensembles ouverts est ouverte.
3. Toute intersection finie de sous-ensembles ouverts est ouverte.
4. L'intérieur $\mathring{A}$ d'un sous-ensemble $A \subset X$ est ouvert ; il coïncide avec l'ouvert le plus grand (au sens de l'inclusion) contenu dans $A$.

**Démonstration.** Exercice.

**Définition** 1.34: Soit $A \subset X$. Un point $x \in X$ est dit point adhérent à $A$ si pour tout $r > 0$ l'intersection $A \cap B(x, r)$ est non-vide. L'ensemble des points adhérents à $A$ s'appelle l'adhérence de $A$ est sera désignée par $\overline{A}$.

**Remarque** 1.11: Remarquer qu'on a toujours l'inclusion $Y \subset \overline{Y}$.

**Définition** 1.35:

1. On dit qu'une partie $A$ de $E$ est dense dans $E$ si l'adhérence de $A$ est égale à $E$ ( i,e $\overline{A} = E$).
2. On dit qu'une partie $B$ de $A$ est dense dans $A$ si $A \subset \overline{B}$.

**Définition** 1.36: On appelle frontière d'une partie $A$ de $E$ l'ensemble, noté $Fr(A)$, formé des points de $E$ adhérents à $A$ et à son complémentaire dans $E$ :

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \backslash A}.$$

**Définition** 1.37: Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique $(X,d)$ est dite convergente s'il existe $l \in X$ (appélé la limite de la suite) ayant la propriété : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$ on a $d(x_n, l) < \varepsilon$.

**Remarque** 1.12:

1. Une suite convergente a une seule limite.
2. Une suite convergente est bornée.
3. L'ensemble $C(E)$ des suites convergentes d'un espace normé $E$ est un espace vectoriel.
   L'application $L : C(E) \longrightarrow E; (x_n) \mapsto \lim x_n$ est linéaire.

**Définition** 1.38: **[Suite de Cauchy ]** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace métrique $(X,d)$, notons $\delta_n = \sup\{d(u_p,u_q)/p \geqslant n, q \geqslant n\}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si la suite réelle $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

**Remarque** 1.13:

1. $\delta_n$ est le diamètre de la partie : $A_n = \{u_p \backslash p \geqslant n\}$.
   La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
2. La définition s'écrit traditionnellement :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n,\ d(u_p,u_q) < \varepsilon.$$
3. Il est commode aussi d'introduire : $\varepsilon_n = \sup_{p\geqslant n} d(u_{n+p}, u_n)$,
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

**Définition** 1.39: **[Espace complet]** Un espace métrique est dit complet si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.

**Définition** 1.40: **[Partie complète]** Une partie $A$ de $X$ est dite complète, si toute suite de Cauchy formée de points de $A$ est convergente dans $A$.

**Définition** 1.41: **[Espace de Banach]** Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (evn) complet.

**Définition** 1.42: La suite extraite ( ou sous-suite ) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite de la forme $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ où $n_0 < n_1 < n_2 < ...$ est une suite strictement croissante de nombres naturels.

**Remarque** 1.14: Toute suite extraite d'une suite convergente de limite $l \in X$ est aussi convergente de même limite $l$.

**Proposition** 1.11: Pour toute partie $A$ de $X$ et tout point $x$ de $X$ on a l'équivalence entre :

1. $x \in \overline{A}$.
2. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ dont $x$ est limite ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$).

**Preuve :**

1) $\Rightarrow$ 2) : Soit $x$ un élément de $\overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, alors il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite de $A$ et elle converge vers $x$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A$, alors pour tout $r > 0$ il existe $n_r$ tel que :$d(x_{n_r}, x) < r$, on a $x_{n_r} \in B(x, r) \cap A$ alors $x \in \overline{A}$. □

**Définition** 1.43: Une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point $x \in X$ qui est la limite d'une sous-suite de $(x_n)$.

**Remarque** 1.15: Un point $x \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $r > 0$ la boule $B(x, r)$ contient une infinité de termes de la suite, donc l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in B(x, r)\right\}$ est infini.

**Exemple** 1.16: $1, -1, i, -i$, sont les valeurs d'adhérence de la suite complexe définie par $z_n = i^n + \frac{1}{n+1}$.

**Définition** 1.44: Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit fermé si le sous-ensemble complémentaire $C_X F$ est ouvert.

**Proposition** 1.12: Soit sous-ensemble $F \subset X$, alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F$ est fermé.
2. $\overline{F} = F$.
3. La limite de toute suite de $F$ qui converge dans $X$ est un élément de $F$.

**Preuve.**

1) $\Rightarrow$ 2) : Supposons par l'absurde que $\overline{F} \neq F$, on existe $x \in \overline{F} \backslash F$, donc $x \in C_X F$, ( où $C_X F$ ouvert). Puisque $x \in \overline{F}$, on a $C_X F \cap F \neq \emptyset$. Contradiction.

2) $\Rightarrow$ 3) : voir Proposition 1.11.

3) $\Rightarrow$ 1) : Par l'absurde, soit $C_X F$ n'était pas ouvert alors existe $x \in C_X F$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq C_X F$, donc $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ avec $x \in C_X F$. Contradiction. □

**Exemple** 1.17: Tout sous-ensemble fini $Y \subset X$ est fermé.
Puisque, si $x \in \overline{Y}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Prend $\varepsilon = \min\{d(x, y);\ x, y \in Y,\ \text{et}\ \ x \neq y\} > 0$. On a $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0;\ d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$,
donc : $\forall n \geqslant n_0;\ d(x_{n_0}, x_n) \leqslant d(x_{n_0}, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$, alors $x_{n_0} = x_n$, $\forall n \geqslant n_0$. On obtient donc $x = x_{n_0} \in Y$.

**Définition** 1.45 (Voisinage): On appelle voisinage d'un point $a$ de $X$ toute partie $V$ de $X$ contenant une boule ouverte de centre $a$. L'ensemble des voisinages de $a$ est noté $\mathcal{V}(a)$ :

$$V \in \mathcal{V}(a) \Longleftrightarrow \exists r > 0, B(a, r) \subset V.$$

**Remarque** 1.16: Pour tout réel $r > 0$, la boule $B(a, r)$ est un voisinage de $a$.

**Proposition** 1.13:
1. La réunion d'une famille quelconque de voisinages d'un même point $x$ de $X$ est un voisinage de $x$.
2. L'intersection de deux voisinages de $x$ est un voisinage de $x$.
3. Toute partie qui contient un voisinage d'un point $x$ de $X$ est aussi un voisinage de $x$.

**Définition** 1.46 (Voisinage Relatif): Si $A$ est une partie de $X$ et $a$ un point de $A$, l'intersection avec $A$ d'un voisinage $V$ de $a$ s'appelle voisinage de $a$ dans $A$. L'ensemble des voisinages de $a$ dans $A$ est noté $\mathcal{V}_A(a)$ :

$$\mathcal{V}_A(a) = \{V \cap A / V \in \mathcal{V}(a)\}$$

Ainsi $\quad U \in \mathcal{V}_A(a) \Longleftrightarrow \exists r > 0;\ A \cap B(a, r) \subset U$

**Remarque** 1.17: L'ouvert de $E$ toute partie $O$ de $E$ qui est voisinage de chacun de ses points :

$$O \text{ ouvert } deE \Longleftrightarrow \forall x \in O, O \in \mathcal{V}(x).$$

**Définition** 1.47 (Ouvert relatif- Fermé relatif): Si $A$ est une partie de $E$,

1. On appelle ouvert de $A$ toute partie $U$ de $A$ voisinage de chacun de ses points dans $A$.
$$U \text{ ouvert de } A \Longleftrightarrow \forall x \in U,\ U \in \mathcal{V}_A(x)$$
2. On appelle fermé de $A$ toute partie $Y$ de $A$, dont le complémentaire dans $A$ est un ouvert de $A$.

**Remarque** 1.18:
1. Soit $O \subset A$, $O$ est un ouvert de $A$ si et seulement s'il existe $G$ ouvert de $E$ tel que : $O = G \cap A$.
2. Soit $K \subset A$, $K$ est un fermé de $A$ si et seulement s'il existe $F$ fermé de $E$ tel que : $K = F \cap A$.

**Définition** 1.48: **[Point d'accumulation]** On appelle point d'accumulation d'une partie $A$ de $E$ tout point $x$ de $E$ adhérent à $A \backslash x$.
Un tel point est caractérisé par le fait que, pour tout voisinage $V$ de $x$, l'ensemble $A \cap V \backslash x$ n'est pas vide ou $A \cap V$ est infini.

**Définition** 1.49: **[Point Isolé]** On appelle point isolé d'une partie $A$ de $E$ tout point $a$ de $A$ possédant un voisinage $V$ dont l'intersection avec $A$ est le singleton $\{a\}$ :

$$a \text{ point isolé de } A \Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(a), A \cap V = \{a\}.$$

**Définition** 1.50: **[Partie bornée]** Une partie $A$ de $E$ est dite bornée s'il existe une boule de $E$ contenant $A$.

**Définition** 1.51: **[Espace de Baire ]** Un espace topologique (non vide) separe $X$ est dit de Baire s'il verifie la propriete suivante :

*(*)* $\forall (O_n)_{n\geqslant 1}$ suite d'ouverts de $X$ denses dans $X$, alors $O = \cap_{n=1}^{+\infty} O_n$ est dense dans $X$.

**Remarque** 1.19: 1. La propriété de Baire est une propriété *topologique*.

2. (*) $\Longleftrightarrow$ $\forall (F_n)_{n\geqslant 1}$ suite de fermés de $X$ d'intérieurs vides , alors $F = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ d'intérieur vide.

3. En particulier, si $X$ est de Baire, $X$ ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

**Théorème** 1.2 (théorème de Baire ): tout espace métrique complet est un espaces de Baire.

**Démonstration :** Soit $(X, d)$ metrique complet, $(O_n)$ une suite d'ouverts denses et $\Omega$ un ouvert non vide de $X$, alors : $\exists B_1$ boule fermée de diamètre $\in ]0, 1[$, $B_1 \subset \Omega \cap O_1$; est noter que $\mathring{B}_1$ est non vide.
$\exists B_2$ boule fermée de diamètre $\in ]0, \frac{1}{2}[$, $B_2 \subset \mathring{B}_1 \cap O_2$. ...
On construit ainsi par récurrence une suite $(B_n)$ décroissante de fermés non vides de $X$, de diamètres tendant vers 0 , telle que : $\forall n \geqslant 1, , B_{n+1} \subset \mathring{B}_n \cap O_{n+1}$; alors : $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \Omega \cap \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$. Ce résultat constitue le théorème de Baire. □

**Proposition** 1.14: Tout ouvert d'une espace de Baire est un espaces de Baire.

**Démonstration :** Soit $X$ de Baire, $A$ ouvert de $X$, $(O_n)$ suite d'ouverts de $A$ denses dans $A$ et $O = \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$ ; le surlignage et l'exposant "$c$" correspondent a *l'adherence* et le *complementaire* dans $X$.
$\forall n : U_n = O_n \cup (\overline{A})^c$ est ouvert dans E, et dense, puisque :

$$\overline{U_n} = \overline{O_n \cup (\overline{A})^c} = \overline{O_n} \cup \overline{(\overline{A})^c} \supset \overline{A} \cup (\overline{A})^c = X.$$

Par Baire : $X = \overline{\cap U_n} = \overline{(\cap O_n) \cup (\overline{A})^c} = \overline{O \cup (\overline{A})^c} = \overline{O} \cup \overline{(\overline{A})^c}$;
mais $A \cap \overline{(\overline{A})^c} \subset A \cap \overline{A^c} = A \cap A^c = \emptyset$ donc $A \subset \overline{O}$, i.e. $O$ est dense dans $A$. □

## *Exercices*

**Exercice** 1.9: Soit $X$ un espace topologique. Soit $A \subset X$ une partie de $X$. Montrer que $A$ est ouvert dans $X$ si et seulement si pour tout $x \in A$ il existe un ouvert $U$ contenant $x$ et contenu dans $A$.

**Exercice** 1.10: Soit $X$ et $Y$ deux un espaces topologiques. Vérifier que la définition de la topologie produit donnée dans le copurs est valide : l'intersection d'un nombre fini d'ouverst est un ouvert.

**Exercice** 1.11: Soit $X$ un espace munit de deux distances équivalentes. Montrer que ces deux distances définissent la même topologie.

**Exercice** 1.12: Montrer que

1. le produit de deux espaces Hausdorff (i, e séparé )est Hausdorff;

2. tout sous-espace d'un espace Hausdorff est Hausdorff;

3. un espace topologique $X$ est Hausdorff si est seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times X$.

**Exercice** 1.13: On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Determiner l'adhérence et l'intérieur de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice** 1.14: Soient $X$ un espace topologique et $A \subset X$ une partie de $X$. La *frontière* $\partial A$ de $A$ dans $X$ est définie par

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

Montrer que

1. l'intérieur $A^o$ et la frontière $\partial A$ sont disjoints, et que $\bar{A} = A^o \cup \partial A$.
2. $\partial A = \emptyset$ si et seulement si $A$ est à la fois ouverte et fermé.
3. $A$ est ouverte si et seulement si $\partial A = \bar{A} - A$.
4. Si $A$ est ouverte, est-ce qu'il est vrai que $A = (\bar{A})^o$ ?

**Exercice** 1.15: Donner des exemples d'images d'ouverts (resp. de fermés) dont l'image par une application continue n'est pas ouverte (resp. fermé).

**Exercice** 1.16: Soient $X$ un espace topologique et $f : X \to Y$ une fonction continue dans un espace topologique Hausdorff $Y$. Soit $A \subset X$ tel que $\bar{A} = X$ ($A$ est donc dense dans $X$). Soit $g : X \to Y$ une fonction continue telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que $g$ est uniquement déterminé par $f$.

**Exercice** 1.17: Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue en un point seulement.

**Exercice** 1.18: Soit $X$ un espace métrique muni de sa fonction de distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $d$ est continue.

2. Soit $X'$ est un espace topologique dont l'espace sous-jacent est $X$. Montrer que si $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$ est continue, alors la topologie de $X'$ est plus fine que la topologie de $X$.

On peut résumer le resultat de cet exercice de la manière suivante : Si $X$ possède une métrique $d$, alors la topologie induite par $d$ est la plus grossière par rapport laquelle la fonction $d$ soit continue.

**Exercice** 1.19:

1. Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si $A$ et $B$ sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbb{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :
   (i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A \cup B)$, (iii) $\sup(A \cap B)$, (iv) $\inf(A \cup B)$, (v) $\inf(A \cap B)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Trouver $d(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$, $d(M, \mathcal{D})$ où $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite de vecteur unitaire $(a, b, c)$.
3. Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$. Trouver $d(A, B)$ lorsque $A$ est une branche de l'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 1\}$ et $B$ une asymptote.
4. On définit $\mathrm{diam} A = \sup_{a,b \in A} \|a - b\|$. Quel est $\mathrm{diam}(]0, 1[\cap \mathbb{Q})$ ? $\mathrm{diam}([0, 1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ ?

***Indication* :** Vérifier que :

1. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ ;
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ ;
3. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$ ;
4. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$ ;
5. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$ ;

**Exercice** 1.20: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. Tout singleton est un fermé de $X$.
2. Pour tout couple de points de $X$, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre.
3. Pour tout point $x \in X$, $\{x\}$ est l'intersection de tous les voisinages de $x$.

**Exercice** 1.21: Montrer que si l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé alors tout singleton $\{x\}$ est fermé et peut s'écrire comme l'intersection de tous les voisinages de $x$.

**Exercice** 1.22: Sur $X = [0, 1[\subset \mathbb{R}$, on considère $\mathcal{T} = \{[0; \alpha[; 0 < \alpha \leqslant 1\} \cup \{\phi\}$. Vérifier que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $X$. Décrire les fermés de $(X, \mathcal{T})$. Soit $I = [a, b] \subset X$. Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $I$. $X$est-il un espace séparé ?

**Exercice** 1.23: Soit $\mathbb{R} = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ la droite réelle, considérée comme le sous ensemble du plan, constituée des points dont l'ordonnée est nulle. On définit $X = \mathbb{R} \cup \{a\}$, avec $a = (0, 1)$, $a \in \mathbb{R}^2$. On munit $X$ de la topologie $\mathcal{T}$, dont les ouverts sont les parties de $X$ qui sont contenues dans $\mathbb{R}$, ou sont le complémentaire d'un ensemble dénombrable :

$$\mathcal{T} = \{O \in \mathcal{P}(X)/O \subset \mathbb{R}, ou : \exists A \text{ dénombrable} : O = X - A\}$$

Montrer que $a$ est dans l'adhérence de $\mathbb{R}$, mais qu'aucune suite de points de $\mathbb{R}$ ne converge vers $a$. Quelles sont les suite de $X$ qui admettent a comme valeur d'adhérence ? Quelle est la topologie induite par $X$ sur $\mathbb{R}$?

**Exercice** 1.24: Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeur réelle muni de la topologie donnée par la norme $\|f\|_{+\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que $A = \{f \in E; f(x) > 0,\ \forall x \in [0, 1]\}$ est ouvert.
2. Montrer que $B = \{f \in E;\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = 0\}$ est fermé.
3. Déterminer la frontière de $C = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]);\ f(0) > 0\}$.
4. Montrer que $A \subset E$ n'est pas ouvert pour la topologie définie par la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.
5. Les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont-elles équivalentes ?

**Exercice** 1.25: Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
***Indication*** : si $x \in O$ ouvert, considérer $J_x$ qui est l'union des intervalles ouverts inclus dans $O$ et contenant $x$). Énoncer un résultat similaire pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $J_x$ est un intervalle ouvert; que $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \emptyset$. Et penser que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

**Exercice** 1.26: On va montrer que l'ensemble $D$ des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p$ et $q$ décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Remarquer que $D$ est stable par addition et multiplication.
2. Posons $u = \sqrt{2} - 1$ ; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$.
   En déduire le résultat.

**Indication :** Pour trouver $m$, que prendriez-vous si on voulait seulement $m \in \mathbb{R}$ ?

**Exercice** 1.27: Montrer que dans tout espace métrique $(E, d)$ une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ ne coincide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a, r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$, $E = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $1/2$).

**Indication :** Revenir à la définition de ce qu'est un "ensemble fermé" et de ce qu'est une "boule fermée".

**Exercice** 1.28: $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a,r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R) \Longleftrightarrow r \leqslant R$ et $\|a-b\| \leqslant R-r$.

**Correction :**

1. On note $B = B(a,r)$, $B' = B'(a,r)$, $\bar{B} = \overline{B(a,r)}$. Il faut montrer $B' = \bar{B}$. $B'$ est une boule fermée, donc un fermé contenant $B$, alors que $\bar{B}$ est le plus petit fermé contenant $B$, donc $\bar{B} \subset B'$.
   Étudions l'inclusion inverse : soit $x \in B'$, il faut montrer $x \in \bar{B}$. Si $x \in B$ alors $x \in \bar{B}$, supposons donc que $x \notin B$, alors $\|x-a\| = r$. Soit $B(x,\varepsilon)$ un boule centrée en $x$. $x$ est adhérent à $B$ si $B(x,\varepsilon) \cap B$ est non vide quelque soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit le point
   $$y = x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}.$$
   Faire un dessin et placer $y$ sur ce dessin. D'une part $y \in B(x,\varepsilon)$ car $\|y-x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. D'autre part $y \in B = B(a,r)$ car $\|y-a\| = \|x-a-\frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}\| = \|x-a\|(1-\frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$. Donc $y \in B \cap B(x,\varepsilon)$, ce qui prouve que $B' \cap \bar{B}$. Donc $B' = \bar{B}$.
2. Pour le sens $\Leftarrow$. Soit $x \in \bar{B}(a,r)$ alors $\|x-b\| = \|x-a+a-b\| \leqslant \|x-a\| + \|a-b\| \leqslant r + R - r \leqslant R$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$.
   Pour le sens $\Rightarrow$. Soit
   $$x = a + r\frac{a-b}{\|a-b\|},$$
   alors $\|x-a\| = r$ donc $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$, donc $\|x-b\| \leqslant R$ or $\|x-b\| = \|a-b\| + r$ (c'est le même calcul que pour la question précédente). Donc $\|a-b\| + r \leqslant R$, soit $0 \leqslant \|a-b\| \leqslant R-r$ et en particulier $r \leqslant R$.

**Exercice** 1.29:

1. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x,y)\| = \max(|x+y|, |x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.
2. Soit $p, q$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$, $B_p$ et $B_q$ leurs boules unités fermées. Montrer que
   $$B_q \subset B_p \Longleftrightarrow p \leqslant q.$$
   Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$ ? Exemples.

**Correction :**

1. (a) Si $\|(x,y)\| = 0$ alors $\max(|x+y|, |x-2y|) = 0$ donc $x+y = 0$ et $x-2y = 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$. Réciproquement $\|(0,0)\| = 0$.
   (b) $\|\lambda.(x,y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\| = \max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - 2\lambda y|) = |\lambda| \max(|x+y|, |x-2y|) = |\lambda|.\|(x,y)\|$.

(c) $\|(x,y)+(x',y')\| = \|(x+x',y+y')\| = \max(|x+x'+y+y'|,|x+x'-2y-2y'|) \leqslant \max(|x+y|+|x'+y'|,|x-2y|+|x'-2y'|) \leqslant \max(|x+y|,|x-2y|)+\max(|x'+y'|,|x'-2y'|) \leqslant \|(x,y)\|+\|(x',y')\|$.

La boule unité fermée centrée à l'origine est la région du plan comprise entre les droites d'équations $x+y=+1$, $x+y=-1$, $x-2y=+1$, $x-2y=-1$.

2. Sens $\Leftarrow$ : Si $x \in B_q$ alors $q(x) \leqslant 1$ donc $p(x) \leqslant 1$ donc $x \in B_p$. Sens $\Rightarrow$ : Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $q(\frac{x}{q(x)}) = 1$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_q$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_p$ donc $p(\frac{x}{q(x)}) \leqslant 1$ soir $p(x) \leqslant q(x)$. Ceci étant aussi valable pour $x = 0$.

   $B_q \subset 2B_p$ est équivalent à $p(x) \leqslant 2q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (attention au sens!). Et $\frac{1}{2}B_p \subset B_q$ est équivalent à $\frac{1}{2}q(x) \leqslant p(x)$. Si les deux inclusions sont vraies alors $\frac{1}{2}p \leqslant q \leqslant 2p$ et en particulier les normes $p$ et $q$ sont équivalentes.

   Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ On a

$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty \subset 2B_1 \subset 2B_2 \subset \cdots$$

**Exercice** 1.30: On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) $d(x,y) = \sup_n |x(n)-y(n)|$. Montrer que $Y$ est fermé dans $X$. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans $Y$ mais pas dans $X$.

**Correction :**

1. Une suite de $l^\infty$ est notée $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, pour chaque $p \geqslant 0$, $x^p$ est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$. (Il convient de garder la tête froide : on regarde des suites de suites!) Il faut montrer que $Y$ est fermé dans $X$. Soit donc $(x^p)$ une suite de $Y$ qui converge vers $x \in X$. Il faut donc montrer qu'en fait $x \in Y$, c'est-à-dire que $x = (x(0), x(1), \ldots)$ est une suite tendant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ comme $x^p \to x$ alors il existe $P$ tel que si $p \geqslant P$ on ait $d(x^p, x) < \varepsilon$. Par la définition de $d$ on a pour $p \geqslant P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^p(n) - x(n)| < \varepsilon$. Fixons $p = P$, alors $x^P \in Y$ donc $x^P$ est une suite tendant vers 0, donc il existe $N$ tel que si $n \geqslant N$ alors $|x^P(n)| < \varepsilon$. Réunissons tout cela, pour $n \geqslant N$ :

$$|x(n)| = |x(n) - x^P(n) + x^P(n)| \leqslant |x(n) - x^P(n)| + |x^P(n)| \leqslant 2\varepsilon.$$

   Donc la suite $x$ tend vers 0, donc $x \in Y$ et $Y$ est fermé.

2. Notons $Z$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Pour $y = (y(0), y(1), y(2), \ldots) \in Y$, définissons la suite $y^0 = (y(0), 0, 0, \ldots)$, $y^1 = (y(0), y(1), 0, 0, \ldots)$,... $y^p = (y(0), \ldots, y(p-1), y(p), 0, 0, 0, \ldots)$. La suite $(y^p)$ est bien une suite d'éléments de $Z$. De plus $d(y^p, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y^p(n) - y(n)| = \sup_{n>p} |y(n)|$ or la suite $y(n)$ tend vers 0 donc $d(y^p, y)$ tend vers 0 quand $p$ tend vers $+\infty$.

   On montre facilement (par l'absurde) que l'élément $x = (1,1,1,\ldots) \in X$ n'est limite d'aucune suite d'éléments de $Z$, (ni d'ailleurs de $Y$).

**Exercice** 1.31: Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})\ ;\ f(0) = 0\}$. On pose

$$\|f\| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ et } N(f) = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)|.$$

Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur $E$.

**Correction :** Par l'inégalité triangulaire $|f(x) + f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|$ on obtient $\|f\| \leqslant N(f)$. Pour une inégalité dans l'autre sens décomposons le travail :

— $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$ : en effet par l'inégalité triangulaire $|f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x) + f(x)|$.

— $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$ : en effet $f$ est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Soit $x_0 \in [0,1]$ ce point du maximum. Si $x_0 \in ]0,1[$ alors $f'(x_0) = 0$ donc $\|f\|_\infty = |f(x_0)| = |f(x_0) + f'(x_0)| \leqslant \|f\|$. Si $x_0 = 1$ alors $f$ et $f'$ ont même signe sur un intervalle $[1-\varepsilon, 1]$ donc sur cet intervalle $|f(x)| \leqslant |f(x) + f'(x)|$ et donc $\|f\|_\infty = |f(1)| \leqslant \|f\|$. (Enfin $f(0) = 0$ donc si $x_0 = 0$ alors $f$ est nulle et l'inégalité est triviale.)

— Il reste à rassembler les expressions :

$$N(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\| + \|f\|_\infty \leqslant 3\|f\|.$$

(La première inégalité vient du premier point et la deuxième du second.)

Les normes $\|f\|$ et $N(f)$ sont équivalentes :

$$\frac{1}{3}N(f) \leqslant \|f\| \leqslant N(f).$$

**Exercice** 1.32: On désigne par $d(a,b)$ la distance euclidienne usuelle de $a, b \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$\delta(a,b) = \begin{cases} d(a,b) & \text{si } a,b \text{ sont alignés avec l'origine } O \\ d(0,a) + d(0,b) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $\delta$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$ ("distance SNCF") plus fine que la distance usuelle.
   Dans la suite, on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie associée à $\delta$.
2. Soit $H$ le demi-plan $\{(x,y)\ ;\ y > 0\}$ ; montrer que $H$ est un ouvert ; déterminer $\overline{H}$.
3. Quelle est la topologie induite sur une droite vectorielle ; sur le cercle unité $\Gamma$ ?
4. Lesquelles des transformations suivantes sont continues : homothéties de centre $O$ ; rotations de centre $O$ ; translations ?

**Exercice** 1.33:
1. Montrer que $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ sont deux normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$. Sont-elles équivalentes ?
2. Les deux métriques associées sont-elles topologiquement équivalentes ?

**Correction :**
1. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leqslant \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ Par contre il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout $f$. Pour montrer ceci par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout $f$ de $C([0,1],\mathbb{R})$. Regardons les fonctions $f_k$ définies par $f_k(x) = 2k(1-kx)$ si $x \in [0, \frac{1}{k}]$ et $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Alors $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $\|f_k\|_\infty = 2k$ alors que $\|f_k\|_1 = 1$. On obtient $2k \leqslant C.1$ ce qui est contradicoire pour $k$ assez grand. Cela prouve que les normes ne sont pas équivalentes.

2. Comme les métriques sont définies par des normes et que les normes ne sont pas équivalentes alors les métriques ne définissent pas la même topologie.

**Exercice** 1.34: Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall a > 0, \lim_{n \to +\infty} f(n.a) = 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

**Correction :** Rappelons que $]0, +\infty[$ est une un espaces de Baire. Soit $\varepsilon > 0$,
De, $\forall a > 0, \exists p,\ k \geqslant p \Longrightarrow |f(k.a)| \leqslant \varepsilon$, on tire : $\bigcup_p \bigcap_{n \geqslant p} D_n = ]0, +\infty[$, où $D_n = \{x \in \mathbb{R}_+^*;\ |f(n.x)| \leqslant \varepsilon\}$.
$(D_n)_n$ famille des fermés dans $\mathbb{R}_+^*$, car $f$ est continue, donc : $\forall p, \bigcap_{n \geqslant p} D_n$ est ferme dans $]0, +\infty[$.
Puisque $]0, +\infty[$ est de Baire donc : $\exists p, \exists \alpha, \beta, (0 < \alpha < \beta), [\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n \geqslant p} D_n$ , par suite : $\forall n \geqslant P, \forall x \in [\alpha, \beta] : |f(n.x)| \leqslant \varepsilon$, i,e, $\forall n \geqslant P, \forall x \in [n\alpha, n\beta] : |f(x)| \leqslant \varepsilon$.
A partir d'un certain rang, les intervalles se chevauchent, et leur extremite superieure tend vers $+\infty$. On conclut.

**Exercice** 1.35: Un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable non finie (par exemple : $\mathbb{K}[X]$ ). Montrer que ne peut pas être muni d'une norme qui le rende complet.

**Correction :** Soit $E$ un tel espace muni d'une norme quelconque, $(e_n)n \geqslant 1$ une base algebrique de $E$ et $F_n = Vect(e_1, ..., e_n)$ : $(F_n)_n$ est une suite croissante de fermes non vides de $E$ (sevs de dim. finie), d'interieurs vides (par l'absurde) ; si $E$ etait complet, $\cup F_n$ serait d'interieur vide ; or $\cup F_n = E$ : absurde.

**Exercice** 1.36: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, Montrer qu'il existe un intervalle non trivial sur lequel $f$ est lipchitzienne.

# 2. TOPOLOGIES SUR LES ESPACES DE FONCTIONS

Les objets d'étude préférés de l'analyse sont les fonctions, qu'elles soient à valeurs réelles, ou à valeurs dans des espaces plus gros que $\mathbb{R}$, et qu'elles viennent toutes seules, ou dans des espaces de fonctions très gros.
D'un autre côté, une manière souvent fructueuse d'étudier une fonction individuelle est d'étudier l'espace de fonctions naturel dans lequel elle vit, et en particulier les propriétés globales de cet espace peuvent nous renseigner sur les comportements individuels. Le chapitre qui suit est donc l'un des plus importants de ce cours d'analyse. Comme l'analyse ne se contente souvent pas d'une notion qualitative de la proximité, nous travaillerons plus souvent avec des espaces métriques que d'habitude, pour établir quantitativement la proximité relative d'objets.
Soient $X$ et $Y$ deux ensembles, on note $\mathcal{F}(X,Y) = Y^X$ l'ensemble des applications de $X$ dans $Y$.
Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, on note $C(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de $X$ dans $Y$, et note $\mathcal{K}(X)$ le famille des parties compact de $X$.

**Définition** 2.1: **[Topologie définie par une famille de semi-distances]**

✓ Soit $E$ un ensemble. Une semi-distance sur $E$ est une application $d : E \times E \longrightarrow [0,+\infty]$ telle que
  1. $\forall x \in E, d(x,x) = 0;$
  2. $\forall x,y \in E, d(x,y) = d(y,x);$
  3. $\forall x,y,z \in E, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$

✓ On introduira les semi-boules ouverts $B_d(x,r) = \{x \in E;\ d(x,y) < r\}$.

✓ Soit $(d_i)_{i\in I}$ une famille de semi-distances sur $E$. *La topologie définie par une famille de semi-distances* $(d_i)_{i\in I}$ est un topologie $\mathfrak{T}$ engendrée par la famille des semi-boules ouvertes :

$$\Big\{B_{d_i}(x,r);\ i \in I,\ x \in E,\ r > 0\Big\}. \tag{2.1}$$

**Remarque** 2.1: 1. Les intersections finies de semi-boules ouvertes forment une base d'ouverts.

2. Soit $x \in E$. La famille

$$\Big\{ \cap_{j\in J} B_{d_j}(x,r_j);\ J \subset I \text{ finie },\ r_j > 0 \Big\}$$

est un système fondamental de voisinages de $x$.

3. La suite $(x_n)$ d'éléments de $E$ converge vers $x$ si et seulement si

$$\forall i \in I, \ \ d_i(x, x_n) \longrightarrow_{n\to\infty} = 0.$$

4. Supposons qu'il existe $J \subset I$ telle que $\forall i \in I, \exists j \in J, d_i \leqslant d_j$.
Alors les familles $(d_i)_{i\in I}$ et $(d_j)_{j\in J}$ induisent la même topologie sur $E$.
5. On suppose ici $I = \mathbb{N}$. On suppose de plus que

$$\forall x, y \in E, (\forall i \in I, \ d_i(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y).$$

On note :

$$d(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min(d_k(x, y), 1).$$

Alors $d$ est une distance sur $E$ et que la topologie induite par $d$ est égale la topologie définie par une famille de semi-distances $(d_i)_{i\in I}$ $\mathfrak{T}$.

## 2.1 Topologie de la convergence simple

**Définition** 2.2 (**convergence simple**): Si $X$ est un ensemble et $(Y, \mathcal{T})$ est un espace topologique. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ dans $Y$ converge simplement vers $f \in Y^X$ si pour tout $x \in X$ , la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet $f(x)$ pour limite dans $(Y, \mathcal{T})$.

Notons aussi que si $(Y, d)$ est un espace métrique, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $Y^X$ converge simplement vers $f \in Y^X$ si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ ($N$ dépend de $x$ et de $\varepsilon$ )

On a défini la convergence simple sans utiliser la topologie sur $Y^X$ ; en fait il y a bien une topologie sous-jacente sur cet ensemble, qui l'on va définir toute la suite.

**Définition** 2.3 (**topologie de la convergence simple**): Soient $X$ un ensemble et $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour tout $x \in X$, considérons l'application d'évaluation en $x$ de $Y^X$ dans $Y$ définie par $ev_x(f) = f(x)$. On appelle *topologie de la convergence simple* sur $Y^X$ la topologie initiale associée à la famille $(ev_x)_{x\in X}$. On note une telle topologie $\mathcal{T}_{cs}$. C'est aussi la topologie la moins fine sur $Y^X$ rendant continues toutes les applications d'évaluation $ev_x$.

**Remarque** 2.2: Si $Y$ un espace topologique métrisable avec la distance $d$. Soientt $f \in Y^X$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, et $\varepsilon > 0$, on pose

$$V(f; \varepsilon, n, x_1, x_2, ..., x_n) = \Big\{g \in Y^X; \ \ d(g(x_i), f(x_i)) < \varepsilon, \forall i \in \{1, ...n\}\Big\}.$$

Alors la famille $BV(f) = \{V(f; \varepsilon, n, x_1, x_2, ..., x_n); \ x_1, x_2, ..., x_n \in X, n \in \mathbb{N}, \ \varepsilon > 0 \ \}$, forment un système fondamental de voisinages ouverts de $f$ dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$.

**Proposition** 2.1: Une suite $(f_n)$ dans $Y^X$ converge simplement vers une application $f : X \to Y$, si et seulement si la suite $(f_n)$ converge vers $f$ dans l'espace topologique $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$.

Ceci résulte de l'équivalence : $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} ev_x(f_n) = ev_x(f)$.

**Proposition** 2.2: pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert $U$ de $Y$, on pose :

$$\Omega_{x,U} = \{f \in Y^X;\ \ f(x) \in U\} = ev_x^{-1}(U).$$

Alors les intersections finies de parties de la forme $\Omega_{x,U}$ , où $x$ et $U$ arbitraires, forment une base de $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$.

**Exemple** 2.1: Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: On se donne une fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est nulle en dehors d'une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors la suite donnée par $f_n(x) = f_0(x - n)$ converge simplement vers 0 mais pas uniformément si $f_0 \neq 0$.

**Exemple** 2.2: Dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$: On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & si \quad x \in [0, \frac{1}{n+1}]; \\ -(n+1)x + 2 & si \quad x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}]; \\ o & si \quad x \in [\frac{2}{n+1}, 1]. \end{cases}$$

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.

**Exercice** 2.1: Montrer que si l'espace topologique $Y$ est séparé, alors l'espace topologique $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$ est séparé.

**Exercice** 2.2: Soit $E$ l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, i.e, $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$. Si $f \in E$, $N \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, ..., x_N) \in [0,1]^N$, et $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N) \in (\mathbb{R}_+^*)^N$, on définit $V(f, \varepsilon, x) = \left\{g \in E;\ \left|g(x_i) - f(x_i)\right| < \varepsilon_i, \forall i \in \{1, ...N\}\right\}$.
On définit $O$ comme l'ensemble des réunions d'ensembles précédents.

1. Montrer que $O$ définit une topologie sur $E$.
2. Montrer qu'une suite de fonctions de $E$ est convergente pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement.
3. Soit $D$ l'ensemble des fonctions de $E$ nulles sauf en un nombre fini de points. Montrer que $D$ est dense dans $E$ pour topologie $O$.
4. En utilisant une fonction de $E$ non nulle sur un ensemble non dénombrable, montrer que la topologie précédente n'est pas métrisable.

**Exercice** 2.3: On note $l^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}; \mathbb{R})$, l'ensemble des suites réelles bornées. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^1$ est bornée si il existe une constante $C$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{j\in\mathbb{N}} |f_n(j)| \leqslant C$. Montrer que de toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^\infty$ on peut extraire une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement.

**Exercice** 2.4: Dans $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$,, on considère la suite $f_n$ des fonctions caractéristiques des ensembles $\bigcup_{p=1}^{2^{n-1}} ]\frac{2p-1}{2^n}, \frac{2p}{2^n}[$. En utilisant l'écriture dyadique des réels (en base 2), montrer que l'on ne peut pas extraire de sous-suite simplement convergente. Que peut-on en déduire sur la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$, ?

**Exercice** 2.5: Soit $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$, l'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, muni de la topologie de la convergence simple $\mathcal{T}_{cs}$. On note par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions dans $E$ qui sont nulles partout sauf en un nombre fini de points.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est dense dans $E$
2. Montrere que si $f$ est limite d'une suite dans $\mathcal{F}$, alors $f$ est nulle partout sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable de $[0,1]$
3. En déduire que $E$ n'est pas métrisable.
4. Montrer que toute fonctions de $\mathcal{F}$ est limite d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$. En déduire que $C([0,1],\mathbb{R})$ est dense dans $E$.
5. Soit $g$ la fonction dans, qui vaut 1 sur les rationnels et 0 ailleurs. Montrer que $g$ est limite d'une suite de fonctions dans $\mathcal{F}$.
6. Montrer que $g$ n'est pas limite d'une suite dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

## 2.2 Topologie de la convergence uniforme

**Définition** 2.4: **[topologie de la convergence uniforme]** : Soient $X$ un espace topologique et $Y$ un espace métrique. On désigne par $\mathcal{B}(X,Y)$ l'ensemble des applications bornées $X$ dans $Y$ i.e. $f \in \mathcal{B}(X,Y)$ si $f(X)$ a un diamètre borné.
On munit $\mathcal{B}(X,Y)$ de la distance uniforme i.e. pour $f, g \in \mathcal{B}(X,Y)$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

Par définition, la topologie associée à la distance $d_\infty$, dit **topologie de la convergence uniforme**. On note une telle topologie $\mathcal{T}_{cu}$ ou $\mathcal{T}_{d_\infty}$, c'est aussi défineie comme

$$\mathcal{T}_{cu} = \{O \subset \mathcal{B}(X,Y);\ \forall f \in O,\ \exists\varepsilon > 0,\ \text{tel que}\ B(f,\varepsilon) \subset O\ \}.$$

Le nom se justifie car une suite $(f_n)$ converge vers $f$ pour cette topologie si et seulement si $d_\infty(f_n, f)$ tend vers 0, soit si et seulement si $(f_n(x))$ converge uniformément vers $f(x)$ pour tout $x \in X$.
On désigne par $\mathcal{B}C(X,Y) = \mathcal{B}(X,Y) \cap C(X,Y) = \Big\{f \in \mathcal{B}(X,Y) \Big| f \text{ est continue sur } X\Big\}$.

**Remarque** 2.3: 1. Lorsque $X$ est compact, toute fonction continue, $f : X \longrightarrow Y$ est nécessairement bornée, dans ce cas $\mathcal{B}(X,Y) = C(X,Y)$.

2. La topologie de la convergence uniforme est plus fine que la topologie de la convergence simple, la réciproque n'est pas vraie, en général.

3. La famille des boules ouverts $\{B_{d_\infty}(f,\varepsilon);\ f \in \mathcal{B}(X,Y)\ et\ \varepsilon > 0\ \}$ forment une base de $\mathcal{T}_{cu}$.

**Théorème** 2.1: Si $K$ est un espace compact et $F$ un espace métrique complet, l'espace $C(K,F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est complet.

**Démonstration :** Soit $(f_n)$ une suite de Cauchy dans $(C(K,F),d_\infty)$, alors pour chaque $x \in K$ la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $F$. De plus, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que pour $n$ et $p$ supérieurs à $m$ on ait

$$d(f_n(x), f(x)) \leqslant d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

et puisque $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, on obtient , pour $n > m$ et $x \in K$ : $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$. Donc $f$ est continue , et $d_\infty(f_n, f) < \sup_{x\in K} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ si $n \geqslant m$. Ceci montre que la suite $(f_n)$ converge vers $f$ dans $(C(K,F),d_\infty)$. □

**Exemple** 2.3: La suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans l'exemple 2.2 converge simplement vers 0. Mais la convergence n'est pas uniformément puisque : $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n+1}) = 1$.

**Exercice** 2.6: montrer que la limite uniforme d'une suite d'applications continues et bornées est une application continue et bornée.

**Correction :** Soit $(f_n)$ une suite de $\mathcal{BC}(X,Y)$ converge uniformément vers $f$. i,e. $\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) > 0$ tel que $n \geqslant N$, entraîne $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$. Soit $x_0 \in X$, comme $f_N$ est continue, il existe un voisinage ouvert $V_{x_0}$ de $x_0$ dans $X$ tel que $f_N(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \frac{\varepsilon}{3})$ . Il s'agit maintenant de montrer que $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Soit $y \in f(V_{x_0})$, alors il existe $x \in V_{x_0}$ tel que $y = f(x)$. D'où $d(f(x_0), f(x)) \leqslant d(f(x_0), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f_N(x)) + d(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, ainsi $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

**Exercice** 2.7: Montrer que l'espace $\mathcal{BC}(X,Y)$ fermé dans $\left(\mathcal{B}(X,Y), \mathcal{T}_{cu}\right)$.

**Exercice** 2.8: Montrer que si $(Y,d)$ est un espace métrique *complet* alors l'espace métrique $\left(\mathcal{B}(X,Y), \mathcal{T}_{cu}\right)$ *complet*. ( même question pour de $\mathcal{BC}(X,Y)$. )

**Exercice** 2.9: Soit $X$ un espace topologique compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de $C(X,\mathbb{R})$, qui converge simplement vers $f \in C(X,\mathbb{R})$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$.

**Exercice** 2.10: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, qui converge uniformément vers $f$. et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $X$, converge vers $x$. Montrer que $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

**Exercice** 2.11: Soient $X$ un ensemble, $(Y, d)$ un espace métrique et $(f_n)$ une suite de Cauchy dans $\left(\mathcal{B}(X, Y), \mathcal{T}_{cu}\right)$. Si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ cinverge vers $f(x) \in Y$ , Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

**Exercice** 2.12: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction $f$ continue sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme si on suppose

*(a)* que la suite de fonctions est croissante,

*(b)* que les fonctions sont croissantes.

## 2.3 Topologie de la convergence compacte

Soient $X$ un espace topologique, et $(Y, \|.\|)$ un espace normé, $\Omega$ est un ouvert non vide de $X$.

**Définition** 2.5: **[convergence uniformément compacte] :** On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ dans $Y$ *converge uniformément compacte* vers $f$ sur $\Omega$, si pour tout compact $K \subset \Omega$, $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur $K$, i,e, $\lim_{n\to\infty} \sup_K \|f_n(x) - f(x)\| = 0$.

**Définition** 2.6: **[topologie de la convergence compact] :** La topologie de la convergence compact sur $Y^X$, noté par $\mathcal{T}_{cc}$, est un topologie définie par la famille de semi-normes $(p_{_K})_{K\in\mathcal{K}(X)}$, où $p_{_K}(f) = \sup_{x\in K} \|f(x)\|$.

On définit une base pour cette topologie. Soient $K \subset X$ compact, $f \in Y^X$ et $\varepsilon > 0$. Poser

$$B_K(f, \varepsilon) = \{g \in Y^X;\ \sup_{x\in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon\},$$

la "boule généralisée autour de $f$ de rayon $\varepsilon$ par rapport à $K$". Posons

$$\mathcal{B}_{cc} = \{B_K(f, \varepsilon);\ \ K \subset X \text{ compact},\ f \in Y^X,\ \varepsilon > 0\,\}.$$

**Proposition** 2.3: $\mathcal{B}_{cc}$ est une base de topologie $\mathcal{T}_{cc}$.

**Preuve :** voir (2.1).

**Remarque** 2.4: Soient $(X, \|.\|)$ est un espace normé, et un ouvert $\Omega \subsetneq X$. En posant :

$$K_n = \{x \in X,\ \ d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{n},\ \|x\| \leqslant n\},$$

$$U_{n,p} = \left\{g \in C(\Omega, Y);\ \sup_{K_n} \|f - g\| < \frac{1}{p}\right\},\quad n,\ p \in \mathbb{N}^*$$

alors la famille $(U_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}^*}$ est une *base dénombrable de voisinages* de $f$ pour la topologie de la convergence compact sur $C(\Omega, Y)$. Et *la topologie de la convergence compacte* est engendrée par la famille de semi-normes $(p_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$, de plus, c'est une topologie métrisable, définie par la distance

$$d(f,g) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} \min\Big(1, \sup_{K_n} \|f-g\|\Big).$$

**Exercice** 2.13: On a comparé topologies sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que la topologie de la convergence compacte est strictement moins fine que la topologie uniforme. Pour faire ça, construire une suite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui converge par rapport à $\mathcal{T}_{cc}$, mais pas par rapport à $\mathcal{T}_{cu}$.
**Indication :** $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\quad f_n(x) = \frac{x}{n}$

**Exercice** 2.14: Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $K$ compact de $\Omega$, Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction $f$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_K f_n = \int_K f$$

**Indication :** Utilisé

$$\Big| \int_K f_n - \int_K f \Big| \leqslant long(K) \sup_K \big|f_n - f\big|.$$

**Définition** 2.7 (**holomorphe**): Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction de $U$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $f$ est holomorphe en un point $a$ de $U$ si la limite de $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe quand $z$ tend vers $a$ dans $U - \{a\}$. Cette limite est alors appelée la dérivée de $f$ en $a$.
On dit que $f$ est holomorphe sur $U$ si elle est holomorphe en tout point de $U$.
On appelle fonction entière une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Il est clair qu'une fonction holomorphe est continue.

Dans cette section, $\Omega$ est un ouvert (non vide) de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\Omega$ . On munit $\mathcal{H}(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, héritée de l'espace $C(\Omega)$.

**Théorème** 2.2: Une fonction $f$ sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{C}$ est holomorphe en $a$ si et seulement si elle est différentiable en $a$ et si $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Alors $df = f'(a)dz$.

**Démonstration :** Si $f$ est holomorphe en $a$, avec dérivée $f'(a)$, on a au voisinage de $a$

$$f(z) - f(a) = f'(a).(z-a) + o(z-a)$$

ce qui montre que $f$ est différentiable, que $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = if'(a)$. Donc $df = f'(a)dz$.

Inversement, si différentiable en $a$ avec $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, c'est à dire $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$, on a pour $w = u + iv$

$$df(a).w = \frac{\partial f}{\partial x}(a).u + i\frac{\partial f}{\partial y}(a).v = \frac{\partial f}{\partial x}(a).(u+iv) = \frac{\partial f}{\partial x}(a).w$$

donc

$$\frac{f(a+w) - f(a)}{w} - \frac{\partial f}{\partial x}(a) \longrightarrow 0$$

c'est à dire que $f$ est holomorphe en $a$, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. □

**Théorème** 2.3: Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)$ une suite de fonctions holomorphes sur $U$. Si la suite $(f_n)$ converge vers une fonction $f$ uniformément sur tout compact de $U$, $f$ est holomorphe sur $U$.

**Démonstration :** Si $a$ est un point de $U$, il existe un $r > 0$ tel que $B_f(a,r) \subset U$ (ou $B_f(a,r)$ disque fermé ). Alors si la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $B_f(a,r)$, $f$ est holomorphe sur $B(a,r)$ , donc holomorphe en $a$. □

**Exercice** 2.15: Montrere que l'ensemble $\mathcal{H}(\Omega)$ est fermé dans $C(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence compacte.

**Indication :**Appliqué théorème 2.3.

**Exercice** 2.16: Montrere que La dérivation est continue de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans lui-même.

**Exercice** 2.17: Montrere que La somme et le produit sont continue de $\mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$.

# 3. TOPOLOGIES SUR LES HYPERESPACES

Les convergences de suites d'ensembles et les topologies sur les fermés d'un espace topologique se sont révélées au cours des dernières années comme étant la clé de la compréhension de nombreux problèmes de convergence, approximation, perturbation en analyse non-lineaire, optimisation, statistique, ... , le congres du CIRM du 22 au 26 Juin 1992, est consacré à ces questions. Nous présentons dans ce paragraphes la base de **convergence pour une suite d'ensembles .**
On note

$$CL(X) = \{K \subset X;\ K \text{ fermé et } K \neq \emptyset\};$$

$$\mathcal{F}(X) = CL(X) \cup \{\emptyset\} = \{A \subset X;\ K \text{ fermé }\}.$$

L'étude des topologies sur les fermés d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ (hypertopologies induisant les convergences topologiques d'ensembles est un thème central dans toutes les questions évoquées précédemment. Ce sont les hypertopologies du type "hit et miss" qui sont apparues les premières.

## *Topologie de vietoris, de Fell*

**Définition** 3.1: Etant donné $E \subset X$, on introduit respectivement les familles des hit de $E$ et miss de $X - E$ suivante :

$$E^- = \{A \in \mathcal{F}(X); A \cap E \neq \phi\},$$

$$E^+ = \{A \in \mathcal{F}(X); A \subset E\} = \{A \in \mathcal{F}(X); A \cap (X - E) = \phi\}.$$

On vérifie immédiatement que $E^+ \subset E^-$.

**Exemple** 3.1: Soit $A, B$ deux éléments dans $\mathcal{F}(X)$, on peut montrer :

✓ $(A \cap B)^+ = A^+ \cap B^+$ ; $(A \cap B)^- \subset A^- \cap B^-$,

✓ $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$ ; $A^+ \cup B^+ \subset (A \cup B)^+$.

**Définition** 3.2: **[topologie de Vietoris] :**

1. La sous-base de topologie de *dessous-Vietoris* sur $\mathcal{F}(X)$, est la famille $\mathcal{T}(V^-)$ des parties de la forme $U^-$ où $U$ sont des ouverts de $(X, \mathcal{T})$, i.e, $\mathcal{T}(V^-) = \Big\{U^-;\ U \in \mathcal{T}\Big\}$.

2. La sous-base de topologie de *dessu-Vietoris* sur $\mathcal{F}(X)$, est la famille $\mathcal{T}(V^+)$ des parties de la forme $U^+$ où $U$ sont des ouverts de $(X, \mathcal{T})$, i.e, $\mathcal{T}(V^+) = \Big\{U^+;\ U \in \mathcal{T}\Big\}$.
3. La topologie de *Vietoris* sur $\mathcal{F}(X)$, est une famille des parties de la forme $U^-$ ou de la forme $W^+$ où $U$ et $W$ sont des ouverts de $(X, \mathcal{T})$, i.e, $\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(V^-) \cup \mathcal{T}(V^+)$

**Exercice** 3.1: Soit $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique. Montrer que l'injection canonique : $j : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(V))$ définie par $j(x) = \{x\}$ est continue.

**Indication :** $j^{-1}(U^-) = j^{-1}(U^+) = U$.

**Exercice** 3.2: Montrer que la suite $\{\mathbb{N}^* + \frac{1}{n}\}$ n'est pas converge vers $\mathbb{N}^*$ pour la topologie de Vietoris.
**Correction :** Pour $n > 0$, on a $\mathbb{N}^* + \frac{1}{n} \notin U^+$ où $U = \cup_{k=1}^{\infty} ]k - \frac{1}{k}, k + \frac{1}{k}[$, avec $\mathbb{N}^* \in U^+$. Noté $U^+$ ouvert pour topologie de Vietoris .

**Exercice** 3.3: Dans le plant $\mathbb{R}^2$, on considère $A = \{(x, y);\ x = 0\}$ et $A_n = \{(x, y);\ x = \frac{1}{n}\}$.

**Définition** 3.3: **[topologie de Fell] :**

1. La sous-base de topologie de *dessu-Fell* sur $\mathcal{F}(X)$, est la famille $\mathcal{T}(F^+)$ des parties des forme $U^+$ où $U$ sont des complémentaire compact , i.e, $\mathcal{T}(F^+) = \Big\{U^+;\ X - U \text{ compact}\Big\}$.
2. La topologie de *Fell* sur $\mathcal{F}(X)$, est une famille des parties des forme $U^-$ ou des forme $W^+$ où $U$ sont des ouverts et $W$ sont des complémentaires compacts , i.e, $\mathcal{T}(F) = \mathcal{T}(F^+) \cup \mathcal{T}(V^-)$

**Exercice** 3.4: Montrer que sous la topologie de Fell, on a
$[0, n] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ pour $n \to \infty$,
et $\mathbb{Z} + \frac{1}{n} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ pour $n \to \infty$

**Exercice** 3.5: Soit $(X, \mathcal{T})$ espace topologique définie par $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R} \backslash A;\ A \text{ fini}\}$, trouver $\mathcal{T}(V)$ et $\mathcal{T}(F)$.

## *Topologie de convergences*

$(X, \|.\|)$ désigne un espace normé de boule unité fermée $\mathbb{B}$. Etant donnés $C, D \subset X$, l'excès de l'ensemble $C$ sur $D$ est défini par :

$$e(C, D) = \sup_{x \in C} d(x, D)$$

avec la convention $e = 0$ si $C = \phi$. La distance de Hausdorff entre $C$ et $D$ est définie par :

$$Haus(C, D) = \max\{e(C, D), e(D, C)\}.$$

La topologie associée on appelle *topologie de convergences* ou *de Hausdorff*, noté par $\mathcal{T}(H)$.

On a la formule suivante :

$$Haus(C, D) = \sup_{x \in X} |d(x, C)) - d(x, D)|.$$

Cette métrique qui joue un rôle fondamental en analyse est souvent trop forte lorsque l'on manie des ensembles non bornés tels que épigraphes, cônes, graphes...A cet effet, une version "localisée" a été introduite par *H.* Attouch & R. Wets (1987) :
Pour tout $\rho \geqslant 0$, Ia $\rho$-**Hausdorff** distance entre $C$ et $D$ est donnée par :

$$Haus_\rho(C, D) = \max\{e(C_\rho, D), e(D_\rho, C)\}.$$

où $C_\rho$, (resp. $D_\rho$) est défini par $C_\rho = C \cap \rho\mathbb{B}$ (resp. $D_\rho = D \cap \rho\mathbb{B}$).
line suite $\{C_n \subset X; n \in \mathbb{N}\}$ de parties de $X$ converge au sens des $\rho$-Hausdorff distances vers un ensemble $C$, si pour tout $\rho > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} Haus_\rho(C_n, C) = 0.$$

Cette convergence est associée à une topologie métrisable ; lorsque l'on travaille avec les fermés non vides d'un espace normé $X$, on peut prendre comme métrique $D$.

$$D(A, B) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{d_n(A, B)}{1 + d_n(A, B)}$$

où

$$d_n(A, B) = \sup_{\|x\| \leqslant n} |d(x, A)) - d(x, B)|.$$

Cette topologie, associde à la convergence uniforme sur les bornés des fonctions distances est donc intermédiaire entre la topologie de Wijsman (associée à la convergence simple des fonctions distances) et la topologie de Hausdorff (associée à la convergence uniforme des fonctions distances). En dimension finie, la topologie de Wijsman coincide avec Ia topologie des $\rho$-Hausdorff distances et ces topologies induisent la convergence au sens de Painlevé- Kuratowski.

**Exemple** 3.2: On menu $\mathbb{R}^+$ par trivial distance ($d(x, y) = 1$ si $x \neq y$). Pour $n \geqslant 0$, on a $Haus([0, n], \mathbb{R}^+) = 1$, donc suite $\{[0, n]\}$ n'est pas converges dans $\mathbb{R}^+$ pour la topologie Hausdorff.

**Exercice** 3.6: Soient $(X, d)$ espace métrique et $B \in CL(X)$ fixé. Montrer les fonctions suivante sont continue :

$$e(B, .) : (\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(H)) \longrightarrow [0, \infty],$$

$$e(., B) : (\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(H)) \longrightarrow [0, \infty],$$
$$d(B, .) : (\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(H)) \longrightarrow [0, \infty[,$$

**Indication :** Montrer les fonctions sont Lipschitz. Exemple pour $e(., B)$, soit $A_1, A_2 \in \mathcal{F}(X)$, on a

$$e(A_0, B) \leqslant e(A_0, A_1) + e(A_1, B),$$
$$e(A_1, B) \leqslant e(A_1, A_0) + e(A_0, B).$$

On a

$$|e(A_1, B) - e(A_0, B) \leqslant \max\{e(A_0, A_1), e(A_1, A_0)\} = Hauss(A_1, A_0)$$

**Exercice** 3.7: Soit $(X, d)$ espace métrique. Montrer les assertions suivantes :

1. $(\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(H))$ est complet si et seulement si $(X, d)$ is complet.
2. $(\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(H))$ est compact si et seulement si $(X, d)$ is compact.

**Exercice** 3.8: Soit $(X, T)$ espace topologique.

1. Montrer que si $X$ métrisable et compact, alors les topologies des Hausdorff, Vietoris, et Fell coïncidents sur $\mathcal{F}(X)$.
2. Montrer que l'espace topologie $(\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(F))$ compact.

**Exercice** 3.9: Dans le cas d'espace usuel sur $\mathbb{R}$, montrer :

✓ $\mathcal{T}(H) \nsubseteq \mathcal{T}(V)$ et $\mathcal{T}(V) \nsubseteq \mathcal{T}(H)$;

✓ $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(V)$ et $\mathcal{T}(V) \nsubseteq \mathcal{T}(F)$;

✓ $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(H)$ et $\mathcal{T}(H) \nsubseteq \mathcal{T}(F)$.

**Exercice** 3.10: Soit $X$ est un espace topologique séparé (espace Hausdorff). Montrer l'équivalent entre :

✓ L'espace $(\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(H)$ séparé

✓ L'espace $(\mathcal{F}(X), \mathcal{T}(H)$ régulier ;

✓ L'espace $X$ localement compact.

## *Les convergences des suites d'ensembles*

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Etant donnée une suite de parties $A_1, A_2, A_3, ...$ de lespace topologique $X$, les limites inférieures et supérieures (topologiques) de la suite $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ sont définies par les formules

$$LiA_n = \{x \in X;\ \exists (a_n) \to x,\ \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n \in A_n\}$$

$$LsA_n = \{x \in X;\ \exists n_1 < n_2 < ... \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N}, ,\ n \in \mathbb{N},\ a_{n_k} \in A_{n_k} \ \text{ avec } (a_{n_k}) \to x\}.$$

En d'autres termes, $LiA_n$ est l'ensemble formé par toutes les limites possibles de suites $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $a_n \in A_n$. Et que $LsA_n$ est formé par toutes les valeurs d'adhérence de telles suites. Etant donnde une suite $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ , on peut toujours définir ces ensembles $LiA_n$ et $LsA_n$, qui peuvent être éventuellement vides, et l'on a linclusion

$$LiA_n \subset LsA_n.$$

Lorsque l'égalité a lieu, on dit que la suite $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge, et l'on note

$$\lim A_n = LiA_n = LsA_n.$$

La référence A la topologie $\mathcal{T}$ est implicite dans ces formules; lorsque l'on veut la mettre en évidence on écrit $A = \mathcal{T} - \lim A_n$.
ces limites restent inchangées Iorsque l'on remplace $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ par les fermetures $\{\overline{A}_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

**Remarque** 3.1: Lorsque la topologie $T$ est métrisable, notant, $d$ une distance induisant cette topologie, on peut reformuler les limites topologiques de suites d'ensembles :

$$LiA_n = \{x \in X;\ \lim d(x, A_n) = 0\}$$
$$LsA_n = \{x \in X;\ \liminf d(x, A_n) = 0\}.$$

**Exemple** 3.3: Considdrons une suite qui prend alternativement deux valeurs, $A_n = A_0$ pour $n$ pair et $A_n = A_1$ pour n impair, où $A_0$ et $A_1$ désignent deux fermés distincts. Alors cette suite ne converge pas, on a $LiA_n = A_0 \cap A_1$, et $LsA_n = A_0 \cup A_1$.

**Exemple** 3.4: Les ensembles $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ sont des épigraphes des suites des fonctions : $A_n = epif_n = \{(x, \alpha);\ x \in X\ \alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha \geqslant f_n(x)\}$, avec :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ -nx & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ nx - 2 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{2}{n} \end{cases}$$

La suite des ensembles $A_n$ converge, sa limite est encore un épigraphe à savoir , $\lim A_n = A = epif$, où $f$ est la foniction qui vaut zéro partout, sauf à l'origine où elle vaut $-1$.

Cet exemple élémentaire d'épi-convergence illustre bien la difference avec la convergence simple, puisque sur cet exemple la suite $(f_n)$ converge simplement vers la foniction identiquemnent nulle.

**Exemple** 3.5: Considérons à présent une suite d'opérateurs monotones $\mathcal{A}_n$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ prenons pour ensembles $A_n$ dans $\mathbb{R}^2$ leurs graphes : $A_n = graph\mathcal{A}_n = \{(x, \mathcal{A}_n(x));\ x \in \mathbb{R}\}$, (dans la pratique. on identifie l'opérateur et son graphe qui sont alors ddsignés par le même symbole).

$$\mathcal{A}_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant \frac{1}{n} \\ nx & \text{si} \quad -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

La suite des ensembles $A_n$ converge et sa limite est lensemble $A = graph\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ la multivoque :

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ [-1, +1] & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

**Exercice** 3.11: Soit $(X, d)$ espace métrique. Montrer :

1. La suite de boules $B(x_n, r_n)$ converge vers la boule $B(x, r)$ si et seulement si, $(x_n)$ converge vers $x$ et $(r_n)$ converge vers $r$.
2. Si $r_n$ tend vers l'infini. alors la suite de boules $B(x_n, r_n)$ convergent vers l'espace $X$.

***Convergence au sens de Wijsman et Mosco convergence.***

**Définition** 3.4: **[Wijsman converge ]** Lorsque l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *métrisable*, la suite $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge au sens de *Wijsman* vers $A$, on note $A = \mathcal{W} - \lim A_n$ si pour tout $x \in X$

$$d(x, A) = \lim d(x, A_n)$$

**Exercice** 3.12: Montrer : $A = \mathcal{W} - \lim A_n \Longrightarrow A = \mathcal{T} - \lim A_n$

**Définition** 3.5: **[Mosco converge ]** Lorsque l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *Hilbertien*, on dit la suite des fermés $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge au sens de *Mosco* vers $A$, on note $A = \mathcal{M} - \lim A_n$ si on a les deux propriétés suiivantes :

— pour tout $x$ dans $A$ il existe une suite $(x_n)$ convergeant fortement vers $x$ telle que $x_n$, appartienne à $A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— pour toute sous-suite $n(1) < n(2) < n(3) < ...$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $y_{n(k)} \in A_{n(k)}$, avec $y_k$ convergeant *faiblement* vers $y$, on a $y \in A$.

**Définition** 3.6:

1. Soit $(X, d)$ espace métrique, la *Wijsman topologie* sur $CL(X)$, et noté $\mathcal{T}(W)$ est la topologie la moins fine (topologie initiale) rendant continue les applications $\{A \mapsto d(x, A);\ x \in X\}$.
   On a la base de $\mathcal{T}(W)$, les ensembles de la forme :
   $$\{A \in CL(X);\ d(x, A) < \alpha\}$$
   $$\{A \in CL(X);\ d(x, A) > \alpha\}.$$
2. Si $X$ est un espace Hilbertien, la *Mosco topologie* , et noté $\mathcal{T}(M)$ sur les fermés faibles de $X$ a pour sous-base les parties de la forme $V^-$ où $V$ est ouvert de $X$ muni de la topologie de la norme et les parties de la forme $W^+$ où $W$ est de complémentaire faiblernent compact.

3. Soit $(X, d)$ espace métrique, la *Slice topologie de Beer* sur les convexes fermés d'un espace normé peut être définie comme topologie initiale associée aux fonctions de saut

$$A \mapsto d(A, B) = \inf\{\|x - y\| \,;\;\; x \in A,\; y \in B\}$$

où $B$ parcourt l'ensemble des convexes fermés bornés de $X$.

**Exercice** 3.13: Soit $X$ espace *Hilbertien* muni d'une norme strictement convexe et satisfait "la convergence faible et la convergence des normes entraînent la convergence forte". Et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de fermés.
Montrer que assertions suivantes sont équivalentes :

*(i)* $A = \mathcal{M} - \lim A_n$

*(ii)* $A = \mathcal{W} - \lim A_n$

*(iii)* $A = \mathcal{T} - \lim A_n$

*(iv)* $\forall x \in X, proj_A(x) = \lim_{n\to\infty} proj_{A_n}(x)$.

où $proj_A(x)$ désigne la projection de $x$ sur $A$.

# 4. ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE

## 4.1 *Généralités sur les espace vectoriel topologique*

Un espace vectoriel topologique est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel un $E$ muni d'une topologie $\tau$ telle que :

1. L'origine $\{0\}$ soit fermée dans $E$
2. Les application suivant

$$\begin{array}{ll} E, \times E \longrightarrow E & K \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longrightarrow x + y & (\lambda, y) \longrightarrow \lambda y \end{array}$$

soient continues.

**Exemple** 4.1: Tout espace normé un espace vectoriel topologique

**Proposition** 4.1: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique.

1. Pour tout $a \in E$, la translation $x \longrightarrow a + x$ est un homéomorphisme de $E$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'homothétie $x \longrightarrow \lambda x$ est un homéomorphisme de $E$.
3. L'application $(x, y) \longrightarrow x - y$ est continue de $E \times E$ dans $E$.
4. L'espace $(E, \tau)$ est séparé.

**Démonstration :** On déduit immédiatement, de la définition, les propriétés 1, 2 et 3. Vérifions seulement la dernière propriété. Soient $x_0, y_0 \in E$ tels que $x_0 \neq y_0$. Alors $E \setminus \{0\}$ est un ouvert de $E$ contenant $x_0 - y_0$. Puisque l'application $(x, y) \longrightarrow x - y$ est continue de $E \times E$ dans $E$, il existe un voisinage $V$ de $x_0$ et un voisinage $W$ de $y_0$ tels que $V - W \subset E \setminus \{0\}$, d'où on a $V \cap W = \emptyset$. Par conséquent, $(E, \tau)$ est séparé. □

**Corollaire** 4.1: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique, $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soient $U$ un ouvert de $E$ et $A$ un sous-ensemble de $E$. Alors $a + U$ et $A + U = \bigcup\limits_{x \in A} x + U$ sont des ouverts de $E$, et $\lambda U$ est un ouvert de $E$ si $\lambda \neq 0$.
2. Soit $F$ un fermé de $E$. Alors $a + F$ et $\lambda F$ sont des fermés de $E$.
3. Soit K un compact de $E$. Alors $a + K$ et $\lambda K$ sont des compacts de $E$.

**Définition** 4.1.1: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique. Une **base locale** de $E$ est un système fondamental de voisinages du point 0.

**Proposition** 4.2: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique.

1. Soit $a \in E$. Les voisinages de a sont de la forme $a + V$ , ou $V$ parcourt l'ensemble des voisinages de 0. En particulier, la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par l'ensemble des voisinages de 0.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Soit $V$ un sous-ensemble de $E$. Alors $V$ est un voisinage de 0 dans $E$ si et seulement si $\lambda V$ est un voisinage de 0 dans $E$.
3. Si $B$ est une base locale de $E$, alors tout élément de $B$ contient l'adhérence d'un éléement de $B$. En particulier, $E$ possède une base locale formée d'ensembles fermés.
4. E possède une base locale formée d'ensembles équilibrés.
5. Soient $V$ un voisinage de 0 et $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha_n| = +\infty$ Alors on a $E = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n V$.

**Démonstration :** Les propriétés 1 et 2 résultent de la proposition précédente.

3. Soit $U \in B$. Puisque l'application $(x, y) \longrightarrow x - y$ est continue de $E \times E$ dans $E$, il existe un voisinage ouvert $V$ de 0 tel que $V - V \subset U$, d'où on a $V \cap ((E \setminus U) + V) = \emptyset$. Comme $(E \setminus U) + V$ est ouvert dans E, alors on a $\overline{V} \cap ((E \setminus U) + V) = \emptyset$, donc $\overline{V} \cap (E \setminus U) = \emptyset$.Autrement dit, on a $\overline{V} \subset U$.

4. Soit $U$ un voisinage de 0. Puisque l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans $E$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage $V$ de 0 tels que $\alpha V \subset U$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| < \varepsilon$. Soit $W = \bigcup\limits_{|\alpha|<\varepsilon} \alpha V$,alors $W$ est un voisinage équilibré de 0 tel que $W \subset U$.

5. Soit $x \in E$. Puisque la suite $(\frac{x}{\alpha_n})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, alors il existe $n \geqslant 0$ tel que, $\frac{x}{\alpha_n} \in V$ d'où $x \in \alpha_n V$.Par conséquent, on a $E = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n V$. □

**Proposition** 4.3: Soit $A$ un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique $(E, \tau)$.

1. On a $\overline{A} = \bigcap\limits_{v\in\nu} (A + V) = \bigcap\limits_{v\in B} (A + V)$ , ou $\nu$ est l'ensemble des voisinages de 0 et $B$ est une base locale de $E$.
2. Si $A$ est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe
3. Si $A$ est convexe tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors pour tout $x_0 \in \mathring{A}$ et pour tout $x \in \overline{A}$, on a $[x_0, x[ \subset \mathring{A}$. En particulier,$\mathring{A}$ est convexe.
4. Si $A$ est convexe tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$ , alors on a $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$
5. Si A est équilibré, alors $\overline{A}$ est équilibré. Si de plus, on a $0 \in \mathring{A}$ alors $\mathring{A}$ est équilibré.

**Démonstration :**
1. Soit $x \in E$, on a $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout voisinage $V$ de 0 , on a $(x + V) \cap A \neq \emptyset$. Ceci est équivalent à $x \in A - V$. Or $V$ est un voisinage de 0 si et

seulement si -$V$ est un voisinage de 0, donc on a $\overline{A} = \bigcap\limits_{v\in\nu}(A+V)$. La deuxième égalité est évidente.

2. Soit $t \in ]0,1[$. L'application

$$\begin{array}{rl} f_t: & E,\times E \longrightarrow E \\ & (x,y) \longrightarrow \quad tx+(1-t)y \end{array}$$

étant continue, donc $f_t^{-1}(\overline{A})$ est un fermé de $E\times E$. Comme $A$ est convexe, alors on a $A\times A \subset f_t^{-1}(A) \subset f_t^{-1}(\overline{A})$, d'ou $\overline{A}\times\overline{A} \subset f_t^{-1}(\overline{A})$. Autrement dit, on a $f_t(\overline{A}\times\overline{A}) \subset \overline{A}$ Par conséquent,$\overline{A}$ est convexe

3. On suppose $A$ convexe tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ et supposons d'abord $x \in A$, alors pour tout $t \in [0,1[$, on a $(1-t)x_0 + tx \in (1-t)\overset{\circ}{A} + tA \subset A$ et $(1-t)\overset{\circ}{A} + tA$ est un ouvert de $E$, donc on a $(1-t)x_0 + tx \in \overset{\circ}{A}$. Autrement dit, on a $[x_0,x[ \subset \overset{\circ}{A}$. Supposons maintenant que $x \in \overline{A}$. Soit $y \in ]x_0,x[$, alors il existe $t \in ]0,1[$ tel que $y = (1-t)x_0 + tx$.Pour tout $z \in E$, soit $h(z) = y + \frac{t}{1-t}(y-z)$, alors $h$ est un homéomorphisme de $E$ et on a $h(x) = x_0$. On en déduit que $h^{-1}(\overset{\circ}{A})$ est un ouvert de $E$ contenant $x$, donc $h^{-1}(\overset{\circ}{A}) \cap A \neq \emptyset$.Soit $u \in h^{-1}(\overset{\circ}{A}) \cap A$ alors $h(u) \in \overset{\circ}{A}$ et on a $h(u) = y + \frac{t}{1-t}(y-u)$,d'où $y = (1-t)h(u) + tu \in ]h(u),u[$ . Il résulte de ce qui précède que l'on a $y \in \overset{\circ}{A}$.Donc on a bien $[x_0,x[ \subset \overset{\circ}{A}$. En particulier, $\overset{\circ}{A}$ est convexe

4. On suppose $A$ convexe tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. On a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$, d'où $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$. Réciproquement, soit $x \in \overline{A}$. Comme $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, il existe un point $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. D'après 3, on a $[x_0,x[ \subset \overset{\circ}{A}$ Comme on a $x = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}x_0 + (1-\frac{1}{n})x$, alors $x \in \overline{\overset{\circ}{A}}$, donc $\overline{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$. Par conséquent, on a $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$

On a toujours $A \subset \overline{A}$, d'où $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$ . Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{\overline{A}}$. Alors il existe un voisinage ouvert $V$ de $x$ dans $E$ tel que $V \subset \overline{A}$. Comme $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, il existe un point $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Pour tout $n \geqslant 2$, soit $x_n = \frac{n}{n-1}x - \frac{1}{n-1}x_0$ alors on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x$, donc il existe $p \geqslant 2$ tel que $x_p \in V \subset \overline{A}$. Comme on a $x = (1-\frac{1}{p})x_p + \frac{1}{p}x_0 \in \Big]x_0,x_p\Big[$, il résulte de 3 que l'on a $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc on a $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$

5. On suppose $A$ équilibré. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leqslant 1$. Alors on a $\overline{\lambda A} = \lambda\overline{A} \subset \overline{A}$. Donc $\overline{A}$ est équilibré. On suppose maintenant que l'on a de plus $0 \in \overset{\circ}{A}$ Alors on a $\overset{\circ}{A} = \{0\} \subset \overset{\circ}{A}$.Si $\lambda \neq 0$, alors on a $\lambda\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\lambda A} \subset \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est équilibré. $\square$

**Proposition** 4.4: Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique $(E,\tau)$.

1. L'espace vectoriel $F$ muni de la topologie induite par E est un espace vectoriel topologique.
2. L'adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $F \neq E$, alors on a $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.

**Démonstration :** 1. Ceci est trivial.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application

$$\begin{array}{rl} f: & E \times E \longrightarrow E \\ & (x, y) \longrightarrow x + \lambda y \end{array}$$

étant continue, donc $f^{-1}(\overline{F})$ est un fermé de $E \times E$. Comme $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors on a $F \times F \subset f^{-1}(\overline{F})$, d'ou on a $\overline{F} \times \overline{F} \subset f^{-1}(\overline{F})$. Autrement dit, on a $f(\overline{F} \times \overline{F}) \subset \overline{F}$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on en déduit que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

3. Si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors il existe un ouvert non vide $W$ de $E$ tel que $W \subset \overset{\circ}{F}$. Soit $x \in W$, alors $V = x - W$ est un ouvert de $E$ contenant 0 tel que $V \subset F$. D'après la proposition 1.2, on a alors $E = \bigcup_{n \geqslant 1} nV \subset F$, d'où $E = F$, ce qui est impossible. Donc on a $\overset{\circ}{F} = \emptyset$. □

**Proposition** 4.5: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique, $K$ un compact de $E$ et $F$ un fermé de $E$. Si l'on a $K \cap F = \emptyset$, alors il existe un voisinage équilibré $V$ de 0 dans $E$ tel que $(K + V) \cap (F + V) = \emptyset$.

**Démonstration :** Comme on a $K \subset E \backslash F$ et $E \backslash F$ est ouvert dans $E$, alors, pour tout $x \in K$, il existe un voisinage ouvert $W_x$ de 0 dans E tel que $x + W_x \subset E \backslash F$. Comme l'application $(a, b, c) \longrightarrow a + b + c$ est continue de $E \times E \times E$ dans $E$, alors il existe un voisinage ouvert équilibré $V_x$ de 0 dans $E$ tel que $V_x + V_x + V_x \subset W_x$. Comme $K$ est compact et on a $K \subset \bigcup_{x \in K} x + V_x$, alors il existe $x_1, \cdots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i}$ .Soit $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ , alors $V$ est un voisinage ouvert équilibré de 0 dans $E$. De plus, on a $V + V + V \subset W_{x_i}$ , pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On a $(K + V) \cap (F + V) = (K + V - V) \cap F = (K + V + V) \cap F$ et $K + V + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} + V + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + W_{x_i} \subset E \setminus F$ . Par conséquent, on a $(K + V) \cap (F + V) = \emptyset$. □

**Définition** 4.1.2: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique

1. Soit $B$ un sous-ensemble de $E$. On dit que $B$ est **borné** si pour tout voisinage $V$ de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que $B \subset sV$.
2. Une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ dans $(E, \tau)$ est dite bornée si l'ensemble $\{x_n; n \geqslant 0\}$ est borné.
3. On dit que $E$ est **localement borné** si 0 posséde un voisinage borné.
4. On dit que$E$ possède la **propriété de Heine-Borel** si tout fermé borné dans $E$.

**Lemme** 4.1: . Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique et $B$ un sous-ensemble de $E$. Les propriétés suivantes sont équivalents.

(i) $B$ est borné.

(ii) Pour tout voisinage $V$ de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que $B \subset tV$ pour tout $t \geqslant s$.

(iii) Pour tout voisinage $V$ de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geqslant s$, on ait $B \subset \lambda V$

**Démonstration :** Les implications $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ sont évidentes.

Preuve de $(i) \Rightarrow (iii)$. Soit $V$ un voisinage de 0. Soit $W$ un voisinage équilibré de 0 tel que $W \subset V$

Par hypothèse, il existe $s > 0$ tel que $B \subset sW$. Soit $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \geqslant s > 0$, alors on a $\frac{s}{|\lambda|} \leqslant 1$, d'où $\frac{s}{\lambda}W \subset W$. Donc on a $sW \subset \lambda W \subset \lambda V$ . Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geqslant s$, on a $B \subset sW \subset \lambda V$. □

**Proposition** 4.6: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique et $B$ une partie de $E$ Les propriétés suivantes sont équivalents.

(i) $B$ est bornée

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans B et pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ dans K telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} \lambda_n = 0$, on ait $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} \lambda_n x_n = 0$ .

Pour une preuve de la proposition précédente

**Proposition** 4.7: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique.

1. Si $B$ est un sous-ensemble borné de $E$, alors $\overline{B}$ est borné.
2. Si $K$ est un compact de $E$ , alors $K$ est borné.
3. Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite convergente dans $E$, alors $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

**Démonstration :** 1. Soit $V$ un voisinage de 0 dans $E$ . D'après la proposition 1.2, il existe un voisinage fermé $W$ de 0 dans $E$ tel que $W \subset V$ . Comme $B$ est borné,il existe $s > 0$ tel que $B \subset sW$. D'où on a $\overline{B} \subset \overline{sW} = s\overline{W} = sW \subset sV$ . Donc $B$ est borné.

2. Soit $V$ un voisinage ouvert équilibré de 0 dans $E$. D'après la proposition 1.2, on a $E = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} nV$ . Comme $K$ est compact, alors il existe $p \geqslant 1$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{n=0}^{p} nV$ . Comme $V$ est équilibré, alors pour tout $n \geqslant 0$, on a $nV \subset (n+1)V$ , d'où $K \subset pV$ . Donc $K$ est borné.

3. Soit $x = \lim\limits_{n\longrightarrow 0} x_n$, alors $\{x\} \cup \{x_n; n \geqslant 0\}$ est une partie compacte de $E$ , donc bornée, d'où $\{x_n; n \geqslant 0\}$ est borné. □

**Proposition** 4.8: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique. Soient $V$ un voisinage borné de 0 et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $K \setminus \{0\}$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} |\beta_n| = 0$. Alors $(\beta_n V)_{n\geqslant 0}$ est une base locale de $E$.

**Démonstration :** Notons d'abord que pour tout $n \geqslant 0$, $\beta_n V$ est un voisinage de 0. Soit $U$ un voisinage équilibré de 0. Puisque $V$ est borné, il existe un réel $s > 0$ tel que $V \subset sU$ La suite $(s\beta_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, donc il existe $n \geqslant 0$ tel que $s|\beta_n| \leqslant 1$, d'où on a $s\beta_n U \subset U$ Par conséquent, on a $V \subset sU \subset \frac{1}{\beta_n}U$, d'où $\beta_n V \subset U$. Donc $(\beta_n V)_{n\geqslant 0}$ est une base locale de $E$. □

On vient de voir que tout espace vectoriel topologique localement borné possède une base locale dénombrable. La réciproque n'est pas toujours vraie.

**Définition** 4.1.3: Une distance d sur un espace vectoriel E est dite **invariante par translation**, si pour tout $x, y, z \in E$ ,on a $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

**Remarque** 4.1: Soit $d$ une distance invariante par translation sur un espace vectoriel E. Alors pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(0, nx) \leqslant nd(0, x)$. En effet, si $n = 0$,c'est clair. Supposons donc $n \geqslant 1$, on a $d(0, nx) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} d(kx, (k + 1)x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} d(0, x) = nd(0, x)$.
Tout espace vectoriel topologique métrisable possède une base locale dénombrable; il suffit de prendre les boules ouvertes de centre 0 et de rayon $\frac{1}{n}$ . La réciproque est aussi vraie et donnée par le théorème suivant :

**Théorème** 4.1: Soit $E$ un espace vectoriel topologique possédant une base locale dénombrable. Alors il existe une distance $d$ sur $E$ invariante par translation telle que

1. . La topologie définie par d est égale à la topologie de $E$.
2. . Les boules ouvertes de centre 0 sont équilibrées.

Pour une preuve du théorème précédent.

**Lemme** 4.2: Soit $E$ un espace vectoriel topologique métrisable. Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite dans $E$ convergente vers 0, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} t_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} t_n x_n = 0$

**Démonstration :** D'après le théorème précédent, il existe une distance d invariante par translation sur $E$ induisant sa topologie. Comme on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} d(0, x_n) = 0$, alors pour tout $k \geqslant 1$ , il existe $n_k \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_k$ , on ait $d(0, x_n) < \frac{1}{k^2}$. De plus,on peut supposer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $n_k + 1 > n_k$ On. pose $t_n = 1$ si $0 \leqslant n < n_1$ et $t_n = k$ si $n_k \leqslant n < n_k + 1$. Alors on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} t_n = +\infty$. D'après la remarque 1.1, pour tout n tel que $n_k \leqslant n < n_k + 1$, on a $d(0, t_n x_n) = d(0, kx_n) \leqslant kd(0, x_n) < \frac{1}{k}$ . Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} t_n x_n = 0$. □

**Remarque** 4.2: La notion de sous-ensemble borné d'un espace vectoriel topologique $(E, \tau)$ a déjà été définie dans la définition 9.1.3. Lorsque $(E, \tau)$ est métrisable, il y a possibilité de confusion entre cette définition et la définition usuelle d'un ensemble borné dans un espace métrique, voir définition 2.2.1. Si d est une distance invariante par translation sur $E$ dont la topologie associée est $\tau$ et si $A$ est un sous-ensemble borné de $(E, \tau)$, alors $A$ est borné dans l'espace métrique $(E, d)$. En effet, il existe un $n \geqslant 1$ tel que $A \subset nB(0, 1)$, où $B(0, 1) = \{x \in E; d(0, x) < 1\}$. D'après la remarque 9.1.1, pour tout $x \in E$ , on a $d(0, nx) \leqslant nd(0, x)$, d'où $nB(0, 1) \subset B(0, n)$. Par conséquent, $A$ est borné dans l'espace métrique $(E, d)$. Par contre, les deux notions peuvent être différentes même si la distance induisant la topologie est invariante par translation. Par exemple, si $E$ est un espace normé et si d est la distance induite par la norme, alors les deux notions coïncident. Mais ceci est faux si l'on remplace $d$ par $d' = \frac{d}{1+d}$ qui est aussi une distance invariante par translation et qui induit la même topologie sur $E$. En fait, E est borné pour la distance $d'$, mais un espace vectoriel topologique $(E, \tau)$ n'est jamais borné si $E \neq \{0\}$. Lorsque l'on parle d'ensembles bornés dans un espace vectoriel topologique, il est sous-entendu que la définition utilisée est celle donnée dans ce chapitre.

**Remarque** 4.3: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique. La notion de suite de Cauchy peut être définie dans $(E, \tau)$ sans faire référence à aucune distance. Une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $E$ est dite de **Cauchy** si pour tout voisinage $V$ de 0 dans $(E, \tau)$,il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n - x_m \in V$ dés que $n \geqslant N$ et $m \geqslant N$. De même, si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille filtrante croissante d'éléments de $E$, on dit que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est de **Cauchy** si pour tout voisinage $V$ de 0 dans $(E, \tau)$, il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$ vérifiant $\lambda \geqslant \lambda_0$ et $\mu \geqslant \lambda_0$, on ait $x_\lambda - x_\mu \in V$ . Supposons maintenant qu'il existe une distance $d$ invariante par translation sur $E$ dont la topologie associée est $\tau$ . Puisque l'on a $d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$ et puisque les boules centrées à l'origine forment une base locale de $(E, \tau)$, on en déduit qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $E$ est de Cauchy dans $(E, \tau)$ si et seulement si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans l'espace métrique $(E, d)$. De même,une famille filtrante croissante d'éléments de $E$ est de Cauchy dans $(E, \tau)$ si et seulement si elle est de Cauchy dans l'espace métrique $(E, d)$. En conséquence, deux distances sur $E$, invariantes par translation et induisant la topologie $\tau$ , ont les mêmes suites de Cauchy.Elles ont aussi les mêmes suites convergentes dans $(E, \tau)$. Ces remarques montrent le résultat important suivant :
Si $d_1$ et $d_2$ sont deux distances sur $E$ invariantes par translation et induisant la topologie $\tau$, alors on a :

1. $d_1$ et $d_2$ ont les mêmes suites de Cauchy.
2. $(E, d_1)$ est complet si et seulement si $(E, d_2)$ est complet.

**Lemme** 4.3: Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans un espace vectoriel topologique $(E, \tau)$.Alors $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

**Démonstration :** Soient $W$ et $V$ des voisinages de 0 dans $(E, \tau)$ tels que $V$ soit équilibré et $V + V \subset W$. Comme $(x_n)_{n>0}$ est une suite de Cauchy, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n - x_N \in V$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $K = \{x_0, \dots, x_N\}$ est une partie bornée de $E$, voir proposition 1 .7 , alors il existe $s > 0$ tel que $K \subset sV$. Soit $t = \max(1, s)$ alors pour $n \in \{0, \dots, N\}$, on a $x_n \in sV \subset tV \subset tW$, et pour tout $n \geqslant N$, on a $x_n = (x_n - x_N) + x_N \in V + sV \subset tV + tV \subset tW$. Par conséquent, $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée. □

**Définition** 4.1.4: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique et $A$ un sous-ensemble de $E$. On dit que $A$ est **précompact** si pour tout voisinage $V$ de 0 dans $E$, il existe un sous-ensemble fini $F$ dans $E$ tel que $A \subset F + V$.

Notons que si $(E, \tau)$ est un espace vectoriel topologique métrisable et si $d$ est une distance invariante par translation sur $E$ induisant la topologie $\tau$ , alors un sous-ensemble $A$ de $E$ est précompact si et seulement si l'espace métrique $(A, d)$ est précompact, voir définition 1.4. Notons aussi qu'un ensemble précompact d'un espace vectoriel topologique est toujours borné.

**Définition** 4.1.5: On dit qu'un espace vectoriel topologique $(E, \tau)$ est un **F-espace** si la topologie $\tau$ peut être définie par une métrique invariante et complète.

**Proposition** 4.9: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $F$ muni de la topologie induite par $E$ soit un F-espace. Alors $F$ est fermé dans $E$.

**Démonstration :** Soit $y \in F$, alors il existe une famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans $F$ telle que $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = y$. Donc $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est de Cauchy. Comme $F$ est un F-espace, alors $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers un élément $x \in F$, voir théorème { Cantor }. Donc on a $y = x \in F$. Par conséquent, F est fermé dans $(E, \tau)$. □

**Proposition** 4.10: Soient $E, F$ deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $T$ est uniformément continue, i.e. pour tout voisinage $V$ de 0 dans $F$, il existe un voisinage $U$ de 0 dans $E$ tel que pour tout $x, y \in E$ vérifiant $x - y \in U$, on ait $T(x) - T(y) \in V$

(ii) $T$ est continue.

(iii) $T$ est continue en 0.

Pour une preuve de la proposition précédente.

**Définition** 4.1.6: Soient $E$ , $F$ deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On dit que $T$ est **bornée** si l'image de tout borné de $E$ est un borné de $F$.

**Proposition** 4.11: Soient $E$ , $F$ deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Considérons les propriétés suivantes :

(i) $T$ est continue.

(ii) $T$ est bornée.

(iii) *Si* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite dans $E$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $(T(x_n))$ est une suite bornée dans $F$.

(iv) Si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite dans $E$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

1. On a les implications suivantes : $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ et (i) $\Rightarrow (iv)$.
2. Si $E$ est métrisable, alors on a les équivalences $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$
   Pour une preuve de la proposition précédente.

**Proposition** 4.12: Soient $E$ un espace vectoriel topologique et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $f$ est continue.

(ii) $\ker(f)$ est fermé dans $E$

(iii) $\ker(f)$ n'est pas dense dans $E$

(iv) $f$ est bornée sur un voisinage de 0, i.e. il existe un voisinage $V$ de 0 dans $E$ et il existe une constante $M > 0$ tels $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in V$.

**Démonstration :** Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont triviales.
Preuve de $(iii) \Rightarrow (iv)$ . Supposons donc $\overline{\ker(f)} \neq E$. Il résulte alors de la proposition (espace topologique) que le complémentaire de $\ker(f)$ est d'intérieur non vide. Par conséquent, il existe $x \in E$ et un voisinage équilibré $V$ de 0 dans $E$ tels que $(x + V) \cap \ker(f) = \emptyset$. Si $f(V)$ n'est pas bornée, comme $f(V)$ est une partie équilibrée de $\mathbb{K}$, alors on a $f(V) = K$. Soit $y \in V$ tel que $f(y) = -f(x)$, alors on a $f(x + y) = 0$, d'où $x + y \in (x + V) \cap \ker(f)$, ce qui est impossible. Donc $f(V)$ est bornée
Preuve de $(iv) \Rightarrow (i)$. D'après la proposition 1.10, il suffit de montrer que $f$ est continue en 0. Soit $r > 0$. Soient V un voisinage de 0 dans $E$ et $M > 0$ tels que pour tout $x \in V$ on ait $|f(x)| \leqslant M$. Soit $t > 0$ tel que $tM < r$. Alors $tV$ est un voisinage de 0 dans $E$ et pour tout $z \in tV$, on a $|f(z)| \leqslant tM < r$. Autrement dit, on a $f(tV) \subset B(0, r)$, où $B(0, r)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r$ dans $\mathbb{K}$. Donc $f$ est continue en 0. □

**Définition** 4.1.7: Soit $E$ un espace vectoriel topologique. On appelle dual topologique de $E$ et l'on note $E^*$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $E$.

**Théorème** 4.2: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique de dimension finie $n$. Alors il existe un homéomorphisme linéaire $T$ de $\mathbb{K}^n$ sur E, où $\mathbb{K}^n$ est muni de n'importe quelle norme $\| \, . \, \|$ Pour une preuve du théorème précédent.

**Corollaire** 4.2: Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe une unique topologie sur $E$ faisant de $E$ un espace vectoriel topologique

**Corollaire** 4.3: Soient $E$,$F$ deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si $E$ est de dimension finie. Alors $T$ est continue.

**Corollaire** 4.4: Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique $(E, \tau)$. Si $F$ est de dimension finie, alors $F$ est fermé dans $E$

**Démonstration :** D'aprés le théorème précédent, $F$ muni de la topologie induite par $E$ est linéairement homéomorphe à $\mathbb{K}^n$. Donc $F$ muni de la topologie induite par $E$ est un F-espace. Il résulte alors de la proposition 1.9 que $F$ est fermé dans $(E, \tau)$. □

**Théorème** 4.3: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique .Les propriétés suivantes sont équivalents.

(i) $E$ est de dimension finie.

(ii) $E$ est localement compact.

(iii) $E$ est localement borné et possède la propriété de Heine-Borel.

La preuve dans l'exercice

## 4.2 Propriétés des voisinage de 0 dans un espace vectoriel topologique

**Définition** 4.2.1: 1) Une partie $A$ d'un espace vectoriel $E$ est équilibrée,si,quels que soient $\lambda \in \boldsymbol{K}$ avec $|\lambda| \leqslant 1$,et $x \in A$, on a $\lambda x \in A$ ; ou encore si,pour tout $\lambda \in \boldsymbol{K}$ telle que $|\lambda| \leqslant 1$,on a $\lambda A \subset A$.

2) Une partie $A$ de $E$ est dite absorbante si, pour tout $x$ de $E$ ,il existe $\alpha > 0$,tel que $|\lambda| \leqslant \alpha$ entraine $\lambda x \in A$ ; autrement dit,si,pour tout $x$ de $E$,$\langle$ les homothétiques de $x$ de rapport assez petit $\rangle$ sont dans $A$.

Par exemple un sous-espace vectoriel est équilibré ;une boule (de centre origine) d'un espace vectoriel normé est absorbante et équilibrée.Comme une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un homéomorphisme,l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble équilibré sont encore équilibrée (de $\lambda A \subset A$ pour $|\lambda| \leqslant 1$,on déduit $\lambda \dot{A} = (\lambda A)^{\circ} \subset \dot{A}$ ;et $\lambda \overline{A} = \overline{\lambda A} \subset \overline{A}$)

**Théorème** 4.4: Soient $E$ un espace vectoriel topologique $V(a)$ l'ensemble des voisinages de $a \in E$.Alors,

1° $V(a) = a + V(0)$
2° $U \in V(0)$ et $U_1 \supset U$ entrainent $U_1 \in V(0)$
3° $U_1, U_2 \cdots U_n \in V(0)$ entrainent $\bigcap_{i=1}^{n} U_n \in V(0)$
4° si $U \in V(0)$,il existe $W \in V(0)$ tel que $W + W \subset U$
5° $\forall U \in V(0)$ et $\forall \lambda \neq 0$, on a $\lambda U \in V(0)$
6° $\forall U \in V(0)$,$U$ est absorbant
7° Il existe un système fondamental de voisinage de 0 équilibrés

**Corollaire** 4.5: Si une application linéaire u d'un espace vectoriel topologique $E$ dans un autre $F$ est continue à l'origine, elle est continue partout.Ceci étend partiellement le théorème précédant relatif aux espaces vectoriels normés ; ce qui est relatif à la continuité uniforme ou au caractère lipschitzien ne peut pas être étendu actuellement, nous le verrons au théorème précédant.

**Démonstration :** Soit $a \in E$. Un voisinage de $u(a)$ dans $F$ est de la forme $u(a) + W$, $W$ voisfo.age de 0 dans $F$. En vertu de la continuité de $u$ à $l$ ;origine, il existe $U$, voisinage de 0 dans E, tel que $u(U) \subset W$. Alors, d'après la linéarité de $u$,$u(a + U) \subset u(a) + W$, et comme $a + U$ est un voisinage de $a$ dans $E$. □

**Corollaire** 4.6: Si une application multilinéaire u d'un produit d'espaces vectoriels topologiques dans un espace vectoriel topologique est continue à l'origine, elle est continue partout.
Ceci généralise le théorème précédant relatif aux espaces vectoriels normés. Naturellement il contient le précédent corollaire ; mais nous le démontrons à part, car il est plus délicat.

**Démonstration :** Nous nous bornerons, pour alléger la démonstration, au cas d'une application bilinéaire $u$ de $E \times F$ dans $G$. Soient $a \in E, b \in F$. $Soitu(a,b)+W$ un voisinage de $u(a,b)$ dans $G$;$W$ est un voisinage de 0 dans $G$.
Soit $W'$ un voisinage de 0 dans $G$, tel que $W' + W' \subset W$. Il existe $U$, voisinage de 0 dans $E$ et $V$, voisinage de 0 dans $F$, tels que $u(V,V) \subset W'$, en vertu de la continuité de u à l'origine; soit $V'$ un voisinage équilibré de 0 dans $F$ tel que $V' + V' \subset V$. □

## 4.3 Espaces vectoriels topologiques localement compacts

**Définition** 4.3.1: Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage compact.

**Théorème** 4.5: (Frédéric Riesz) - Un espace vectoriel topologique $E$ localement compact est nécessairement de dimension finie.

**Démonstration :** Soit $\wp$ un voisinage compact de $O$ dans $F$. Alors $2\wp$ a la même propriété. En outre, pour tout $a$ de $E$, $a + \wp$ est un voisinage ouvert de $a$. Lorsque $a$ varie dans $2\wp$, les $a + \wp$ forment un recouvrement ouvert de $2\wp$. D'après l'hypothi se de compacité, il existe un nombre fini de points $a_1, a_2, ...., a_n \bullet$ tels que les $a_i + \wp$ recouvrent $2\wp$. Soit $M$ le sous-espace vectoriel engendré par les $a_i$ il est de dimension finie, et $M + \wp$ recouvre $2\wp$. Alors $M + \wp = M + M + \wp \supset M + 2\wp$. En multipliant par 2, $M + \wp \supset M + 2\wp = 2M + 2\wp = 2(M + \wp) \supset 2(M + 2\wp) = 2M + 4\wp$. Et ainsi de suite : pour tout n, $M + \wp \in M + 2^n\wp \supset 2^n\wp$ . Mais la réunion des $2^n\wp$ est l'espace entier, parce que $\wp$ est absorbant; donc $M + \wp$est l'espace entier E. Nous allons en déduire que $M$ est déjà l'espace entier $E$ , qui sera donc bien de dimension finie. Si ce n'était pas vrai, il existerait un point $a \in M$. Mais $M$ est fermé. Donc il existerait un voisinage de $a$ ne rencontrant pas $M$. On pourrait le supposer de la forme $a + \mu$, $\mu$ voisinage de $O$, qu'on pourrait supposer $\subset \wp$, et équilibré ouvert. Mais $(a + \mu \cap M) = \emptyset$ équivaut à $aM - \mu = M + \mu$ . Alors k$a \in k(M + k\mu) = M + k\mu$. Or $\mu$ est absorbant, donc la réunion des $k\mu$, $k \in \mathbb{N}$ est $E$; comme ils sont ouverts et que $\wp$ est compact, il existe $k \leqslant 1$ tel que $k\mu \supset \wp$ , donc

$$M + k\mu \supset M + k\wp = kM + k\wp = k(M + \wp) = E$$

ce qui contredirait $ka \in M + k\mu$. □

**Théorème** 4.6: Soit (E, $\tau$) un espace vectoriel topologique. Les propriétés suivantes sont équivalents. :

*i*) E est de dimension finie.

*ii*) E est localement compact.

*iii*) E est localement borné et possède la propriété de Heine-Borel.

**Démonstration :** Preuve de (ii)⇒(iii). Puisque E est localement compact, alors E est localement borné. Soit B une partie bornée et fermée dans E. Soit V un voisinage

compact de 0 dans E, alors il existe $s > 0$ tel que $B \subset sV$ . Comme sV est compact et B est fermée, alors B est compacte. Donc E poss'ede la propriété de Heine- Borel.
Preuve de (iii) ⇒(i). Puisque E est localement borné, il existe un voisinage borné W de 0 dans E. donc, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $V \subset W$. Donc $\overline{V}$ est borné et fermé, d'où $\overline{V}$ est compact. Par conséquent, il existe $x_1, ..., x_p \in E$ tels que$\overline{V} \subset W\,\overline{V} \subset \cup_{i=1}^{p} x_i + \frac{1}{2}V$ . Soit F = Vect($x_1, ..., x_p$), alors F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E tel que $V \subset \overline{V} \subset F + \frac{1}{2}V.Ona\frac{1}{2}V \subset \frac{1}{2}F + \frac{1}{2^2}V = F + \frac{1}{2^2}V$ , d'où V $\subset F + F + \frac{1}{2^2}V = F + \frac{1}{2^2}V$. On vérifie, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 0$,on a alors $V \subset F + \frac{1}{2^n}V$. Donc on a $V \subset \cap_{n\geqslant 0} F + \frac{1}{2^n}V$. D'aprés la proposition ,$(\frac{1}{2^n}V)n \geqslant 0$ est une base locale de E. Il résulte alors de la proposition que l'on a $\cap_{n\geqslant 0} F + \frac{1}{2^n}V = \overline{F}$. D'aprés le corollaire , F est fermé dans E, d'où on a $V \subset F$. Il résulte de la proposition que E = F, donc E est de dimension finie. □

## *Exercices*

**Exercice** 4.1: Soit A un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique E tel que $A^\circ \neq \emptyset$ et $\overline{A} = E$. Montrer que l'on a $A = E$.

**Solution :** Sans perdre de généralité, on peut supposer $0 \in A$. Soit $x \in E$. Comme on a $2x \in E = \overline{A}$, Alors $[0, 2x[\subset A^\circ \subset A$. Or on a $x \in [0, 2x[$, d'où $x \in A$. Par conséquent, on a $A = E$.

**Exemple** 4.2: Soit A un ensemble convexe fermé d'un espace vectoriel topologique E.

1. Montrer que s'il existe $a \in A$ et un voisinage V de a dans E tel que $A \cap V$ soit compact, alors A est localement compact.
2. En déduire que l'adhérence dans E d'un ensemble convexe localement compact est localement compacte.

**Solution :** Notons d'abord que l'on peut supposer que V est aussi fermé dans E. On a $(V - a) \cap (A - a) = (V \cap A) - a$ est compact, donc on peut supposer 0 ∈ A et qu'il existe un voisinage fermé V de 0 dans E tel que $A \cap V$ soit compact. Soit $x \in A$. Alors il existe $t \in ]0, 1]$ tel que$tx \in V^\circ$ , d'où $x \in \frac{1}{t}\overline{V} \subset \frac{1}{t}V$ . Comme A est un convexe contenant 0 et on a $0 < t \leqslant 1$, alors $tA \subset A$ , d'où $V \cap tA \subset V \supset A$. Or $V \cap tA$ est fermé dans E et $V \cap A$ est compact, donc $V \cap tA$ est compact, d'où $(\frac{1}{t}V) \cap A = \frac{1}{t}(V \cap tA)$ est compact. Comme $\frac{1}{t}V$ est un voisinage de x dans E, on en déduit que A est localement compact.
2. Soit B un ensemble convexe localement compact de E. Il s'agit de montrer que $\overline{B}$ est localement compact. Soit $b \in B$. Comme B est localement compact, il existe un voisinage V de b dans E tel que $V \cap B$ soit compact. Comme B est localement compact et B est dense dans $\overline{B}$, alors B est ouvert dans $\overline{B}$. Donc il existe un ouvert U dans E tel que $B = U \cap \overline{B}$. D'où on a $V \cap B = V \cap U \cap \overline{B}$. Comme $V \cap U$ est un voisinage de b dans E, il résulte de 1 que $\overline{B}$ est localement compact.

**Exemple** 4.3: Soient E un espace vectoriel topologique admettant une base locale dénombrable et V une partie équilibrée de E telle que pour tout ensemble borné B de E, il existe$s > 0$ tel que $B \subset sV$. Montrer que V est un voisinage de 0 dans E.

**Solution :** Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une base locale dénombrable de E. On peut supposer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $U_{n+1} \subset U_n$. Si V n'est pas voisinage de 0 dans E, alors pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n}U_n \subset V$, d'où l'existence d'un $x_n \in U_n$ tel que $x_n \in \ nV$ . Comme on a $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, alors l'ensemble $\{x_n; n \geqslant 1\}$ est borné, donc il existe $s > 0$ tel que $x_n; n \geqslant 1 \subset sV$ . Soit $p \in N$ tel que $p \geqslant s$. Comme V est équilibrée, alors pour tout $n \geqslant p$, on a $sV \subset nV$ . D'où pour tout $n \geqslant p$, on a $x_n \in nV$, ce qui est impossible. Par conséquent, V est bien un voisinage de 0 dans E.

**Exercice** 4.2: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique et $A, B$ deux sous-ensembles de $E$. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :

1. .Si $A$ et $B$ sont bornés, alors $A + B$ est borné.
2. .Si $A$ et $B$ sont compacts, alors $A + B$ est un compact de $E$.
3. .Si $A$ est compact et $B$ est fermé, alors $A + B$ est un fermé de $E$.

**Solution :**

1. . Soit $V$ un voisinage de 0 dans $E$. Alors il existe un voisinage équilibré $W$ de 0 dans $E$ tel que $W + W \subset V$ . Comme $A$ et $B$ sont bornés, alors il existe $s > 0$ et $t > 0$ tels que $A \subset sW$ et $b \subset tW$. Soit $\alpha = max(s, t)$, alors on a $sW \subset \alpha W$ et $tW \subset \alpha W$, car $W$ est équilibré. D'ou on a $A + B \subset \alpha W + \alpha W \subset \alpha V$ , donc $A + B$ est borné.
2. . Puisque l'application :
$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow A + B \\ (x, y) &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$
est continue et surjective et $A \times B$ est compact, alors $A + B$ est compact.
3. .Pour montrer que $A + B$ est fermé dans $E$, on va montrer que $E \setminus (A + B)$ est ouvert dans $E$. Soit $x \in E \setminus (A + B)$. Alors $x - B$ est un fermé de E tel que $(x - B) \cap A = \emptyset$. D'après la proposition 1.5, il existe un voisinage ouvert $V$ de 0 dans $E$ tel que $(A + V) \cap (x - B + V) = \emptyset$, d'où on a $(A + B) \cap (x + V) = \emptyset$. Donc $x + V$ est un ouvert de $E$ tel que $x \in x + V \subset E \setminus (A + B)$. Par conséquent, $E \setminus (A + B)$ est ouvert dans $E$.

**Exercice** 4.3: Soient $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique .Montrer que l'on a les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) ) $E$ est de dimension finie.
(ii) $E$ est localement compact.
(iii) $E$ est localement borné et possède la propriété de Heine-Borel.

**Solution :** L'implication$(i) \Rightarrow (ii)$ résulte du théorème précédent et du théorème { F.Riesz}
Preuve de $(ii) \Rightarrow (iii)$. Puisque $E$ est localement compact, il résulte de la proposition 1.7 que E est localement borné. Soit $B$ une partie bornée et fermée dans $E$. Soit $V$ un voisinage compact de 0 dans E, alors il existe $s > 0$ tel que $B \subset sV$ . Comme $sV$ est compact et $B$ est fermée, alors $B$ est compacte. Donc E possède la propriété de Heine Borel.
Preuve de $(iii) \Rightarrow (i)$. Puisque $E$ est localement borné, il existe un voisinage borné $W$ de 0 dans $E$. D'après la proposition 1.2, il existe un voisinage $\overline{V}$ de 0 dans $E$ tel que $\overline{V} \subset W$.Donc $\overline{V}$ est borné et fermé, d'où $\overline{V}$ est compact. Par conséquent, il existe $x_1, \cdot, x_p \in E$
tels que $\overline{V} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} x_i + \frac{1}{2}V$.Soit $F = Vect(\{x_1, \cdots, x_p\})$, alors F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E tel que $V \subset \overline{V} \subset F + \frac{1}{2}V$ On a $\frac{1}{2}V \subset \frac{1}{2}F + \frac{1}{2^2}V = F + \frac{1}{2^2}V$ d'où $V \subset F + F + \frac{1}{2^2}V = F + \frac{1}{2^2}V$,On vérifie, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 0$ on a alors $V \subset F + \frac{1}{2^n}V$. Donc on a $V \subset \bigcap\limits_{n \geqslant 0} F + \frac{1}{2^n}V$ .D'après la proposition 1.8,$(\frac{1}{2^n}V)_{n\geqslant 0}$ est une base locale de E. Il résulte alors de la proposition 1.3 que l'on a $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} F + \frac{1}{2^n}V = \overline{F}$ D'après le corollaire 1.4, $F$ est fermé dans E, d'où on a $V \subset F$. Il résulte de la proposition 1.4 que $E = F$ , donc $E$ est de dimension finie.

# 5. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES ET THÉORÈME DE HAHN-BANACH

## 5.1 *Sous-normes continues sur les espaces vectoriels topologiques*

**Définition** 5.1.1: On dit qu'une fonction $p$ sur un espace vectoriel $E$ à valeurs réelles est une sous-norme, si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. La semi-positivité : $p(x) \geqslant 0, p(0) = 0$ ;
2. la transformation par les homothéties $\geqslant 0$ : $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, pour $\lambda$ réel $\geqslant 0$ ;
3. l'inégalité de convexité : $p(x + y) \geqslant p(x) + p(y)$.

La différence entre semi-normes et sous-normes tient à ce que $\lambda$ est un scalaire arbitraire dans le 1[er] cas, un scalaire réel $\geqslant 0$ dans le second. Une semi-norme est une sous-norme.

**Théorème** 5.1: Soient $E$ un espace vectoriel topologique, $p$ une sous-norme sur $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $p$ est uniformément continue
2. $p$ est continue
3. L'ensemble $\{x\ ; p(x) < 1\}$ est ouvert
4. L'ensemble $\{x\ ; p(x) < 1\}$ est un voisinage de 0.
5. L'ensemble $\{x\ ; p(x) \leqslant 1\}$ est un voisinage de 0.
6. $p$ est continue à l'origine.

**Démonstration :**
(1)entraîne (2) trivialement. (2) entraîne (3), car

$$\{x \in E\ ; p(x) < 1\}$$

est l'image réciproque de l'ouvert $[0, 1[$ de $\mathbb{R}+$ par une application continue $p$.
(3) entraîne évidemment (4) et (4) implique (5). Supposons (5) vérifiée. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $V = \{x \in E\ ; p(x) \leqslant \varepsilon\} = \varepsilon\{x\ ; p(x) \leqslant 1\}$ est un voisinage de 0 ; donc $p$ est continue à l'origine, on a donc (6).
Enfin (6) entraîne (1).
En effet, si on pose $v = \{x \in \varepsilon\ ; p(x) \leqslant \varepsilon\}$, c'est un voisinage de 0, comme image réciproque de $[0, \varepsilon]$, voisinage de 0 dans $\mathbb{R}+$, par $p$ continue à l'origine ; d'après la

définition même de la srtucture uniforme d'un espace vectoriel topologique, l'ensemble $\{(x, y) \in E \times E \ ; x - y \in v\}$ est un entourage de la structure uniforme.
Mais $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$, donc ; $x - y \in v$ entraîne $p(x - y) \leqslant \varepsilon$ donc ;
$|p(x) - p(y)| \leqslant \varepsilon, p$ est uniformément continue (elle est même lipschitzienne si $E$ a sa topologie définie par une famille de semi-normes). □

**Corollaire** 5.1: Soient $p$ et $q$ deux sous-normes sur $E$, vérifiant $q \leqslant p$ ; alors la continuité de $p$ entraîne celle de $q$.
En effet $\{x; q(x) \leqslant 1\} \supset \{x; p(x) \leqslant 1\}$ ; si le deuxième ensemble est un voisinage de 0, il en est de même du premier, d'où le résultat par (5).

**Remarque** 5.1: Il est assez inhabituel que la simple majoration par une fonction continue entraîne la continuité ; mais une sous-norme n'est pas une fonction arbitraire.

**Corollaire** 5.2: Soit $E$ un espace vectoriel topologique semi-normable (c'est-à-dire dont la topologie puisse être définie par un ensemble de semi-normes). Alors on peut en parti-culier définir la topologie de $E$ par l'ensemble de toutes les semi-normes continues sur $E$.

**Démonstration :** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes définissant la topologie $\tau$ de $E$, $\mathcal{P}'$ l'ensemble de toutes les semi-normes continues pour $\tau$, $\tau'$ la topologie définie par l'ensèmble de semi-normes $\mathcal{P}'$. Comme $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$, $\tau'$ est plus fine que $\tau$ ; mais $\tau'$ est la topologie la moins fine compatible avec la structure vectorielle et rendant continues les semi-normes de $\mathcal{P}'$ donc $\tau$ est plus fine que $\tau'$. □

**Remarque** 5.2: Si $E$ est un espace vectoriel topologique quelconque, on peut toujours considérer la topologie $\tau'$ définie par l'ensemble $\mathcal{P}'$ de toutes les semi-normes continues sur $E$. Que $E$ soit ou non semi-normable, on peut toujours dire que $\tau'$ est moins fine que la topologie $\tau$ de $E$ ; car $\tau'$ est la topologie d'espace vectoriel la moine fine pour laquelle les semi-normes de $\mathcal{P}'$ soient continues, et $\tau$ est une topologie d'espace vectoriel pour laquelle les semi-normes de $\mathcal{P}'$ sont continues. Mais $\tau'$ est égale à $\tau$ si et seulement si $E$ est semi-normable ; le corollaire dit en effet que, si $E$ est semi-normable, $\tau'$ est égale à $\tau$ ; et, si $\tau'$ est égale à $\tau$, $E$ est semi-normable, puisque $\tau'$ est défini par une famille de semi-normes. Si $E$ est un espace vectoriel topologique quelconque, il peut arriver que la seule semi-norme continue soit 0.

**Corollaire** 5.3: Soit $E$ un espace vectoriel topologique, dont la topologie est définie par une famille (filtrante) de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$. Soit $p$ une semi-norme sur $E$. Pour que $p$ soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un indice $i \in I$ et une constante $k \geqslant 0$ telle que $p \leqslant kp_i$.

**Remarque** 5.3 (Filtre): désignant un ensemble non vide, on appelle filtre sur $E$ un ensemble non vide $\mathcal{F}$ de parties de $E$ telles que :

1. Tout élément $A$ de $\mathcal{F}$ est non vide :$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \neq \emptyset$

2. Si $A$ est un élément de $\mathcal{F}$ , toute partie contenant $A$ est élément de $\mathcal{F}$ :
   $A \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
3. Si $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{F}$, il en est de même de leur intersection :
   $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

**Démonstration :** Pour que $p$ soit continue, il faut et il suffit que $\{x \in E; p(x) \leqslant 1\}$ soit un voisinage de 0, donc qu'il existe $i \in I$ et $k \geqslant 0$ tels que $p_i(x) \leqslant \frac{1}{k}$ entraîne $p(x) \leqslant 1$. Par homothétie, celà revient à dire que $p(x) \leqslant kp_i(x)$. □

**Théorème** 5.2: Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels semi-normés par les familles de semi-normes, $(p_i)_{i\in I}$ sur $E$, et $(q_j)_{j\in J}$ sur $F$.
Pour qu'une application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ soit continue, il faut et il suffit qu'elle le soit à l'origine, et elle est alors uniformément continue et mime lipschitzienne. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout indice $j$ de $J$, il existe un indice $i$ de $I$ et une constante $k \geqslant 0$ telles que l'on ait $q_j(u(x)) \leqslant kp_i(x)$, pour tout $x \in E$; ou $q_j \circ u \leqslant p_i$. Si $u$ est continue, et $A \subset E$ bornée dans $E$, $u(A)$ est bornée dans $F$.

**Corollaire** 5.4: Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels, $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$, $q$ une semi-norme sur $F$; alors $q \circ u$ est une semi-norme sur $E$. Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels topologiques semi-normables, alors, pour que $u$ soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue $q$ sur $F$, la semi-norme $q \circ u$ sur $E$ soit continue.

**Démonstration :** Il est évident que $q \circ u$ est une semi-norme. Si $u$ est continue, alors, pour toute $q$ continue, $q \circ u$ est continue d'après le théorème des fonctions composées. Réciproquement, supposons que, pour toute $q$ continue, $q \circ u$ soit continue. Définissons les topologies de $E$ et $F$ par les familles de toutes leurs semi-normes continues, ce qui est possible d'après le corollaire 5.3. Alors, pour toute semi-norme $q$ continue sur $F$, il existe une semi-norme continue $p$ sur $E$, à savoir $p = q \circ u$, telle que $q \circ u \leqslant p$; donc le théorème 5.2 affirme la continuité de $u$. □

**Corollaire** 5.5:
1. Soit $E$ un espace vectoriel, et soit $u$ une forme linéaire sur $E$. Alors $|u| : x \to |u(x)|$, est une semi-norme sur $E$. Si $E$ est un espace vectoriel topologique, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $u$ est continue;
   (b) $|u|$ est continue;
   (c) il existe une semi-norme continue $p$ telle que $|u| \leqslant p$.
2. Si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, ces propriétés sont équivalentes à la suivante :
   (d) il existe une sous-norme $p$ telle que $u \leqslant p$.
3. Si $E$ a sa topologie définie par une famille de semi-normes $p_i, i \in I$, les propriétés (a), (b), (c), sont équivalentes à la suivante :
   (e) Il existe un $i \in I$ et un nombre $k \geqslant 0$ tels que $|u| \leqslant kp_i$.

**Démonstration :** Le début de (1) est évident. L'équivalence de (a) et (b) résulte du corollaire 5.4, en prenant $F = \mathbb{K}$, et en remarquant que, sur le corps des scalaires, toutes les semi-normes sont proportionnelles à la valeur absolue, et sont continues. Si on a (a) ou (b), on a (c) avec $p = |u|$; inversement, si on a (c), le corolaire 1 affirme que $|u|$ est continue, donc on a (a) et (b). Ensuite (c) implique (d). Supposons (d) réalisée. Appelons $\tilde{p}$ la sous-norme définie par $\tilde{p}(x) = p(-x)$. Alors $P = p + \tilde{p}$ est une semi-norme, si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$; car elle prend la même valeur en $x$ et en $-x$, et alors $P(\lambda x) = |\lambda|P(x)$ pour $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda = -1$ l'entraîne pour $\lambda$ réel quelconque. D'autre part elle est continue. On a $u \leqslant p$ et $0 \leqslant \tilde{p}$ donc $u \leqslant P$. Mais on a alors $u(-x) \leqslant P(-x)$ c'est-à-dire $-u(x) \leqslant P(x)$ ou $u \geqslant -P$ donc $|u| \leqslant P$. Et alors on sait d'après (c) que l'on a (a) et (b).
Quand à (e), c'est simplement le théorème 5.2, appliqué à $F = \mathbb{K}$. □

**Corollaire** 5.6: Sur un espace vectoriel topologique $E$ séparé de dimension finie, toutes les sous-normes sont continues.

**Démonstration :** Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$, une base de $E$. Comme $E$ a la topologie canonique, on peut la définir par la norme

$$||x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n|| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Si alors $p$ est une sous-norme quelconque, on a

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|p(e_i) \leqslant c\sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

donc $p$ est majorée par une semi-norme continue, donc continue d'après le corollaire 5.1. □

**Exemple** 5.1: Pour toute forme linéaire $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$ , la fonction $\varphi \longmapsto |\mu(\varphi)|$ est une semi-norme sur $F$. Par exemple si $X$ est un ensemble et $x \in X$ , alors la forme linéaire d' évaluation en $x$

$$\varepsilon_x : \mathbb{K}^X \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

définit une semi-norme sur $\mathbb{K}^X$

$$\mathbb{K}^X \longrightarrow \mathbb{R}+ : \varphi \longmapsto |\varphi(x)|.$$

Si $X$ est un espace topologique séparé et $\mu$ une intégrale de Radon sur $X$, alors

$$L^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}+ : \varphi \longmapsto \left|\int \varphi d\mu\right|$$

est une semi-norme sur $L^1(\mu)$ , qui n'est pas une norme puisqu'il existe en général des fonctions $\mu$-intégrables telles que $\int \varphi d\mu = 0$. Il ne faut pas confondre cette semi-norme avec la norme

$$||.||_1 \doteqdot \int |.|d\mu.$$

**Exemple** 5.2: Soit $P$ un ensemble fini de formes sous-linéaires ou de semi-normes sur $F$ et $(\alpha_p)_{p\in P} \subset \mathbb{R}+$. Alors

$$\max P : \varphi \longmapsto \max_{p\in P} p(\varphi) \quad \text{et} \quad \sum_{p\in P} \alpha_p.p : \varphi \longmapsto \sum_{p\in P} \alpha_p.p(\varphi)$$

sont des formes sous-linéaires ou respectivement des semi-normes sur $F$ .

**Exemple** 5.3: Si $P$ est une famille de fonctionnelles sous-linéaires sur $F$ , alors

$$\sup P : \varphi \longmapsto \sup_{p\in P} p(\varphi)$$

est une fonctionnelle sous-linéaire. Ceci est également vrai pour les formes sous-linéaires ou les semi-normes, pour autant que $supP$ soit finie !

**Exemple** 5.4: Soit $X$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Pour tout $\varphi \in C^{(\infty)}(X)$ , toute partie compacte $K \subset X$ , tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_{K,k}(\varphi) \doteqdot \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\leqslant k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K},$$

et

$$q_{K,\alpha}(\varphi) \doteqdot \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}.$$

On vérifie immédiatement que ce sont des semi-normes sur $C^{(\infty)}(X)$.

## 5.2 Ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques

**Définition** 5.2.1: Soient $E$ un espace vectoriel, et $a, b \in E$. On appelle segment fermé, ou simplement segment d'extrémités $a, b$, qu'on note $[a, b]$, l'ensemble

$$\{ta + (1 - t)b; 0 \leqslant t \leqslant 1\};$$

le segment ouvert est l'ensemble $\{ta + (1 - t)b; 0 < t < 1\}$, noté $]a, b[$. La première dénomination est correcte, car $[a, b]$ est bien fermé ; la deuxième est abusive, car $]a, b[$ n'est pas ouvert. On définit enfin de manière évidente les segments semi-fermés $]a, b]$ et $[a, b[$.

**Définition** 5.2.2: Une partie $A$ d'un espace vectoriel $E$ est dite convexe, si, toutes les fois que deux points $a, b$, appartiennent à $A$, tout le segment $[a, b]$ est contenu dans $A$.

**Théorème** 5.3: Si $A$ est convexe, et si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des points de $A$, et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des nombres $\geqslant 0, \sum_{n=1}^{n} t_i = 1$, alors le point

$$a = t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n$$

est dans $A$ (ce point est appelé le barycentre des $a_i$, pour les masses $t_i$)

**Démonstration :** La propriété est vraie pour $n = 1$, et $n = 2$. Faisons alors une récurrence sur $n$. Supposons la propriété vraie pour $n = 1, 2, \ldots, k-1$, avec $k \geqslant 3$, et montrons pour $n = k$. Si $t_1 = t_2 = \ldots = t_{n-1} = 0, t_n = 1$, c'est évident. Sinon, le point $a' = \frac{t_1}{t'}a_1 + \frac{t_2}{t'}a_2 + \ldots + \frac{t_{n-1}}{t'}a_{n-1}$, où $t' = t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1} \neq 0$, est alors dans $A$ ; et on peut écrire $t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n = t'a' + t_na_n, t' + t_n = 1$, donc il est encore dans $A$. □

**Remarque** 5.4: 1. Une réunion de parties convexes n'est pas forcément convexe.

2. Une intersection de parties convexes est convexe.
3. Si $A$ et $B$ sont convexes, leur somme $A + B$ (ensemble des $a + b, a \in A, b \in B$) est convexe. En effet, si $a + b$ et $a' + b'$ sont deux points de $A + B$, le point $t(a + b) + (1 - t)(a' + b') = (ta + (1 - t)a') + (tb + (1 - t)b')$ est aussi dans $A + B$.
4. Si $A$ est convexe, alors, $\lambda A + \mu A$ coïncide avec $(\lambda + \mu)A$, si $\lambda$ et $\mu$ sont $> 0$. En effet, $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}A + \frac{\mu}{\lambda+\mu}A\right]$, et la définition de la convexité entraîne que $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}A + \frac{\mu}{\lambda+\mu}A = A$.
5. Si $u$ est une application linéaire d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$, et si $A \subset E$ est convexe, alors $u(A)$ est convexe. Si $B \subset F$ est convexe, alors $u^{-1}(B)$ est convexe. Enfin $A \times B \subset E \times F$ est convexe.

**Proposition** 5.1: Soit $A$ un ensemble convexe absorbant dans un espace vectoriel $X$. Alors les propriété suivantes ont lieu.

(a) $\mu_A(u + v) \leqslant \mu_A(u) + \mu_A(v)$ pour tous $u, v \in X$.
(b) $\mu_A(tu) = t\mu_A(u)$ pour $u \in X$ et $t \geqslant 0$.
(c) Si $A$ est équilibré, alors $\mu_A$ est une semi-norme.
(d) Si $B = \{u \in X : \mu_A(u) < 1\}$ et $C = \{u \in X : \mu_A(u) \leqslant 1\}$, alors $B \subset A \subset C$ et $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.

**Démonstration :** (a)Pour tout $u \in X$, on pose $H_A(u) = \{t > 0 : t^{-1}u \in A\}$. Si $t \in H_A(u)$, alors $s \in H_A(u)$ pour tout $s > t$. Il s'ensuit que $H_A(u) = [\mu_A(u), \infty[$ ou $H_A(u) = ]\mu_A(u), \infty[$.
Soit maintenant $s > \mu_A(u)$ et $t > \mu_A(v)$. Alors $s^{-1}u \in A, t^{-1}v \in A$, et la convexité de $A$ implique que

$$(t + s)^{-1}(u + v) = \frac{s}{s + t}(s^{-1}u) + \frac{s}{s + t}(t^{-1}v) \in A.$$

On voit que $\mu_A(u + v) \leqslant s + t$. Comme $s$ et $t$ étaient quelconques, on obtient le résultat cherché.
La propriété (b) est évidente, et (c) est une conséquence de (a) et (b). (d) Si $\mu_A(u) < 1$, alors $1 \in H_A(u)$ et donc $u \in A$. De plus, si $u \in A$, alors $\mu_A(u) \leqslant 1$, et on conclut que $B \subset A \subset C$. Cette inclusion implique que $H_B(u) \subset H_A(u) \subset H_C(u)$ et donc $\mu_C(u) \leqslant \mu_A(u) \leqslant \mu_B(u)$. Pour établir l'égalité cherchée, il suffit de démontrer que $\mu_B(u) \leqslant \mu_C(u)$.
Soit $\mu_C(u) < s < t$. Alors $s^{-1}u \in C$ et $\mu_A(s^{-1}u) \leqslant 1$. Il s'ensuit que $\mu_A(t^{-1}u) \leqslant \frac{s}{t} < 1$. On voit que $t^{-1}u \in B$, $\mu_B(t^{-1}u) \leqslant 1$ et $\mu_B(u) \leqslant t$. Comme $t > \mu_B(u)$ était quelconque, on obtient le résultat cherché.

Il se trouve que tout espace localement convexe posséde une famille de seminormes qui sépare [1] les points. Réciproquement, toute famille de semi-normes qui sépare les points peut être utilisée pour définir une topologie sur $X$ par rapport à laquelle les semi-normes sont continues. □

**Définition** 5.2.3: Soit $A$ une partie d'un espace vectoriel $E$. On appelle enveloppe convexe de $A$, et on note parfois $\hat{A}$ , l'intersection de toutes les parties convexes de $E$ contenant $A$. C'est donc évidemment le plus petit convexe de $E$ contenant $A$.

**Théorème** 5.4: L'enveloppe convexe de $A$ est l'ensemble de tous les barycentres de points de $A$, $a = t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n, a_i \in A, t_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

**Démonstration :** Tout barycentre de points de $A$ appartient à tout convexe contenant $A$ donc à $\hat{A}$. Considérons l'ensemble $A'$ de tous ces barycentres ; alors $A' \subset \hat{A}$. Mais $A'$ contient $A$. Et il est convexe ; car, si l'on considère deux barycentres, $a = \sum_i t_ia_i$, et $b = \sum_j s_jb_j$ alors, pour tout $r$,

$$0 \leqslant r \leqslant 1, c = ra + (1-r)b = \sum_i rt_ia_i + \sum_j (1-r)s_jb_j, j$$

avec $\sum_i rt_i + \sum_j (1-r)s_j = r + (1-r) = 1$, donc $c$ ; est aussi un barycentre de points de $A$, $c \in A'$. Donc$A'$ est un convexe contenant $A$, et alors $A' \supset \hat{A}$, d'où $A' = \hat{A}$. □

**Théorème** 5.5: L'adhérence d'une partie convexe d'un espace vectoriel topologique $E$ est convexe.

**Démonstration :** Dire que $A$ est convexe, c'est dire que, pour tout $t \in [0,1]$, l'application continue $(x,y) \to tx + (1-t)y$ de $E \times E$ dans $E$ applique $A \times A$ dans $A$ ; mais alors elle applique $\bar{A} \times \bar{A}$ dans $\bar{A}$ , donc $\bar{A}$ est aussi convexe. □

**Définition** 5.2.4: Si $E$ est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée d'une partie $A$ de $E$ l'intersection de toutes les parties convexes fermées qui contiennent $A$ ; c'est donc aussi le plus petit convexe fermé qui contienne $A$.

le théorème précédent, c'est aussi l'adhérence de l'enveloppe convexe $\hat{A}$ de $A$, c'est-à-dire $\hat{A}$ ; en effet, tout convexe fermé contenant $A$ contient $\hat{A}$ donc $\bar{\hat{A}}$ ; et $\bar{\hat{A}}$ est fermé convexe, comme adhérence d'un convexe, C'est donc bien le plus petit fermé convexe contenant $A$. Mais ce n'est pas, en général, l'enveloppe convexe de l'adhérence $A$ , c'est-à-dire $A$, car l'enveloppe convexe d'un fermé n'a aucune raison d'être fermée.

1. On dit qu'une famille de semi-normes $\mathcal{P}$ sur un espace vectoriel $X$ sépare les points si pour tout $u \in X$ il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(u) \neq 0$.

**Théorème** 5.6: Soit $A$ une partie convexe d'un espace vectoriel topologique $E$. Si $a \in \bar{A}$ et $b \in \mathring{A}$ , alors $]a, b[\subset \mathring{A}$.

**Démonstration :** Soit $c = ta + (1 - t)b$, avec $0 \leqslant t < 1$.
Nous allons montrer que $c \in \mathring{A}$. Puisque $a \in \mathring{A}$, il existe $V \in \mathcal{F}(0)$ tel que $a + V \subset A$. Soit $b' \in A$. La convexité de $A$ entraîne

$$t(a + V) + (l - t)b' \subset A.$$

Donc

$$ta + (1 - t)b + tV - (1 - t)(b - b') = c + tV - (1 - t)(b - b') \subset A.$$

Si nous pouvons trouver $b'$ tel que

$$tV - (1 - t)(b - b') \in \mathcal{F}(0) \qquad \text{alors} \qquad c \in A.$$

D'après l'invariance de $\mathcal{F}(0)$ par les homothéties, cela équivaut à

$$\frac{tV}{1 - t}(b - b') \in \mathcal{F}(0),$$

donc à $\dfrac{t}{1-t}V \in \mathcal{F}(b - b')$. Mais, comme $\dfrac{t}{1-t}V \in \mathcal{F}(0)$, son intérieur $W$ appartient à $\mathcal{F}(0)$, et, pour tout $w$ de $W$, on a $\dfrac{t}{1-t}V \in \mathcal{F}(w)$; il suffit donc de trouver $b' \in A$ tel que $b - b' \in W$. Mais celà revient à $b' \in b - W$; or $b - W$ est un voisinage de $b$, et, $b$ étant adhérent à $A$, tout voisinage de $b$ rencontre $A$, ce qui permet de trouver un tel $b'$. □

**Corollaire** 5.7: Dans un espace vectoriel topologique $E$, l'intérieur $\mathring{A}$d'un convexe $A$ est convexe.

**Démonstration :** Si $a$ et $b$ sont dans $\mathring{A}$, $b$ est à fortiori dans $\bar{A}$, donc $[a, b[$ est dans $\mathring{A}$, et comme $b$ est aussi, $[a, b]$ est dans $\mathring{A}$. □

**Définition** 5.2.5: équilibrée d'une partie de $E$ est l'intersection des parties équilibrées de $E$ contenant $A$; c'est donc aussi le plus petit ensemble équilibré contenant $A$; et c'est trivialement la réunion $A'$ des $\lambda A, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leqslant 1$, car tout ensemble équilibré contenant $A$ contient $A'$, et $A'$ est équilibré et contient $A$.

L'enveloppe équilibrée d'un convexe n'est pas nécessairement convexe, comme le montre l'exemple du disque fermé $A$ de centre $(1, 0)$ et de rayon dans 1 dans $\mathbb{R}^2$; l'envelopppe équilibrée de $A$ est la réunion de ce disque et de son symétrique par rapport à l'origine, ensemble qui n'est pas convexe. Mais l'enveloppe convexe d'un ensemble équilibré est encore équilibrée.(Un point de l'enveloppe convexe de $A$ est de la forme $c = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i, \quad a_i \in A, \quad 0 \leqslant t_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = 1;$ si $\lambda \in \mathbb{K}, \quad |\lambda| \leqslant 1, \lambda c = \sum_{i=1}^{n} t_i(\lambda a_i)$ est donc encore dans l'enveloppe cohvexe puisque, $A$ étant équilibré, les $\lambda a_i$ sont dans

$A$).

L'enveloppe convexe équilibrée de $A$ est l'intersection des parties convexes équilibrées contenant $A$, c'est donc le plus petit convexe équilibré contenant $A$. C'est l'ensemble $A'$ des points $c = t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n, a_i \in A, t_i \in \mathbb{K}, \tau = \sum_{i=1}^{n} |t_i| \leqslant 1$ ; en effet un tel élément $c$ ; s'écrit aussi $\tau \sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i|}{\tau}\left(\frac{t_i}{|t_i|}a_i\right)$ ; comme $\left|\frac{t_i}{|t_i|}\right| = 1$, le point $\frac{t_i}{|t_i|}a_i$ appartient à l'enveloppe convexe équilibrée, et alors aussi $\sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i|}{\tau}\left(\frac{t_i}{|t_i|}a_i\right)$ puisque $\sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i|}{\tau} = 1$, donc enfin $c$ puisque $\tau \leqslant 1$ ; de sorte que tous les $c$ sont dans l'enveloppe convexe équilibrée ; mais réciproquement l'ensemble $A'$ de tous ces $c$ est convexe équilibré et contient $A$.

L'enveloppe convexe équilibrée fermée de $A$ dans un espace vectoriel topologique $E$ est l'intersection de tous les convexes équilibrés fermés contenant $A$, c'est donc aussi le plus petit convexe équilibré fermé contenant $A$ ; c'est encore l'adhérence de l'enveloppe convexe équilibrée, car cette adhérence est encore convexe et trivialement équilibrée.

Enfin l'intérieur d'un convexe équilibré est encore convexe équilibré.

## 5.3 Espaces vectoriels topologiques localement convexes

**Définition** 5.3.1: Un espace vectoriel topologique (noté EVT) est un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continue l'application + et le produit par un scalaire. On parle d'espace vectoriel topologique localement convexe (noté EVTLC) lorsqu'en plus de cela, le vecteur nul possède une base de voisinage formée de parties convexes. Enfin on notera EVTLCS les EVTLC dont la topologie est séparée.

**Définition** 5.3.2: Soit $(E, \tau)$ un espace vectoriel topologique.

1. On dit que $E$ est localement convexe ou que $E$ est un espace localement convexe s'il possède une locale constituée d'esembles convexes.
2. On dit que $E$ est de Fréchet ou que $E$ est un espace de Fréchet s'il est à la fois un F-espace et localement convexe.
3. On dit que $E$ est normable si sa topologie peut être définie par une norme.

**Exemple** 5.5:
1. Tout espace normé est localement convexe et localement borné.
2. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet.

**Définition** 5.3.3: Un espace vectoriel topologique $E$ est dit localement convexe s'il a un système fondamental de voisinages de 0 convexes. Un produit d'espaces localement convexes, un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe, un quotient d'un espace vectoriel localement convexe par un sous-espace vectoriel, sont localement convexes.

Celà résulte immédiatement des définitions des topologies produit et induite pour les deux premières affirmations. Pour le cas du quotient, on se rappellera que les voisinages de 0 de $E/F$ sont les images canoniques des voisinages de 0 de $E$, et l'image d'un convexe de Epar l'application linéaire $\pi$ est un convexe de $E/F$.

**Proposition** 5.2: Tout espace $E$ muni d'une $\mathcal{P}$-topologie pour une certaine famille $\mathcal{P}$ de semi-normes est un EVTLC. La topologie est séparée si et seulement si 0 est l'unique vecteur annulant toutes les semi-normes de $\mathcal{P}$. Réciproquement, pour tout EVTLC $E$ il existe une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes telle que la $\mathcal{P}$-topologie associée soit égale à la topologie de $E$.

**Proposition** 5.3 (métrisabilité): Soit $E$ un EVTLCS. Sa topologie est donc une $\mathcal{P}$-topologie pour une certaine famille séparante $\mathcal{P}$ de semi-normes. Si $\mathcal{P}$ est dénombrable, alors cette topologie est métrisable par une distance invariante par translation. Réciproquement si la $\mathcal{P}$-topologie est métrisable par une distance invariante par translation $d$, il existe une suite croissante $(p_n)_{n\in N}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que la $\mathcal{P}$-topologie coöncide avec la $(p_n)_{n\in N}$-topologie et une suite est de Cauchy pour $d$ si et seulement si elle est de Cauchy pour toutes les semi-normes $p_n$.

**Remarque** 5.5: Dans le cas d'un EVTLC métrisable, la complétude ne dépend donc pas de la distance invariante par translation choisie, mais uniquement de la topologie. Mais, attention, on peut construire sur $\mathbb{R}$ une distance $d$ induisant la topologie usuelle mais telle que $(\mathbb{R}, d)$, ne soit pas complet, mais la proposition précédente ne s'applique pas car $d$ n'est pas invariante par translation.

**Définition** 5.3.4: Un espace de Fréchet est un EVTLCS dont la $\mathcal{P}$-topologie est métrisable et complet pour cette topologie.

**Remarque** 5.6: Cette structure d'espace sert de substitut aux espaces de Banach dans diverses situations, notamment dans le cas d'espaces pour lesquels on n'a que des informations « locales » : $C^0(\Omega), \mathcal{H}(\Omega), L^p_{loc}(\Omega)\dots$ mais également les espaces nécessitant une régularité infinie dans leurs définition : $C^\infty_K(\Omega)$.
Les théorèmes de Banach-Steinhauss, de l'application ouverte, du graphe fermé et de continuité automatique que l'on a vu précédemment sont alors tous valables en remplaçant dans tous les énoncés le mot « Banach » par « Fréchet ».

**Théorème** 5.7 (Hahn-Banach): Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}+$ une application positivement homogène et vérifiant $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$. Soit $f$ une application linéaire définie sur un sous-espace $V \subsetneq E$, à valeurs réelles, et vérifiant $f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in V$. Alors, il existe une forme linéaire $g$ sur $E$ prolongeant $f$ et vérifiant l'inégalité précédente sur $E$ tout entier.

**Corollaire** 5.8: Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p$ une semi-norme sur $E$ et $V$ un sous-espace strict de $E$. Alors toute forme linéaire $f$ définie sur $V$ et vérifiant $|f(x)| \leqslant p(x)$ pour $x \in V$ peut se prolonger en une forme linéaire sur $E$, vérifiant l'inégalité précédente sur $E$ tout entier.

Dans le cas particulier d'un espace normé, on a le résultat suivant :

**Corollaire** 5.9: Soit $E$ un espace normé et $F \subsetneq E$ un sous-espace. Alors,

(i) une forme linéaire continue $f$ sur $F$, de norme $|||f|||$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $E$, de même norme,

(ii) pour tout $x \in E$, il existe une forme linéaire continue $f$ sur $E$ vérifiant

$$f(x) = \|x\|^2 = |||f|||^2.$$

**Remarque** 5.7: Attention, tous ces prolongements n'ont aucune raison d'être uniques.

**Théorème** 5.8 (Hahn-Banach géométrique): Soit $E$ un EVTLC et $A, B \subset E$ deux convexes non vides disjoints. Alors

(i) si $A$ est ouvert, il existe une forme linéaire $f$ continue sur $E$ et un réel $t$ tels que $Re(f(a)) \leqslant t \leqslant Re(f(b))$, pour tout $a \in A$ et $b \in B$ (on dit alors que $A$ et $B$ sont séparés au sens large),

(ii) si $A$ est compact et $B$ fermé, il existe une forme linéaire $f$ continue sur $E$ et deux réel $s < t$ tels que $Re(f(a)) < t < s < Re(f(b))$, pour tout $a \in A$ et $b \in B$ (on dit alors que $A$ et $B$ sont séparés au sens strict).

**Remarque** 5.8: Si $f$ est une forme linéaire, les ensembles de la formes

$$\{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

sont appelés hyperplans. Le théorème précédent permet donc de « caser » un hyperplan entre deux convexes. Une situation fréquente est celle de la séparation d'un convexe fermé et d'un singleton (convexe compact!).

**Théorème** 5.9: Soit $E$ un EVTLC et $A \subset E$ une partie non vide. Alors $A$ est dense si et seulement si

$$\forall f \in E', \quad (f/_L = 0) \Longrightarrow (f = 0),$$

telque $E'$ le dual topologique de $E$.

**Théorème** 5.10: Si $E$ est localement convexe, l'origine a un système fondamental de voisinages convexes équilibrés ouverts, et aussi un système fondamental de voisinages convexes équilibrés fermés.

**Démonstration :** Soit $V$ un voisinage de 0. Il existe un voisinage convexe $V' \subset V$. Il existe ensuite un voisinage équilibré $V'' \subset V'$. Alors l'enveloppe convexe $\hat{V}''$ de $V''$, qui est dans $V'$ puisque $V'$ est convexe, et qui contient $V''$, est un voisinage de 0 convexe et équilibré ; l'intérieur de $\hat{V}''$ est encore un voisinage de 0, il est contenu dans $V$, et convexe équilibré ouvert. D'autre part on sait qu'il existe dans $V$ un voisinage fermé $V_1$ ; celui contient un voisinage convexe $V_2$ ; $V_2$ contient un voisinage équilibré $V_3$. L'enveloppe convexe de $V_3$ est un voisinage convexe équilibré, et contenue dans $V_2$ convexe ; son adhérence est un voisinage convexe équilibré fermé, et contenue dans $V_1$ fermé, donc dans $V$. □

On notera l'ordre précis dans lequel on a fait les opérations. Celà tient, par exemple pour la 2e propriété, à ce que l'enveloppe convexe d'un ensemble équilibré est équilibrée, alors que l'enveloppe équilibrée d'un convexe n'est plus nécessairement convexe, et que l'adhérence d'un convexe équilibré est encore convexe équilibrée, alors que l'enveloppe convexe équilibrée d'un fermé n'est plus nécessairement fermée.

**Corollaire** 5.10: Dans un espace vectoriel topologique localement convexe $E$, l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'une partie bornée est encore bornée.

**Démonstration :** Soit $B$ bornée dans $E$, et soit $\hat{B}$ son enveloppe convexe équilibrée fermée. Soit $v$ un voisinage de 0 de $E$. Il en existe un autre, $u$, tel que l'enveloppe convexe équilibrée fermée $\hat{u}$ de $u$, soit dans $v$, d'après le théorème. Comme $B$ est borné, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda u$ ; alors $\hat{B} \subset \lambda\hat{u} \subset \lambda v$, donc $\hat{B}$ est bien bornée. □

**Exemple** 5.6: Tout espace semi-normé défini un espace localement convexe. La semi-norme définit évidemment un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de $F$. Réciproquement nous dirons qu'un espace localement convexe pouvant être défini par une seule (semi-)norme est (semi-)normable .
En particulier $\mathbb{K}^n$ muni de l'une quelconque des normes $|.|_p$ définit le même espace localement convexe, puisque ces normes sont équivalentes.

**Exemple** 5.7: Si $F$ est un espace localement convexe défini par $\mathcal{P}$ et $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$ , alors l'ensemble $\mathcal{P}/_G$ des restrictions des semi-normes dans $\mathcal{P}$ à $G$ définit une structure d'espace localement convexe sur $G$ . Elle ne dépend que de celle de $F$ , puisque

$$\overline{\mathcal{P}}/_G \subset \overline{\mathcal{P}/_G} \subset \overline{\overline{\mathcal{P}}/_G}$$

donc

$$\overline{\mathcal{P}/_G} = \overline{\overline{\mathcal{P}}/_G}.$$

La topologie de $G$ est la topologie induite par celle de $F$.

**Exemple** 5.8: Soit $X$ un ensemble. On munit $\mathbb{K}^X$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant toutes les semi-normes $\varphi \longmapsto |\varphi(x)|$ pour $x \in X$. On dit que c'est la topologie de la convergence simple sur $X$ . Plus généralement si $G$ est un espace localement convexe, sur $G^X$ on considère les semi-normes

$$\varphi \longmapsto q \circ \varphi(x),$$

où $q$ est une semi-norme continue sur $G$ . Cet ensemble n'est pas saturé.

## Exercices

**Exercice** 5.1: Soit $p$ une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ie. il manque juste l'axiome $p(A) = 0 \Rightarrow A = 0$). On suppose de plus que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, p(AB) \leqslant p(A)p(B)$. Montrer que $p = 0$ ou $p$ est en fait une norme.

**Solution :** Si $A$ est une matrice de rang $r > 0$ telle que $p(A) = 0$ alors pour toute matrice $M$ de rang $< r$ on peut trouver $P$ et $Q$ telles que $M = PAQ$ d'où $P(M) = 0$. Donc $p$ est nulle sur toute matrice de rang 1 et par inégalité triangulaire sur tout matrice.

**Exercice** 5.2: Soit $E$ un espace vectoriel réel. On considère une application $N : E \to \mathbb{R}+$ telle que :

(i) $\forall \lambda, x, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ ;

(ii) $\forall x; N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1. Montrer que $N$ est une norme si et seulement $B = \{x, \text{tq}, N(x) \leqslant 1\}$ est convexe.
2. Montrer que si $N$ vérifie aussi

(iii) $\forall x, y, N(x + y)^2 \leqslant 2N(x)^2 + 2N(y)^2$ alors c'est une norme.

**Solution :** On prouve la convexité de $B$.
Soient $x, y \in B, t \in [0, 1]$ et $z = (1 - t)x + ty$. On a $N^2(z) \leqslant 2t^2 + 2(1 - t)^2$, d'où $N(z) \leqslant 1$ si $t = \frac{1}{2}$. Ceci prouve déjà que $B$ est stable par milieu, et on en déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $z \in B$ si t est de la forme $a/2^n$ avec $a \in [[0, 2^n]]$. Si $t$ n'est pas de cette forme, on écrit $t$ comme barycentre de deux nombres dyadiques $t = u\frac{a}{2^n} + (1 - u)\frac{b}{2^n}$ en faisant en sorte que $u$ soit arbitrairement proche de $\frac{1}{2}$. Si c'est possible, on obtient que $z$ est barycentre de deux éléments de $B$ avec les coefficients $u$ et $1 - u$, d'où $N^2(z) \leqslant 2u^2 + 2(1 - u)^2 \longrightarrow 1$ qd $u \to 1/2$. Reste donc à choisir $n, a, b$ : pour $n$ donné, on choisit $a = [2^n] - n$ et $b = [2^n] + n$. C'est possible car $[2^n t] \sim 2^n t$ et on est dans le cas $0 < t < 1$ donc on a bien $a, b \in [[0, 2^n]]$ si $n$ est suffisament grand. Il vient $u = \frac{b - 2^n t}{b - a}$, quantité comprise entre $\frac{n-1}{2^n}$ et $\frac{1}{2}$ et donc qui tend bien vers $\frac{1}{2}$.
Remarque : la condition (iii) est aussi nécessaire, donc une norme est une application vérifiant (i), (ii) et (iii).

**Exercice** 5.3: Soit $E$ un evn de dimension finie et $C \subset E$ convexe et dense. Montrer que $C = E$.

**Solution :** On procède par récurrence sur $n = dimE$. Pour $n = 1$, en confondant $E$ et $\mathbb{R}$, $C$ est un intervalle dense, c'est $\mathbb{R}$. Pour $n \geqslant 2$, soit $E = H \oplus \langle a \rangle$ où $H$ est un hyperplan de $E$. On montre ci-dessous que $C' = C \cap H$ est une partie de $H$ convexe et dense, donc égale à $H$, d'où $H \subset C$ et ce pour tout $H$. Ainsi $C = E$.
Densité de C' : soit $x \in H$, et $(y_k), (z_k)$ des suites d'éléments de $C$ convergeant respectivement vers $x + a$ et $x - a$. On écrit $y_k = y'_k + \lambda_k a$ et $z_k = z'_k + \mu_k a$ avec $y'_k, z'_k \in H$ et $\lambda_k, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Par équivalence des normes en dimension finie, on a $\lambda_k \longrightarrow 1$ qd $k \to \infty$ et $\mu_k \longrightarrow -1$ qd $k \to \infty$, donc le point $x_k = \frac{\lambda_k z_k - \mu_k y_k}{\lambda_k - \mu_k}$ est bien défini et appartient à $C'$

pour $k$ assez grand, et converge vers $x$.
Remarque : Si $E$ est de dimension infinie, alors il contient des hyperplans non fermés, donc des parties strictes, convexes denses.

**Exercice** 5.4: Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

**Solution :**
**Cas de la boule fermée.** Soit $B = \{u \in E/\|u\| \leqslant 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ainsi, $\forall (x, y) \in B^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1-\lambda)y \in B$ et donc $B$ est convexe.
**Cas de la boule ouverte.** Soit $B = \{u \in E/\|u\| < 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Puisque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $0 \leqslant \|x\| < 1$, on en déduit que $\lambda\|x\| < 1$. Comme $(1-\lambda)\|y\| \leqslant 1$ (et même $< 1$) et donc

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| < 1.$$

La boule unité fermée (ou ouverte) de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un convexe de l'espace vectoriel $E$.

**Exercice** 5.5:
1. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $K$ sa boule unité fermée. Montrer que
   (i) $K$ est symétrique,
   (ii) $K$ est convexe, fermé, borné,
   (iii) 0 est un point intérieur à $K$.
2. Réciproquement, montrer que si $K$ possède les trois propriétés ci-dessus, il existe une norme dont $K$ soit la boule unité fermée, en considérant

$$p(x) = \inf\{a > 0; \frac{x}{a} \in K\}.$$

**Solution :**

(a) La nécessité des conditions (i), (ii), (iii) résulte des propriétés d'une norme. En effet, si $x \in K$, $\|-x\| = \|x\| \leqslant 1$ et $-x \in K$ ce qui prouve (i). K est fermé car plus généralement toute boule fermée d'un espace métrique est fermée ; et $K$ est borné par définition (un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est borné s'il est contenu dans une boule fermée).
Enfin, $K$ est convexe car, si $x, y \in K$ et

$$\lambda \in [0, 1], \|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leqslant (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \leqslant 1$$

et $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$. 0 est un point intérieur à $K$ : par exemple $B(0, \frac{1}{2}) \subset K$ et $K$ contient un voisinage de 0 (toute boule fermée de rayon $> 0$ est un voisinage de son centre).

(b) Soit $K$ vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii). Il nous faut montrer que $p(x)$ est bien définie pour tout $x$ ; que $p$ est une norme et que $K$ est la boule unité fermée qui lui est associée.
Si $x = 0, \frac{x}{a} \in K$ pour tout $a > 0$ et $p(0) = 0$. Si $x \neq 0$, l'ensemble $\{a > 0; \frac{x}{a} \in K\}$ est minoré ; s'il est non vide il admettra une borne inférieure. Or 0 est point intérieur à $K$; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \subset K$ et pour a assez grand, $\frac{\|x\|}{a} \leqslant \varepsilon$, en particulier $\frac{x}{a} \in K$, et l'ensemble est non vide. Vérifions les trois axiomes d'une norme.

- Par définition d'une borne inférieure, $p(x) = 0 \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists 0 < a < \varepsilon$ tel que $\dfrac{x}{a} \in K$. $K$ étant borné, on peut supposer que $K \subset \bar{B}(0,R)$, de sorte que $\left\|\frac{x}{a}\right\| \leqslant R$ ou $\|x\| \leqslant \varepsilon R$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique $x = 0$.
- Soit $\lambda > 0; p(\lambda x) = \inf\{a > 0; \frac{\lambda x}{a} \in K\} = \inf\{\lambda b > 0; \frac{x}{b} \in K\}$ en posant $a = \lambda b$, et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Il suffit de montrer que $p(-x) = p(x)$ pour avoir la propriété d'homogénéité. Mais
$$p(-x) = \inf\{a > 0; -\frac{x}{a} \in K\} = \inf\{a > 0; \frac{x}{a} \in -K\} = p(x)$$
car $K$ est symétrique.
- En utilisant la définition d'une borne inférieure, on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0, p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ ce qui donnera le résultat.
Donc, fixons $\varepsilon > 0$ ; on peut trouver $a > 0$ tel que $p(x) \leqslant a < p(x)+\varepsilon$ et $\frac{x}{a} \in K$, puis $b > 0$ tel que $p(y) \leqslant b < p(y)+\varepsilon$ et $\frac{y}{b} \in K$. Si $\frac{x+y}{a+b} \in K$, alors $p(x+y) \leqslant a+b$ par propriété de la borne inf et on aura prouvé $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$. Mais $\frac{x+y}{a+b}$ s'écrit $\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$, combinaison convexe de $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, et $K$ est supposé convexe. La preuve de l'inégalité triangulaire est ainsi achevée.
Il nous reste à établir $K = \{x; p(x) \leqslant 1\}$.
Si $x \in K$ et $a = 1, \frac{x}{a} \in K$ ce qui implique $p(x) \leqslant 1$.
Réciproquement supposons $p(x) \leqslant 1$ ; on peut supposer $x \neq 0$. Si $p(x) < 1$, il existe $p(x) \leqslant a < 1$ tel que $\frac{x}{a} \in K$ ; mais $x = a\frac{x}{a} + (1-a)0$ est encore dans $K$. Si $p(x) = 1$ il existe $(a_n)$ suite de nombres positifs tels que $\frac{x}{a_n} \in K$ pour tout $n$ et tendant vers 1.
Mais $K$ étant fermé, $x = \lim \frac{x}{a_n} \in K$.

**Exercice** 5.6: Soit $E$ un E.V.T

1. Soit $A$ une partie non vide et convexe d'un espace vectoriel normé $X$.Montrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes .
2. Montrer que $A \subset E$ est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, le vecteur $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ est dans $A$.
3. Montrer que si $A$ est convexe et si $u : E \longrightarrow E$ est une application affine alors $u(A)$ est un convexe de $E$.
4. De même , montrer que si $B$ est un convexe de $E$ , si $u : E \longrightarrow E$ est une application affine $u^{-1}(B)$ est un convexe de $E$.

5. Montrer tout intersection de convexe de $E$ est un convexe .
6. Montrer tout somme fini de parties convexes de $E$ est un convexe de $E$.

**solution :**

1. On a $A \neq \phi$ et convexe ,$X$ e.v.n

- $\overline{A}$ convexe :
  $\forall x, y \in \overline{A} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A, \exists (y_n) \subset A$ tel que : $x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad y_n \longrightarrow y$
  et $\forall \lambda \in ]0,1[$:
  $$\lambda x + (1-\lambda)y = \lim_{n\to+\infty} (\lambda x_n + (1-\lambda)y_n)$$
  avec : $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A$
  i.e : $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{A}$
  donc $\overline{A}$ est convexe.
- $\mathring{A}$ convexe :
  Soit $x, y \in \mathring{A}$, $t \in ]0,1[$
  $$\Rightarrow \exists r > 0, \mathscr{B}(x,r) \subset \mathring{A}, \mathscr{B}(y,r) \subset \mathring{A}$$
  On a : $t\mathscr{B}(x,r) + (1-t)\mathscr{B}(y,r) \subset A$
  $$\begin{aligned} \forall \lambda > 0, \forall r > 0, z \in \mathscr{B}(\lambda x, \lambda r) &\Rightarrow \|z - \lambda x\| < \lambda r \\ &\Rightarrow \|\frac{z}{\lambda} - x\| < r \\ &\Rightarrow \frac{z}{\lambda} \in \mathscr{B}(x,r) \\ &\Rightarrow z \in \lambda \mathscr{B}(x,r) \\ \mathscr{B}(\lambda x, \lambda r) &\subset \lambda \mathscr{B}(x,r) \end{aligned}$$
  On a :$\mathscr{B}(tx, tr) + \mathscr{B}((1-t)y, \lambda(1-t)r) \subset A$
  $$\begin{aligned} z \in \mathscr{B}(tx + (1-t)y, tr) &\Rightarrow \|z - tx - (1-t)y\| < tr \\ &\Rightarrow \|(z - (1-t)y) - tx\| < tr \\ &\Rightarrow z - (1-t)y \in \mathscr{B}(tx, tr) \end{aligned}$$
  alors
  $$\begin{aligned} &z = z - (1-t)y + (1-t)y \\ &z \in \mathscr{B}(tx, tr) + \mathscr{B}((1-t)y, (1-t)r) \\ &\mathscr{B}(tx + (1-t)y, tr) \subset A \\ &tx + (1-t)y \in \mathring{A} \end{aligned}$$
  donc $\mathring{A}$ est convexe

2. On a $A \subset E$

$$A \quad \text{convexe} \quad \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$$

$$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$$

$\supset$) pour $n = 2$ (la définit)
$\subset$) On démonstration par récurrence :
$\cdot$ pour $n = 1$ ,($\lambda_i = 1, \forall x \in A; \lambda_n x = x \in A$)
$\cdot$ On pose la proposition juste à l'ordre $n - 1$

$$t_1 + \ldots + t_{n-1} + t_n = 1$$

Soit $t_1 + \ldots + t_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et soit $x_1, \ldots, x_n \in A$
Est-ce que $t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n$ appartient à $A$ ?
On a $t_1 + \ldots + t_{n-1} = 1$ alors $t_1 x_1 + \ldots + t_{n-1} x_{n-1} + t_n x_n$ ,$t_n \neq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = t_1 x_1 + \ldots + t_{n-1} x_{n-1} + t_n x_n = (1 - t_n)\left[\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \frac{t_2}{1 - t_n} x_2 + \ldots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right] + t_n x_n$$

alors $\dfrac{t_1}{1 - t_n} + \dfrac{t_2}{1 - t_n} + \ldots + \dfrac{t_{n-1}}{1 - t_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{1 - t_n} = \dfrac{1 - t_n}{1 - t_n} = 1$
On a : $\dfrac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dfrac{t_2}{1 - t_n} x_2 + \ldots + \dfrac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1} \in A$
On posons : $z = \dfrac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dfrac{t_2}{1 - t_n} x_2 + \ldots + \dfrac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1} \in A$
donc $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = (1 - t_n) z + t_n x_n \in A$

3. $u$ affine $\Longleftrightarrow \exists L$ Linéaire ,$u_0 \in E$ tel que : $u(x) = L(x) + u_0$
$A$ est convexe ,$u(A)$ est un convexe ?
Soit $\forall y_1, y_2 \in u(A) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in A$

$$\begin{cases} y_1 = u(x_1) \\ y_2 = u(x_2), \forall \lambda \in ]0, 1[ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 = \lambda u(x_1) + (1 - \lambda) u(x_2) &= \lambda (L(x_1) + u_0) + (1 - \lambda)(L(x_2) + u_0) \\ &= \lambda L(x_1) + (1 - \lambda) L(x_2) + u_0 \\ &= u(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \\ &\in u(A) \end{aligned}$$

donc $u(A)$ est convexe.

4. $u$ affine $\Longleftrightarrow \exists L$ linéaire $,u_0 \in E$ tel que : $u(x) = L(x) + u_0$
   $B$ est convexe $,u^{-1}(B)$ est un convexe ?
   Soit $\forall x_1, x_2 \in u^{-1}(B)$ et $\forall \lambda \in ]0, 1[$

$$\begin{cases} u(x_1) \in B \\ u(x_2) \in B \end{cases} \qquad \begin{cases} L(x_1) + u_0 \in B \\ L(x_2) + u_0 \in B \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda(L(x_1) + u_0) + (1 - \lambda)(L(x_2) + u_0) \in B &\Rightarrow \lambda L(x_1) + (1 - \lambda)L(x_2) + u_0 \in B \\ &\Rightarrow L(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + u_0 \in B \\ &\Rightarrow u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in B \\ &\Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in u^{-1}(B) \end{aligned}$$

   donc $u^{-1}(B)$ est convexe.
5. Soit $(A_i)_{i\in I}$ famille de convexe avec $\cap_{i\in I} A_i \neq \phi$
   Soit $B = \cap_{i\in I} A_i, \forall x, y \in B, \forall \lambda \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x, y \in A_i, \forall i \in I \\ &\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in B \end{aligned}$$

   alors $B$ est convexe.
6. 

$$A + B = \{x + y/x \in A, y \in B\}$$

   Soit $u, v \in A + B \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in A, \exists y_1, y_2 \in B$ tel que :

$$\begin{cases} u = x_1 + y_1 \\ v = x_2 + y_2 \end{cases}$$

   Soit $\lambda \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} &\lambda u + (1 - \lambda)v \\ &\Rightarrow \lambda(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)(x_2 + y_2) \\ &\Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in A + B \end{aligned}$$

   alors $A + B$ est convexe.

**Exercice** 5.7: Soit $A$ un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique $E$ tel que $A \neq \phi$ et $\overline{A} = E$. Montrer que l'on a $A = E$.

**solution :** Sans perdre de généralité, on peut supposer $0 \in \mathring{A}$. Soit $x \in E$. Comme on a $2x \in E = \overline{A}$, on a $[0, 2x[ \subset \mathring{A} \subset A$. Or on a $x \in [0, 2x[$, d'où $x \in A$ . Par conséquent, on a $A = E$.

**Exercice** 5.8: Soit $A$ un sous-ensemble convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique $E$ tel que $\overline{A} = E$. Montrer que pour tout hyperplan affine fermé $H$ dans $E$, $A \cap H$ est dense dans $H$.

**solution :** Soient $f$ une forme linéaire continue non nulle sur $E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$. Soient $D_1 = \{x \in E; f(x) < \alpha\}$ et $D_2 = \{x \in E; f(x) > \alpha\}$. Soient $x \in H$ et $V$ un voisinage de 0 dans $E$. Soit $W$ un voisinage ouvert équilibré de 0 dans $E$ tel que $W + W \subset V$ . Comme on a $H \subset \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$, alors $(x + W) \cap D_1 \neq \phi$ et $(x+W)\cap D_2 \neq \phi$, donc $(x+W)\cap D_1$ et $(x+W)\cap D_2$ sont des ouverts non vides de $E$. Or $A$ est dense dans $E$, donc il existe $a, b \in A$ tels que $a \in (x + W) \cap D_1$ et $b \in (x + W) \cap D_2$. Soient $y, z \in W$ tels que $a = x + y$ et $b = x + z$. On a $f(a) < \alpha$ et $f(b) > \alpha$ et $f$ est continue, donc il existe $c \in [a, b] \subset A$ tel que $f(c) = \alpha$. Donc il existe $t \in [0, 1]$ tel que $c = ta + (1-t)b \in A$ et $c \in H$. On a $c = ta + (1-t)b = x + ty + (1-t)z \in x + W + W \subset x + V$ . Par conséquent, on a $(x + V) \cap A \cap H \neq \phi$. Donc $A \cap H$ est dense dans $H$.

**Exercice** 5.9: Soient $A$ un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $x \in \mathring{A}$ .

(ii) Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $t > 0$ tel que $x + tv \in A$.

(iii) Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe $t > 0$ tel que $x + t(x - z) \in A$. Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe $s > 1$ tel que $(1 - s)z + sx \in A$ .

**solution :** Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont triviales. Montrons l'implications $(iii) \Rightarrow (i)$. Supposons donc que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe $t > 0$ tel que $x + t(x-z) \in A$. Alors $0 \in A - x$ et on a $\mathrm{Vect}(A - x) = \mathbb{R}^n$. Comme $A - x$ est convexe, il résulte de la remarque précédente que l'on a $\overset{\circ}{\overbrace{A - x}} \neq \phi$, d'oú $\mathring{A} \neq \phi$. Soit $z \in \mathring{A}$. Alors il existe $t > 0$ tel que $y = x + t(x - z) \in A$. Or on a $x = \frac{1}{1+t}y + \frac{t}{1+t}z \in [z, y[$, d'oú $z \in \mathring{A}$ car $[z, y[\subset \mathring{A}$.

# 6. ENSEMBLES ÉQUICONTINUS D'APPLICATIONS THÉORÈMES D' ASCOLI

## *6.1 Rappels sur les espaces de fonctions*

**Théorème** 6.1: **[théorème de l'application ouverte]** Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, et$u : X \longrightarrow Y$ une application linéaire continue, bijective de $X$ sur $Y$. Alors l'application réciproque $u^{-1}$ est continue.

**Théorème** 6.2 (**théorème du graphe fermé**): Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, et $u : X \longrightarrow Y$ une application linéaire. Alors $u$ est continue si et seulement si le graphe de $u$ est fermé dans $X \times Y$.

Le graphe de $u$ est $\{(x, u(x)); x \in X\} \subset X \times Y$.

**Définition** 6.1: **[Espaces des Lebesgue]** Soient $(\Omega, \mu)$ un espace mesuré, $p \geqslant 1$ on note $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions mesurables de puissance $p-$ème intégrable ,i.e,

$$L^p(\Omega) = \Big\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\Big\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ on notera $L^\infty(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions $\mu -$ *essentiellement* bornées sur $\Omega$ i.e. le quotient de :

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \text{mesurable et bornée } \ \mu - pp\Big\},$$

munit de la norme qui suit :

$$\|f\|_\infty = \min\Big\{\alpha \geqslant 0;\ \ |f| \leqslant \alpha,\ p.p \text{ sur } \Omega\Big\}.$$

C'est effectivement une norme sur $L^\infty(\Omega)$ et elle en fait un espace de Banach.

**Théorème** 6.3: **[Inégalité de Hölder ]** Soient $(\Omega, \mu)$ un espace mesuré, $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ la fonction produit $fg$ est intégrable et

$$\int_\Omega fg d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Définition** 6.2: **[produit scalaire]** Soit $X$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une produit scalaire sur $X$ est une application bilinéaire sur $X$. notée $< .,. >_X$: $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ et verifie les trois propriétés suivantes :

1. Symetrique : $\forall u, v \in X, < u, v >_X = < v, u >_X$;
2. positif : $\forall u \in X, < u, u >_X \geqslant 0$,
3. défini : $\forall u \in X, < u, u >_X = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

Si $< .,. >_X$ definit un produit scalaire sur $X$.
$(X, < .,. >_X)$ est appelé espace préhilbertien.

**Proposition** 6.1: Soit $< .,. >_X$ produit scalaire sur $X$. Alors l'application $x \in X \mapsto \|x\| = \sqrt{< x, x >_X}$ est un norme sur $X$.

**Définition** 6.3: Soit $H$ espace préhilbertien on a la définition suivant :

1. on dit que x et y orthogonaux si : $< x, y >_X = 0$.
2. on dit que $M$ et $N$ orthogonaux tel que $M \subset H, N \subset H$ si :
$$\forall x \in M, \forall y \in N; \quad < x, y >= 0.$$
3. on dit que $U \subset H$ est une nsemble orthogonal si :
$$\forall x, y \in U, \quad x \neq y, \quad < x, y >= 0.$$
Pour tout $x$ dans $U$ (orthogonal) et $\|x\| = 1$, alors $U$ est un ensemble orthonormal( ou orthonormé).

**Définition** 6.4: **[espace de Hilbert]** Un espace préhilbertienne complet sur produit scalaire est appelé espace de Hilbert.

## 6.2 Familles équicontinues

Considérons un exemple permettant de découvrir l'un des ressorts de la question qui nous occupe. La suite de fonctions : $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}, \;\; n \in \mathbb{N}^*$ est une suite de fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ qui converge simplement vers la fonction discontinue : $\varphi(x) = 1$ si $0 < x \leqslant 1$ et $\varphi(0) = 0$.
Puisqu'une limite uniforme de suite de fonctions continues reste continue, la suite $(f_n)$ ne possède aucune sous-suite qui converge uniformément. Le phénomène en jeu est assez clair :

$$\text{pour tout} \quad 0 < \varepsilon < 1, \;\; \text{il existe} \quad \eta_n = \varepsilon^n \to 0 \quad \text{tel que} \quad \sup_{0 \leqslant x \leqslant \eta_n} |f_n(x) - f_n(0)| \geqslant \varepsilon.$$

Ce qui fait donc défaut à cette suite pour admettre une sous-suite qui converge uniforméement, c'est un contrôle de la continuité de $f_n$ en 0 qui ne dépende pas de $n$. Le concept exact est celui d'*équicontinuité*, il joue un rôle crucial dans cette question et nous allons commencer par le préciser.

Dans la définition ci-dessous, on considère un espace métrique $(Y, d)$ qui en pratique sera souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la distance usuelle $d(z, z') = |z - z'|$.

**Définition** 6.5: **[Équicontinue]** Soit $X$ un espace topologique et $(Y, d)$ un espace métrique. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications de $X$ dans $Y$.

1. $\mathcal{F}$ est dite équicontinue en un point $a \in X$ si et ssi :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists U_a \in \mathcal{V}(a) : \ \ x \in U_a \Longrightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon; \ \ \forall f \in \mathcal{F}.$$
2. On dit de $\mathcal{F}$ qu'elle est équicontinue sur $X$ si et seulement si elle l'est en tout point de $X$.

**Exemple** 6.1: Par définition, une famille $\mathcal{F}$ formée d'une seule fonction continue $f$ est équicontinue. Plus généralement, toute partie finie de $C(E, F)$ est équicontinue.

**Exemple** 6.2: Si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont $C$-lipschitziennes, pour une même constante $C$, alors $\mathcal{F}$ est équicontinue. Plus généralement, il suffit que tout point $x \in E$ possède un voisinage ouvert $V_x$ tel que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ soient $C_x$-lipschitziennes sur $V_x$, pour une même constante $C_x$ dépendant uniquement de $x$.

**Exemple** 6.3: Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés, et si $F$ est une partie bornée de $L(E, F)$, alors $F$, considérée comme partie de $C(E, F)$, est équicontinue. C'est un cas particulier de l'exemple précédent.

**Exemple** 6.4: Soient $E = [0; 1]$, $F = \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = t^n$. Alors la suite $(f_n)$ n'est pas équicontinue.

**Exercice** 6.1: Montrer que la famille de fonctions de la variable réelle $\{|x|^\alpha; \ \alpha \in [0, 1]\}$ n'est pas équicontinue en 0.

**Exercice** 6.2: Soit $K$ un espace topologique compact et $\mathcal{F} \subset C(K)$ une famille équicontinue sur $K$. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $(C(K), \|.\|_\infty)$ est également équicontinue.

**Exercice** 6.3: Montrere que toute partie bornée $E$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ est équicontinue.

**Exemple** 6.5: Par exemple, si les $f \in \mathscr{F}$ sont toutes lipschitziennes, et si, pour tout $j \in J$ , il existe un même $i \in I$ et une même constante $k > 0$ tels que
$$\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant k d_i(x', x'')$$
pour toute $f \in \mathscr{F}$ alors $\mathscr{F}$ est uniformément équicontinu, et on dira même qu'il est équilipschitzien.
Ainsi, si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont des espaces vectoriels normés, l'ensemble des $u \in \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ tels que $\| u \| \leqslant M$ (boule de rayon $M$ dans $\mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$) est équilipschitzien ,
(on a $\| u(\vec{x}); u(\vec{y}) \| \leqslant M \| \vec{x} - \vec{y} \|$ ) donc uniformément équicontinu sur $\vec{E}$. Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont semi-normés, $\mathscr{F} \subset \mathscr{L}(\vec{E}; \vec{F})$ est équicontinu si et seulement s'il est équicontinu à l'origine,et alors $\mathscr{F}$ est équilipschitzien donc uniformément équicontinu ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout $j \in J$ il existe $i \in I$ et $k > 0$ tels que $q_j \circ u \leqslant k p_i$ pour toute $u \in \mathscr{F}$ .

**Remarque** 6.1: Dans l'équicontinuité n'interviennent en réalité que la topologie de $E$ et la structure uniforme de $F$ . L' équicontinuité en $a \in E$ s'exprime comme suit : quel que soit l'entourage $\mathscr{V}$ de la structure uniforme de $F$ , il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de a tel que $x \in \mathscr{U}$ , entratne $(f(a), f(x)) \in \mathscr{V}$ Comme nous avons vu (et admis) que toute structure uniforme peut être définie par une famille de semi-distances, il n'y a pas de mal à opérer avec des semi-distances, et c'est ce que nous ferons.

**Théorème** 6.4: Soit $f_n$ une suite équicontinue d'applications de $E$ dans $F$, et soit $e_n$ une suite de points de $E$, on suppose que, pour $n$ infini,les $e_n$ convergent vers $e$, et que les $f_n$ convergent simplement vers une limite $f$.
Alors les $f_n(e_n)$ convergent vers $f(e)$ dans $F$.

**Démonstration :** Soit $\delta_j$ une semi-distance de $F$. On a :

$$\delta_j(f(e), f_n(e_n)) \leqslant \delta_j(f_n(e_n), f_n(e)) + \delta_j(f_n(e), f(e))$$

Pour $n$ infini, le deuxième terme tend vers 0, puisque les $f_n$ convergent simplement vers $f$ . Ensuite $e_n$ converge vers $e$, et les $f_n$ sont équicontinues, donc le premier terme converge aussi vers 0 (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de $e$ tel que $x \in \mathscr{U}$ entraîne $\delta_j(f_n(x), f_n(e)) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n$ ; et pour $n$ assez grand, $e_n \in \mathscr{U}$ ). □

## 6.3 Premier théorème d' Ascoli

**Théorème** 6.5: Soient $E$ un espace topologique et $F$ un espace semimétrique. Soit $\mathscr{F}$ un ensemble d'applications de $E$ dans $F$, équicontinu au point $a$ de $E$. Alors l'adhérence $\overline{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ dans $F^E$ (espace de toutes les applications de $E$ dans $F$, muni de la topologie de la convergence simple) est encore équicontinue au point $a$.

**Démonstration :** Donnons-nous une des semi-distances $\delta_j$ sur $F$ , et $\varepsilon > 0$ . puisque $\mathscr{F}$ est équicontinu en $a$, il existe un voisinage $\mathscr{U}_{j,\varepsilon} = \mathscr{U}$ de $a$ dans $E$ tel que $x \in \mathscr{U}$ , $f \in \mathscr{F}$ entraîne

$$\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$$

Mais l'application $f \to (f(a), f(x))$ ( $x$ fixé dans $\mathscr{U}$ ) de $F^E$ dans $F^2$ est continue (projection dans un produit) et $\delta_j$ est continue sur $F^2$. Donc l'ensemble des $f \in F^E$ vérifiant
$\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$ est fermé dans $F^E$ ; contenant $\mathscr{F}$ ,il contient $\overline{\mathscr{F}}$.
Donc, pour tout $j \in J$ et tout $\varepsilon > 0$ , on a trouvé un voisinage $\mathscr{U}$ de $a$ dans $E$ tel que $x \in \mathscr{U}$ , $f \in \overline{\mathscr{F}}$ entraîne $\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve bien l'équicontinuité de $\overline{\mathscr{F}}$ au point $a$. □

**Corollaire** 6.1: Dans les conditions du théorème, toutes les fonctions $f$ de $\overline{\mathscr{F}}$ sont continues au point $a$.
Toute Limite simple $f$ d'une suite de fonctions $f_n$ de $\mathscr{F}$ est continue au point $a$.

**Remarque** 6.2: Ce corollaire apporte un complément important au théorème , celui-ci dit qu'une limite localement uniforme d'une suite de fonctions continues $f_n$ est encore continue, nous voyons qu'une limite simple d'une suite de fonctions continues $f_n$ peut encore être continue,si les $f_n$ sont non seulement individuellement continues, mais également continues.
En fait , les théoremes précédents sont très apparentés. En effet :

1) Si une suite de fonctions $f_n$ continues au point $a$ converge localement uniformément vers une limite $f$ , nécessairement continue aussi au point $a$ , les $f_n$ sont également continues au point $a$.

Soient en effet $j \in J$ et $\varepsilon > 0$. En vertu de la convergence uniforme locale, on peut trouver un voisinage $\mathcal{U}_1$ de $a$ dans $E$ et un entier $p \geqslant 0$ tel que $n \geqslant p$, $x \in \mathcal{U}_1$ entraîne $\delta_j(f_n(x), f(a)) \leqslant \varepsilon/3$. Mais ensuite les fonctions $f, f_0, f_1, ..., f_{p-1}$,en nombre fini, sont continues au point $a$, donc il existe un voisinage $\mathcal{U}_2$ de $a$ tel que $x \in \mathcal{U}_2$ entraîne $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, et $\delta_j(f_n(x), f_n(a)) \leqslant \varepsilon$ pour $n < p$.
Alors $x \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ entraîne

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leqslant \varepsilon pour n < p, \tag{6.1}$$

et

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leqslant \delta_j(f_n(a), f(a)) + \delta_j(f(a), f(x)) + \delta_j(f(x), f_n(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
$$\text{pour } n \geqslant p,$$

ce qui prouve bien l'équicontinuité de l'ensemble des $f_n$ au point $a$.

2) Inversement , nous verrons au corollaire (1) du théorème suivant que,
Si $E$ est localement compact, toute suite de fonction, équicontinue sur $E$ tout entier et simplement convergente, est localement uniformément convergente.
Ainsi, si les fonctions $f_n$ sont continues sur $E$ localement compact et convergent simplement vers $f$, il sera équivalent de supposer qu'elles convergent localement uniformément ou qu'elles sont également continues sur $E$, et dans chacun des cas, leur limite $f$ sera continue. Mais, s'il est vrai que les théorémes précédents sont ainsi théoriquement équivalents, ils donnent dans la pratique,deux critères très différents pour reconnaître que la limite $f$ est continue.

**Corollaire** 6.2: On a des énoncés analogues avec l'équicontinuité sur $E$ tout entier , ou l' équicontinuité uniforme si $E$ est aussi semi-métrique.

## 6.4 Deuxième théorème d' Ascoli

**Théorème** 6.6: Soient $E$ un espace topologique et $F$un espace semi-métrique, sur un ensemble équicontinu $\mathscr{F}$ d'applications de $E$ dans $F$,les structures semimétriques de la convergence simple sur un sous-ensemble dense $E_0$ de $E$ , de la convergence simple sur $E$ et de la convergence uniforme sur toute partie compacte de $E$ sont uniformément équivalentes (autrement dit, les structures uniformes correspondantes sont identiques, et en particulier les topologies correspondantes coïncident) .

**Démonstration :** La structure semi-métrique de la convergence simple sur $E_0$ est définie par les semi-distances

$$\delta_{j,A_0}(f,g) = \max_{x\in A_0}\delta_j(f(x),g(x)),\ A_0 \text{ partie finie de } E_0.$$

Celle de la convergence simple sur $E$ est définie par les semi-distances :

$$\delta_{j,A}(f,g) = \max_{x\in A}\delta_j(f(x),g(x)),\ A \text{ partie finie de } E.$$

Enfin celle de la convergence uniforme sur les parties compactes de $E$ est définie par les semi-distances :

$$\delta_{j,K}(f,g) = \max_{x\in K}\delta_j(f(x),g(x)),\ \ K \text{ partie compacte de } E.$$

Avant de poursuivre, une remarque s'impose. La structure semi-métrique de la convergence simple sur $E_0$ a été définie au Chapter précedent pour des applications de $E_0$ dans $F$. Nous la définissons ici, ce qui est tout différent, pour des applications de $E$ dans $F$, Une application $f$ de $E$ dans $F$ définit , par restriction à $E_0$ une application $f_0$ de $E_0$ dans $F$. Mais l'application «restriction» $f \to f_0$ n'est pas du tout injective, et on ne peut donc pas du tout identifier une fonction $f$ à sa restriction $f_0$ . Toutefois, sur le sous-espace $(F^E)_c$ de $F^E$ , l'opération restriction $f \to f_0$ est injective, car $E_0$ est dense, et deux fonctions continues sur $E$ qui coïncident sur $E_0$ coïncident partout.
Donc, dans ce cas, l'identification serait possible ; elle présenterait néanmoins plus de dangers que d'avantages.En tout cas, pour la même raison, la structure semi-métrique considérée sur $(F^E)_c$ est séparée ; car si : $\delta_{j,A_0}(f,g) = 0$ pour tout $j \in J$ et toute $A_0$ finie de $E_0$ , $f$ et $g$ coïncident sur $E$.La deuxième structure uniforme étant intermédiaire entre la première et la troisième, il suffit de montrer que celles-ci sont uniformément équivalentes. Par ailleurs toute semi-distance de la première est une semi-distance de la troisième
(en prenant $K = A_0$ finie $\subset E_0$),c'est donc une réciproque qu'il faut montrer. Ce n'est évidemment pas exact sur l'ensemble $(F^E)_c$ de toutes les applications continues de $E$ dans $F$,mais il s'agit ici des structures induites sur une partie équicontinue $\mathscr{F}$ de $(F^E)_c$,Soit donc $K$ un compact de $E$, $j \in J$ et $\varepsilon > 0$ .
Nous allons montrer qu'il existe une partie finie $A_0$ de $E_0$ et $\eta > 0$ telle que $\delta_{j,A_0}(f,g) \leqslant \eta$ entraîne $\delta_{j,K}(f,g) \leqslant \varepsilon$ pour $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}$ .Or ceci est très simple.
Pour tout point $a$ de $K$, il existe un voisinage $\mathscr{U}_a$ de $a$ dans $E$ tel que $x \in \mathscr{U}_a$ , $h \in \mathscr{F}$

entraîne $\delta_j(h(a), h(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, en vertu de l'équicontinuité $\mathscr{F}$ de Un nombre fini des $\mathscr{U}_a$ recouvre $K$, $\mathscr{U}_{a_\nu}$, $\nu = 1, 2, ..., n$. Chacun de ces $\mathscr{U}_{a_\nu}$ contient un point $b_\nu$ de $E_0$ , puisque $E_0$ est supposé dense.On a alors, pour $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}$ , et $x \in \mathscr{U}_{a_\nu}$ :

$$\begin{aligned}\delta_j(f(x), g(x)) \leqslant &\delta_j(f(x), f(a_\nu)) + \delta_j(f(a_\nu), f(b_\nu)) + \delta_j(f(b_\nu), g(b_\nu)) + \delta_j(f(b_\nu), g(b_\nu)) \\ &+ \delta_j(g(b_\nu), g(a_\nu)) + \delta_j(g(a_\nu), g(x))\end{aligned} \tag{6.2}$$

Si alors on prend $A_0 = b_{\nu\nu=1...n}$, $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$ , comme tout $x \in k$ est dans l'un des $\mathscr{U}_{a_\nu}$, $\delta_{j,A_0}(f, g) \leqslant \eta$ entraîne bien $\delta_{j,K}(f, g) \leqslant \varepsilon$. □

**Corollaire** 6.3: Si une suite de fonctions également continues $f_n$ sur $E$ a valeurs dans $F$ converge vers une fonction continue $f$ sur $E$ en tout point d'un sous-ensemble dense $E_0$ de $E$ les $f_n$ convergent vers $f$ en tout point de $E$, et uniformément sur tout compact de $E$.

En effet, l'ensemble $\mathscr{F}$ des $f_n$ et def est équicontinu sur $E$, et il suffit d'appliquer le théorème.
Notons que, pour appliquer le theorème dans la démonstration de ce corollaire, nous devons considérer l'ensemble des $f_n$et de $f$ Mais supposons que nous sachions seulement que, pour tout $x$ de $E_0$ dense,les $f_n(x)$ convergant vers une limite $f(x)$; $f$ est continue sur $E_0$ d'après le théorème precedent , mais n'est peut être pas prolongeable en une fonction continue sur $E$; alors la conclusion ne subsiste pas, et nous ne pouvons pas affirmer que les $f_n(x)$ convergent encore vers une limite en tout point $x$ de $E$.Il y a cependant deux cas où la conclusion subsiste.
D'abord si $E = E_0$ puisque alors, comme nous venons de le voir, $f$ est sûrement continue sur $E_0$ et le corollaire (1) s'applique. D'autre part, si $F$ est séquentiellement complet, ou, plus généralement, si, pour tout $x$ de $E$, l'ensemble $\mathscr{F}(x) = f_n(x), n \in \mathbb{N}$ est contenu dans une partie séquentiellement complète de $F$. En effet,pour $m$ et $n$ infinis,$A_0$ finie $\subset E_0$,$\delta_{j,A_0}(f_m, f_n)$ tend vers 0, donc aussi $\delta_{j,A_0}(f_m, f_n)$ pour toute partie finie $A$ de $E$, d'après l'identité des structures uniformes induites par $F^E$ et $F^{E_0}$ sur $\mathscr{F}$ donc, pour tout $x$ de $E$,les $f_n(x)$ forment une suite de Cauchy, donc convergente si l'on fait l'hypothèse précédente, et de nouveau la limite est continue sur E et on peut appliquer le corollaire (1). Nous avons donc démontré les 2 corollaires suivants :

**Corollaire** 6.4: Si les $f_n$ sont également continues et .convergent simplement vers $f$ sur $E$ $f$ est continue et la convergence est uniforme sur tout compact.

**Corollaire** 6.5: Si une suite équicontinue d'applications $f_n$ d'un espace topologique $E$ dans un espace semi-métrique $F$ converge vers une Limite en tout point d'un sous-ensemble dense $E_0$ de $E$,si, pour tout $x$ de $E$, l'ensemble $\mathscr{F}(x) = f_n(x), n \in \mathbb{N}$ est contenu dans une partie séquentiellement complète de $F$ (ce qui se produit toujours si $F$ est séquentiellement complet),alors la suite $f_n$ converge en tout point de $E$, la limite est continue sur $E$, et la convergence est uniforme sur tout compact de $E$.

**Corollaire** 6.6: Soit $f_n$ une suite équicontinue d'applications d'un espace topologique $E$ dans un espace semi-métrique $F$.Supposons que, pour tout $x$ de $E$, l'ensemble$\mathscr{F}(x) =$

$f_n(x), n \in \mathbb{N}$ soit contenu dans une partie séquentiellement complète. Alors l'ensemble $A$ des points $x$ de $E$ pour lesquels la suite des $f_n(x)$ a une limite, est fermé dans $E$.
La Limite $f$ des $f_n$ sur $A$ est une application continue de $A$ dans $F$, et les$f_n$convergent vers $f$ dans $(F^A)_c$

**Démonstration :** Appliquons le corollaire 3 au sous-espace $\bar{A}$ de $E$ et à son sous-espace dense $A$. Alors on trouve que les $f_n$ont une limite pour tout $x$ de $\bar{A}$; mais comme $A$ est l'ensemble des $x$ ayant cette propriété, on a $\bar{A} = A$ et $A$ est bien fermé. Le reste découle du corollaire 3. □

**Corollaire** 6.7: Soit $u_n$ une suite d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé $\vec{E}$ dans un Banach $\vec{F}$. de normes bornées par un même nombre $M \geqslant 0$ L'ensemble $A$ des $\vec{x}$ pour lesquels la suite des $u_n(\vec{x})$ a une limite est un sous-espace vectoriel fermé de $\vec{E}$; la limite $u$ des $u_n$ sur $A$ est une application linéaire continue de $A$ dans $F$, de norme $\leqslant M$et les $u_n$ convergent vers $u$ uniformément sur tout compact de $A$.

**Démonstration :** L'ensemble des $u_n$ équilipschitzien donc équicontinu. Donc $A$ est fermé d'après le corollaire 4, la limite $u$ est continue. de $A$ dans $F$,et $u_n$converge vers $u$ dans $(F^A)_c$ par linéarité, si les $u_n(\vec{x})$ et les $u_n(\vec{y})$ ont des limites $u(\vec{x})$ et $u(\vec{y})$ les $u_n(\vec{x} + \vec{y}) = u_n(\vec{x}) + u_n(\vec{y})$ ont la limite $u(\vec{x}) + u(\vec{y})$,et les $u_n(\lambda\vec{x}) = \lambda u_n(\vec{x})$ ont la limite $\lambda u(\vec{x})$. Donc $A$ est un sous-espace vectoriel,et $u$ est linéaire sur $A$. De $\| u_n(\vec{x}) \| \leqslant M \| \vec{x} \|$ on déduit $\| u(\vec{x}) \| \leqslant M \| \vec{x} \|$ pour $\vec{x} \in A$ donc $u$ est aussi de norme $\leqslant M$. □

## 6.5 *Troisième théorème d'Ascoli*

**Théorème** 6.7: Soient $E$ un espace topologique, $F$ un espace semimétrique, $\mathscr{F}$ un ensemble d'applications continues de $E$ dans $F$. Pour que $\mathscr{F}$ soit relativement compact dans $(F^E)_c$ (espace des applications continues de $E$ dans $F$, muni de la topologie de la convergence compacte), il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1) $\mathscr{F}$ est équicontinu;
2) Pour tout $x \in E$ l'ensemble $\mathscr{F}(x) = f(x), f \in \mathscr{F}$ est relativement compact dans $F$.

Si $E$ est localement compact, ces conditions sont aussi nécessaires.

**Corollaire** 6.8: Soit $\mathscr{F}$ un ensemble d' applications Continues d'un espace topologique $E$ dans un espace métrique $F$, ou toutes les boules fermées sont compactes (par exemple un espace vectoriel nomié de dimension finie). pour que $\mathscr{F}$ soit relativement compact dans $(F^E)_c$ il suffit que $\mathscr{F}$ soit équicontinu, et que, pour tout $xdeE, \mathscr{F}(x) = f(x), f \in \mathscr{F}$ soit borné dans $F$. il suffit même, si $E$ est connexe, que $\mathscr{F}(x_0)$ soit borné, pour un point particulier $x_0$ de E. la condition précédente est aussi nécessaire si $E$ est localement compact.

**Démonstration :** Puisque toute boule fermée de $F$ est compacte, « relativement compact» dans $F$ équivaut à « borné». La seule chose à montrer est donc que,si $\mathscr{F}(x_0)$ est borné pour un point $x_0$ de $E$, alors $\mathscr{F}(x)$ est borné, pour tout point $x$ de $E$, lorsque $E$ est connexe. Mais c'est une conséquence simple de l'équicontinuité. Appelons $B$ l'ensemble des $x$ de $E$ pour lesquels $\mathscr{F}(x)$ est borné.Soit $a \in E$,d'après l'équicontinuité, il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de $a$ tel que $\delta(f(a), f(x)) \leqslant 1$ pour $x \in \mathscr{U}$. Si alors $a \in B$ on a aussi $x \in B$ pour tout $x \in \mathscr{U}$ donc $\mathscr{U} \subset B$ ; donc $B$ est ouvert. Si maintenant $a \in \bar{B}$ il existe au moins un $x$ de $\mathscr{U}$ tel que $x \in B$ c'est-à-dire tel que $\mathscr{F}(x)$ soit borné, alors $\mathscr{F}(a)$ est aussi borné ; donc $a \in B$, B est fermé.Donc $B$ est ouvert et fermé dans $E$ connexe ; si $B$ contient un point $x_0$, c'est $E$ tout entier. □

**Exemple** 6.6: On peut prendre $E = [0, 1]$,$F = \mathbf{C}$ Si une partie $\mathscr{F}$ du Banach $G = (\mathbf{C}^{[0,1]})_{cb} = (\mathbf{C}^{[0,1]})_c$ est relativement compacte, alors, pour tout $x$ de $[0, 1]$,$\mathscr{F}(x)$ est borné,et $\mathscr{F}$ est équicontinue ; si $\mathscr{F}(0)$ est borné et $\mathscr{F}$ équicontinue,$\mathscr{F}$ est relativement compacte. Par exemple, si $k$ est un nombre $\geqslant 0$ l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions $f$ continues complexes sur $[0, 1]$, vérifiant $\mid f(0) \mid\leqslant 1$, $\mid f(x) \mid - \mid f(0) \mid\leqslant kx$ pour tout $x$, est relativement compact dans $G$ ; comme d'ailleurs il est fermé, il est compact.

## 6.6 Applications aux espaces d'applications linéaires continues dans des espaces vectoriels topologique

On peut appliquer ce qui précède aux parties $\mathscr{F}$ de l'espace $\mathscr{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de $E$, dans $F$ , où $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels topologiques. L'espace $\mathscr{L}(E; F)$ est fermé dans $(F^E)_c$ , même si l'on munit $(F^E)_c$ de la topologie $(F^E)$ de la convergence simple, et à fortiori pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $E$. En effet, pour $x, y \in E$ scalaire, les fonctions

$$f \to f(x + y) - f(x) - f(y) \text{ et } f \to \lambda f(x) - f(\lambda x)$$

sont continues de $F^E$ dans $F$ l'image réciproque de $O$ est donc fermée, l'intersection de tous les fermés obtenus, pour $x, y$ et $\lambda$ variables, n'est autre que l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ qui est donc fermé dans $(F^E)$ en prenant l'intersection avec $(F^E)_c$ on voit que l'espace $\mathscr{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de $E$ dans $F$ est bien fermé dans $(F^E)_c$ déjà pour la topologie de la convergence simple induite par $(F^E)$ il en résulte que les parties $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(E; F)$ relativement compactes dans $\mathscr{L}_c(E; F)$, ne sont autres que celles qui sont relativement compactes dans $(F^E)_c$ On peut donc répéter exactement les théorèmes d'Ascoli et leurs corollaires, en remplaçant $(F^E)_c$ par $\mathscr{L}_c(E; F)$,et $(F^E)$ par $\mathscr{L}_s(E; F)$ nous ne le ferons pas.

**Théorème** 6.8: Toute partie équicontinue $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(E; F)$ est bornée pour toute topologie $\mathscr{L}_Q(E; F)$ définie par un ensemble $Q$ de parties bornées de $E$

**Démonstration :** Il suffit de prendre pour $Q$ l'ensemble de toutes les parties bornées, puisqu'il donne la plus fine des topologies considérées. Bien que ce soit vrai dans tous les cas, nous nous limiterons au cas où la topologie de $F$ est définie par une famille de semi-normes $q_j, j \in J$ Soit $\mathscr{F}$ équicontinue dans $\mathscr{L}(E;F)$ et soit $A$ bornée dans $E$. Pour tout $j \in J$ il existe un voisinage $\mathscr{U}_j$ de 0 dans $E$ tel que toutes les $q_j \circ u, u \in \mathscr{F}$ soient bornées par 1 sur $\mathscr{U}_j$ d'après l'équicontinuité.puisque $A$ est bornée,il existe $\lambda_j > 0$ tel que $A \subset \lambda_j \mathscr{U}_j$ alors $q_j \circ u$ est bornée par $\lambda_j$ sur $A$, pour $u \in \mathscr{F}$ donc $q_j$ est bornée par $\lambda_j$ sur $\cup_{u\in\mathscr{F}} u(A)$ ,celà prouve bien que $\cup_{u\in\mathscr{F}} u(A)$ est bornée, donc que $\mathscr{U}_j$ est bornée dans $\mathscr{L}_b(E;F)$. □

**Remarque** 6.3: Si $E$ et $F$ sont normés, la réciproque est vraie pour $\mathscr{L}_b(E;F)$ car $\mathscr{F}$ est bornée dans $\mathscr{L}_b(E;F)$ si et seulement si $\|u\|$ borné pour $u \in \mathscr{F}$ mais cela signifie aussi l'équicontinuité de $\mathscr{F}$ Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels topologiques non normés, $\mathscr{F}$ peut être bornée dans $\mathscr{L}_b(E;F)$ sans être équicontinue. nous verrons cependant des cas où il en est ainsi.

**Théorème** 6.9: Pour qu'une partie $\mathscr{F}$ du dual $E'$ d'un espace vectoriel topologique localement convexe $E$ soit équicontinue, il faut et il suffit que son polaire dans $E$ soit un voisinage de $O$ ou aussi qu'elle soit contenue dans le polaire d'un voisinage de $O$ de $E$.

**Théorème** 6.10: Soit $E$ un espace vectoriel topologique. Si on munit le dual $E'$ de la topologie* -faible $E'_\sigma = \sigma(E', E)$ ou de la topologie $E'_c$ de la convergence uniforme sur tout compact de $E$, toute partie équicontinue $\mathscr{F}$ de $E' = \mathscr{L}(E;k)$, est relativement compacte.

**Démonstration :** Il suffit d'appliquer le corollaire du troisième théorème d'Ascoli , avec $F = K$, corps des scalaires. ici il existe bien un point $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{F}(x_0)$ soit borné, à savoir.$O$;de toute facon, le théorème précédent montre que, pour tout $x \in E$, $\mathscr{F}(x)$ est borné dans $F$ (cela revient à dire que $\mathscr{F}$ est bornée pour la topologie $\mathscr{L}_s(E;F)$). □

## *Exercices*

**Exemple** 6.7: 1) On a $X$ et $Y$ deux ensembles ,toute partie finie de $\mathscr{C}(X,Y)$ est équicontinue, et un ensemble fini d'applications uniformément continues est uniformément équicontinu.
2) Si $B \subset A \subset \mathscr{C}(X,Y)$ où $A$ est équicontinue (respectivement uniformément équicontinue), alors $B$ l'est aussi.

**Exemple** 6.8: Soient $X$,$Y$ deux espaces métriques,$d$(resp.$d'$) la distance sur $X$(resp.$Y$), $K$ et $\alpha$ deux nombres $> 0$.L'ensemble des applications($\alpha$-höldériennes) $f$ de $X$ dans $Y$ telles que, pour tout couple $(x, x')$ de points de $X$ , on ait :

$$d(x, x') \leqslant k(d'(f(x), f(x')))^\alpha$$

est uniformément équicontinu.
Par exemple, l'ensemble des isométries de $X$ sur une partie de $Y$ est uniformément équicontinu.
Le théorème de Heine s'étend aux familles équicontinues.

**Exemple** 6.9: Soit $E = C([0, +\infty[)$ et

$$H = f_n \in E; f_n(x) = sin(\sqrt{x + 4n^2\pi^2}), n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, +\infty[ \subset E$$

(1) Montrer que $H$ est équicontinue.
(2) Montrer que $f_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
(3) Montrer que la convergence n'est pas uniforme dans $E$.

**Solution :** (1) $f_n'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x + 4n^2\pi^2}} cos\sqrt{x + 4n^2\pi^2}$ D'où

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + 4n^2\pi^2}} \leqslant \frac{1}{4\pi}$$

Donc

$$\forall x, y \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{1}{4\pi}|x - y|$$

D'où l'équicontinuité de $H$.
(2) Pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$f_n(x) = sin(\sqrt{x + 4n^2\pi^2}) = sin\left(2n\pi\sqrt{1 + \frac{x}{4n^2\pi^2}}\right)$$

$$= sin(2n\pi + \frac{x}{4n\pi} + \circ(\frac{1}{n})) = sin(\frac{x}{4n\pi} + \circ(\frac{1}{n})) = \frac{x}{4n\pi} + \circ(\frac{1}{n})$$

Donc $f_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
(3) Posons, pour $n \geqslant 1$, $x_n = \frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2 \in [0, +\infty[$ et $f_n(x_n) = 1$. Alors , $\| f_n \| = 1$ et si pose $f = 0$ alors $\| f_n - f \|_\infty = \| f_n \| = 1 \nrightarrow 0$. Donc la convergence n'est pas uniforme. Sans l'hypothèse "l'espace de départ est compact", mais avec" l'équicontinuité, nous avons le résultat suivant.

**Exemple** 6.10: Soit $(E, d)$ et $(F, d_0)$ deux espaces métriques. Soit $(f_n)$ une suite de $\mathscr{C}(E, F)$ tel que $(f_n)$ converge simplement vers $f$. Supposons que $H = f_n; n \in \mathbb{N}$ soit équicontinue en $x_0$ (resp. équicontinue).
Montrer que $f$ est continue en $x_0$ (resp. continue sur $E$).

**Solution :** En effet, Soit $\varepsilon > 0$ , alors il existe $\delta > 0$ tel que :

$$d(x, x_0) \leqslant \delta \Rightarrow d'(f_n(x), f_n(x_0)) \leqslant \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque la dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ , par passage à la limite quand $n \to \infty$ , on obtient la continuité de $f$ en $x_0$.

**Exemple** 6.11: Soit $K : C([a, b]) \to C([a, b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)\,dt$, $k \in C([a, b] \times [a, b])$, et soit $(f_n)$ une suite bornée de $X = (C([a, b]), \|.\|_\infty)$.

1. Rappeler pourquoi $k$ est uniformément continue.

2. En déduire l'équisingularité de $(Kf_n)$.
3. Montrer que $(Kf_n)$ contient une sous-suite convergente dans $X$.

**Solution :**

1. $k$ est continue sur le compact $[a,b]\times[a,b]$ donc est uniformément continue. écrivons cette continuité uniforme dans le cas particulier où les secondes coordonnées sont égales :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x,y,t \in [a,b] \qquad |x-y| < \eta \Rightarrow |k(x,t)-k(y,t)| < \varepsilon'.$$

2. Comme $(f_n)$ est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$. Fixons $x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, par l'uniforme continuité de $k$, on obtient un $\eta > 0$ avec pour $|x-y| < \eta$, $|k(x,t)-k(y,t)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$.
Donc pour $|x-y| < \eta$,

$$\begin{aligned}
|Kf_n(x) - Kf_n(y)| &\leqslant \int_a^b |k(x,t)-k(y,t)| \|f_n\|_\infty dt \\
&\leqslant M \int_a^b |k(x,t)-k(y,t)| dt \\
&\leqslant M \int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)} dt \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui est l'équicontinuité de $(Kf_n)$ en $x$. Comme ceci est valable quelque soit $x \in [a,b]$ alors $(Kf_n)$ est équicontinue.

3. Notons $\mathcal{H} = (Kf_n)_n$. Alors pour $x$ donné $\mathcal{H}(x)$ est borné car $|\int_a^b k(x,t) f_n(t) dt| \leqslant M \int_a^b |k(x,t)| dt$ est bornée indépendamment de $n \in \mathbb{N}$. Donc $\overline{\mathcal{H}(x)}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc un compact.
Nous avons toutes les hypothèses pour appliquer le théorème d'Ascoli, donc $\mathcal{H} = (Kf_n)_n$ est relativement compact. Donc de la suite $(Kf_n)$ on peut extraire une sous-suite convergente. (Attention la limite de cette sous-suite est dans $\overline{\mathcal{H}} \subset X$ et pas nécessairement dans $\mathcal{H}$.)

**Exemple** 6.12: Par définition, une famille $\mathcal{F}$ formée d'une seule fonction continue $f$ est équicontinue. Plus généralement, toute partie finie de $C(E,F)$ est équicontinue.

**Exemple** 6.13: Si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont $C$-lipschitziennes, pour une même constante $C$, alors $\mathcal{F}$ est équicontinue. Plus généralement, il suffit que tout point $x \in E$ possède un voisinage ouvert $V_x$ tel que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ soient $C_x$-lipschitziennes sur $V_x$, pour une même constante $C_x$ dépendant uniquement de $x$.

**Exemple** 6.14: Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés, et si $F$ est une partie bornée de $L(E,F)$, alors $F$, considérée comme partie de $C(E,F)$, est équicontinue. C'est un cas particulier de l'exemple précédent.

**Exemple** 6.15: Soient $E = [0;1]$, $F = \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = t^n$. Alors la suite $(f_n)$ n'est pas équicontinue.

**Exercice** 6.4: Montrer que la famille de fonctions de la variable réelle $\{|x|^\alpha;\ \alpha \in [0,1]\}$ n'est pas équicontinue en 0.

**Exercice** 6.5: Soit $K$ un espace topologique compact et $\mathcal{F} \subset C(K)$ une famille équicontinue sur $K$. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $(C(K), \|.\|_\infty)$ est également équicontinue.

**Exercice** 6.6: Montrere que toute partie bornée $E$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ est équicontinue.

**Exercice** 6.7: On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.
2. La suite $(f_n)$ est elle relativement compacte dans $(C([0,\infty[), \|.\|_\infty)$ ? Que dit le théorème d'Ascoli ?

**Correction :**

1. (a) Pour $t \geqslant 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sin\sqrt{t + 4(n\pi)^2} \\ &= \sin 2n\pi\sqrt{1 + \frac{t}{4n^2\pi^2}} \\ &= \sin 2n\pi(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{4n^2\pi^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\ &= \sin(2n\pi + \frac{t}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})) \\ &= \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Donc quand $n \to +\infty$ alors $f_n(t) \to 0$. Donc $(f_n)$ converge simplement vers 0.

(b) Pour $n \geqslant 1$,

$$|f_n'(t)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t + 4n^2\pi^2}} \cos\sqrt{t + 4n^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t + 4\pi^2}} \leqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Pour $t \geqslant 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ donné, on pose $\eta = 4\pi\varepsilon$, alors par l'inégalité des accroissement finis

$$\forall n \geqslant 1 \quad |t - t'| < \eta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(t')| \leqslant \frac{1}{4\pi}|t - t'| < \varepsilon.$$

Donc $(f_n)$ est une famille équicontinue.

2. Notons $\mathcal{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathcal{H}(t) = \{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, alors d'après la convergence simple, $\overline{\mathcal{H}(t)} = \mathcal{H}(t) \cup \{0\}$. Mais $(f_n)$ ne converge pas uniformément (i.e. pour la norme $\|.\|_\infty$) vers $f = 0$. En effet pour $n$ impair prenons $t_n = 5n^2\pi^2$, alors $f_n(t_n) = \sin\sqrt{9n^2\pi^2} = \sin 3n\pi = \pm 1$. Pour $n$ pair on prend $t_n = 5(n+1)^2\pi^2 - 4n^2\pi^2$ alors $f_n(t_n) = \pm 1$. Donc pour tout $n$, $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Supposons que $\mathcal{H}$ soit relativement compact alors de la suite $(f_n)$ on peut extraire une sous-suite qui converge, nécessairement la limite est $f = 0$, mais comme pour tout $n$, $\|f_n - f\|_\infty = 1$, nous obtenons une contradiction.

   Bien sûr le théorème d'Ascoli n'est pas mis en défaut, car toutes les hypothèses sont vérifiées sauf $E = [0, +\infty[$ qui n'est pas compact.

**Exercice** 6.8: 1. Soit $k > 0$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leqslant k$ pour tout $t \in ]a, b[$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue.

2. Si $L > 0$ et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une suite d'applications $L$-lipschitziennes avec $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de $(f_n)$.

**Correction :**

1. Pour $f \in \mathcal{F}$, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t_0, t \in [a, b]$ il existe $c \in ]t_0, t[$ tel que $|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)||t - t_0|$. Donc $|f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ alors

$$\forall t \in [a, b] \qquad |t - t_0| \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0| \leqslant \varepsilon.$$

   Ce qui est exactement l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ en $t_0$. Comme nous pouvons prendre pour $t_0$ n'importe quel point de $[a, b]$ alors $\mathcal{F}$ est équicontinue.

2. (a) Notons $\mathcal{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour $x_0, x \in \mathbb{R}^n$, $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\|$. Donc en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ comme ci-dessus on prouve l'équicontinuité de $\mathcal{H}$ en $x_0$, puis partout.

   (b) Notons $\mathcal{H}(x) = \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors par hypothèse, $\mathcal{H}(0) \subset \bar{B}(0, \sqrt{2})$. Donc $\bar{\mathcal{H}}(0)$ est un fermé de $\bar{B}(0, \sqrt{2})$ qui est compact (nous somme dans $\mathbb{R}^n$), donc $\bar{\mathcal{H}}(0)$ est aussi compact, d'où $\mathcal{H}(0)$ relativement compact. Maintenant nous avons $\|f_n(x) - f_n(0)\| \leqslant L\|x - 0\|$. Donc $\|f_n(x)\| \leqslant L\|x\| + \sqrt{2}$. Donc pour $x$ fixé, $f_n(x) \in \bar{B}(0, L\|x\| + \sqrt{2})$ ce qui implique que $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact.

(c) Comme $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact on ne peut pas appliquer directement le théorème d'Ascoli. Soit $B_R = \bar{B}(0, R)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathcal{H}_R = \{f_{n|B_R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ la restriction de $\mathcal{H}$ à $B_R$. Alors par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{H}_R$ est relativement compact. Donc de la suite $(f_{n|B_R})_n$ on peut extraire une sous-suite convergente (sur $B_R$).

(d) Pour $R = 1$ nous extrayons de $(f_n)_n$ une sous-suite $(f_{\phi_1(n)})_n$ qui converge sur $B_1$. Pour $R = 2$, nous extrayons de $(f_{\phi_1(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_2(n)})_n$ qui converge sur $B_2$. Puis par récurrence pour $R = N$, nous extrayons de $(f_{\phi_{N-1}(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_N(n)})_n$ qui converge sur $B_N$. Alors la suite $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge sur $\mathbb{R}^n$. C'est le procédé diagonal de Cantor. En effet soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $N \geqslant \|x\|$. Alors $x \in B_N$ donc $(f_{\phi_N(n)}(x))_n$ converge vers $f(x)$, mais $(f_{\phi_n(n)})_{n \geqslant N}$ est extraite de $(f_{\phi_N(n)})_n$ donc $(f_{\phi_n(n)}(x))_n$ converge également vers $f(x)$. Nous venons de montrer que $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge simplement vers $f$ sur tout $\mathbb{R}^n$.

**Exercice** 6.9: Soient $(E, d)$ un espace métrique et $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de $E$ dans $\mathbb{R}$. Établir :

1. L'ensemble $A$ des $x \in E$ pour lesquels $\mathcal{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.
2. Si $E$ est compact et connexe et si $\mathcal{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $C(E, \mathbb{R})$.

**Exercice** 6.10: Soient $(E, d)$ un espace métrique et $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de $E$ dans $\mathbb{R}$. Établir :

1. L'ensemble $A$ des $x \in E$ pour lesquels $\mathcal{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.
2. Si $E$ est compact et connexe et si $\mathcal{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $C(E, \mathbb{R})$.

**Exercice** 6.11: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $A$ une partie de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que : $\forall x \in A, \exists M_x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant M_x$.
   Montrer que si $A$ est fini ou dénombrable, il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $A$.
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, i,e.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \eta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon.$$

   Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la convergence est uniforme sur tout compact.
3. Montrer réciproquement que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact, elle est uniformément bornée sur tout compact et équicontinue.

## 6.7 Théorème de Grothendieck

Alexandre (ou Alexander) Grothendieck (1928 - 2014) est un mathématicien né à Berlin, apatride puis français. Il est considéré comme le refondateur de la géométrie algébrique. Il était connu pour son intuition extraordinaire et sa capacité de travail exceptionnelle. Entre 20 et 23 ans, il va résoudre 14 questions sur lesquelles Dieudonné et Schwartz (ses directeurs de thèse) "butent" et rédige l'équivalent de six thèses de doctorat. La médaille Fields lui a été décernée en 1966.

**Théorème** 6.11 (Théorème de Grothendieck-1954 ): Soit $(X, A, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie non nulle et soit $p \in ]1, +\infty[$. Tout sous espace ferme de $L^p(\Omega)$ inclus dans $L^\infty(\Omega)$ est de dimension finie.

**Note :** Comme $S \subset L^\infty(\mu)$ et que $\mu$ est finie, les $L^p$ sont decroissants et $S \subset L^q(\mu)$ pour n'importe quel $q$.

**Idee de la preuve :** On va d'abord montrer que, sur $S$ , les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sont equivalentes (ce qui ne devrait pas étonner, étant donné qu'on souhaite prouver que $S$ est de dimension finie), on pourra ensuite ramener le cas general au cas $p = 2$ (en injectant continument $(S, \|.\|_2)$dans $L^\infty(\mu)$. Afin de conclure, on utilisera le caractere Hilbertien de $L^2(\mu)$ pour montrer qu'on ne peut pas avoir de trop grande famille orthonormee dans $S$.

**Démonstration :** Soit $S$ un sous-espace vectoriel ferme de $L^p(\mu)$ inclus dans $L^\infty(\mu)$.

***Etape 1.*** On montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_p$.

On définit, comme $(S \subset L^\infty)$,

$$\Phi : (S, \|.\|_p) \longrightarrow (L^\infty, \|.\|_\infty) : \qquad f \mapsto f.$$

$S$ est un sev fermé de $L^p$ qui est complet donc $S$ est complet, et $S$ est donc un Banach (evn complet), $L^\infty$ aussi et $\Phi$ est linéaire. On peut donc appliquer le théorème du graphe fermé : pour montrer que $\Phi$ est continue, il suffit de montrer que son graphe est fermé.

Soit $(f_n, \Phi(f_n))$ une suite de son graphe qui converge vers $(f, g)$. On a $f \in S \subset L^p$ car $S$ est ferme et $g \in L^\infty$ car $L^\infty$ est un Banach. $\Phi(f_n) = f_n$ et la convergence $L^\infty$ implique la convergence $L^p$ car $\mu$ est une mesure finie. Donc, par unicite de la limite dans $L^p$, $g = f = \Phi(f)$. Le graphe de $\Phi(f)$ est ainsi ferme donc $\Phi(f)$ est continue. Il existe donc une constante $K > 0$ telle que :

$$\forall f \in S,\ \ \|f\|_\infty = \|\Phi(f)\|_\infty \leqslant K\|f\|_p.$$

***Etape 2.*** On montre qu'il existe une constante $M > 0$ telle que : $\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant M\|f\|_2$.

Distinguons deux cas.

- Si $p < 2$. On a $1 < \frac{2}{p}$, et l'inégalité de Hölder implique

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \times 1 d\mu \leqslant \Big( \int_\Omega (|f|^p) d\mu \Big)^{\frac{p}{2}} \Big( \int_\Omega (1^{\frac{2}{2-p}}) d\mu \Big)^{\frac{2-p}{2}} = \|f\|_2^p \mu(\Omega) = C\|f\|_2^p$$

  En élevant à la puissance $\frac{1}{p}$, on trouve

$$\|f\|_p \leqslant c\|f\|_2$$

  Ce qui donne le résultat annoncé en prenant $M = cK$ ($\|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_p \leqslant cK\|f\|_2$)
- Soit $p \geqslant 2$. Par définition du supremum essentiel, il existe alors $N$ un ensemble de mesure nulle tel que

$$\forall x \in \Omega \backslash N;\ |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

  On obtient donc

$$\forall x \in \Omega \backslash N;\ |f(x)|^p = |f(x)|^{p-2} |f(x)|^2 \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} |f(x)|^2.$$

  On intègre ces inégalités sur $\Omega \backslash N$, ce qui revient exactement à intégrer sur $\Omega$ comme $N$ est de mesure nulle.

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2.$$

  On utilise la question précédente pour obtenir :

$$\|f\|_\infty^p \leqslant K^p \|f\|_p^p \leqslant K^p \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2.$$

  D'où,

$$\|f\|_\infty \leqslant K^{\frac{p}{2}} \|f\|_2.$$

- On prend alors $M = \max(cK, K^{\frac{p}{2}})$.

$$\forall f \in S,\ \ \|f\|_\infty \leqslant M\|f\|_2.$$

***Etape 3.*** On considere $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de fonctions de $S$. On suppose que cette famille est orthonormee de $L^2(\mu)$.
Soit $Q$ une partie dénombrable dense de $\mathbb{R}^n$. Soient $c = (c_1, ..., c_n) \in Q$ et posons $f_c = \sum c_i f_i$. On a,

$$\|f_c\|_\infty \leqslant M\|f_c\|_2 = M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore dans $L^2$ en utilisant le fait que $(f_i)$ forment une famille orthonormée de $L^2$. Soit$x \in \Omega$ fixé. Comme $c \mapsto f_c(x)$ est continue (polynomial en les $c_i$) sur $\mathbb{R}^n$, et comme $Q$ est dense dans $R^n$, on aura,

$$\forall x \in \Omega, \forall c \in \mathbb{R}^n,\ \ |f_c(x)| \leqslant \|f_c\|_\infty \leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

***Etape 4.*** On en déduit que $n \leqslant M^2$.

On applique l'étape 3 avec $c_i = f_i(x)$, 4 et on élève au carré. On trouve alors, pour tout $x \in \Omega$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2\Big)^2 \leqslant M^2 \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2.$$

On simplifie :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \leqslant M^2.$$

Et comme les $f_i$ sont de norme 1 (i,e $\int f_i^2 = 1$), on obtient

$$n = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 d\mu \leqslant M^2 \int_\Omega 1 d\mu = M^2.$$

Ce qui prouve l'étape 4.

***Etape 5.*** (Conclusion)

Supposons par l'absurde $S$ de dimension infinie. Si toutes les familles de $S$ à $M^2+1$ éléments étaient liés, la dimension serait finie. Donc on peut trouver une famille libre à $M^2+1$ éléments. En orthonormalisant cette famille, on a une famille orthonormée à $M^2+1$ éléments. Absurde car le cardinal de la famille doit être inférieur à $M^2$ avec l'étape 4. Donc $S$ est bien de dimension finie. □

**Remarque** 6.4:

1. L'hypothèse de fermeture est fondamentale. $L^\infty$ est bien un sous-espace de $L^p$, inclus dans $L^\infty$ et est de dimension infinie.
2. L'hypothèse d'inclusion dans $L^\infty$ est également fondamentale, et ne peut pas être remplacée par une inclusion dans un $L^q$ avec $p < q < +\infty$ : Rudin construit, juste après avoir énoncé ce théorème, un sous-espace fermé de $L^1$, qui vit dans $L^4$, et qui est de dimension infinie.

**Exercice** 6.12: Soit $0 < p < 1$. Soit $S$ un sous espace fermé de $L^p(0,1)$, tel que $\subset L^\infty$.

1. Montrer que $S \subset L^2$.
2. Soit $f_1, ..., f_n$ une famille orthonormale de $S \subset L^2$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour presque tout $x$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\alpha\| \leqslant 1$,

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)| \leqslant C$$

**Exercice** 6.13: Soit $X$ un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$ dont chaque élément est aussi dans $L^\infty([0,1])$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in X$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_2$. .
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille orthonormale dans $X$ : $f_1, ..., f_n$. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, on note $F_x = \sum_{j=1}^n x_j f_j$.

*(a)* On choisit une partie dénombrable dense $D$ de $\mathbb{C}^n$, montrer qu'il existe $N \subset [0,1]$ de mesure nulle telle que : $\forall x \in D,\ \forall t \in [0,1]-N,\ \ |F_x(t)| \leqslant C\|x\|_2$.

*(b)* En déduire que : $\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall t \in [0,1]-N,\ \ |F_x(t)| \leqslant C\|x\|_2$.

3. En choisissant $x = (f_1(t), ..., f_n(t))$, montrer que : $\forall t \in [0,1]-N, \sum_{j=1}^n |f_j(t)|^2 \leqslant C^2$. En déduire que $X$ est de dimension finie.

**Exercice** 6.14: Soit $\Omega$ un espace mesure et $\mu$ une mesure de probabilité sur $\Omega$, i.e, $\mu(\Omega) = 1$. Soit $S$ un sous-espace vectoriel ferme de $L^1(\Omega)$ tel que $S \subset L^\infty(\Omega)$.

1. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que l'injection (identité) $(S, \|.\|_1) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ est continue. Montrer que $S$ est aussi un sous-espace ferme de $L^2(\Omega)$ et que l'injection $(S, \|.\|_2) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$, est également continue. On a donc en particulier l'existence d'une contante positive $K$ vérifiant, pour tout $f \in S$ :
$$\|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_2.$$

2. $(S, \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert d'après la question précédente. Soit donc une famille orthonormée finie $\Phi_1, ..., \Phi_n$ de $(S, \|.\|_2)$ et soit $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si $u \in \overline{B(0,1)}$ (boule unité fermée euclidienne), la fonction $f_u = \sum_{i=1}^n u_i\Phi_i$ est dans $S$ et vérifie $\|f_u\|_\infty \leqslant K$.

3. Rappeler la définition de la borne supérieure essentielle (notee $\|.\|_\infty$ précédemment). En déduire que pour toute partie dénombrable $D$ de $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$, il existe un ensemble mesurable $\Omega_D \subset \Omega$ de mesure totale (i.e. $\mu(\Omega_D) = \mu(\Omega) = 1$.) tel que
$$\forall u \in D,\ \forall x \in \Omega_D,\ \ |f_u(x)| \leqslant K.$$

4. En remarquant qu'à $x \in \Omega$ fixé, $u \mapsto |f_u(x)|$ est continue, montrer qu'en fait il existe un ensemble mesurable $\Omega' \subset \Omega$ de mesure totale
$$\forall u \in \overline{B(0.1)},\ \ \forall x \in \Omega',\ \ |f_u(x)| \leqslant K. \tag{6.3}$$

`Indication :` *Prendre* $\Omega' = \Omega_{\mathbb{Q}^n \cap \overline{B(0.1)}}$.

5. À $x \in \Omega'$ fixé, on note $v_x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $(\Phi_1(x), ..., \Phi_2(x))$. En remplaçant $u$ par le normalisé de $v_x$ dans (6.3), montrer que :
$$\sum_{i=1}^n |\Phi_i(x)|^2 \leqslant K^2,$$
et en déduire que $n \leqslant K^2$.

# 7. ESPACES DE BAIRE, THÉORÈMES DE BANACH-STEINHAUSS ET DE BANACH-MACKEY

## 7.1 *Définitions et propriétés Espaces de Baire*

**Définition** 7.1.1: Un espace topologique X est dit espace de Baire si X vérifie l'une des propriétés de la proposition suivante :

**Proposition** 7.1: Soit X un espace topologique. Les propri´et´es suivantes sont ´equivalentes.

(i) Pour toute famille dénombrable $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de fermés de $X$ telle que $X = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} F_n$, la réunion des intérieurs $\cup_{n\geqslant 0} F_n$ est dense dans $X$.

(ii) La réunion de toute famille dénombrable de fermés de $X$ d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

(iii) L'intersection de toute famille dénombrable d'ouvertes de $X$ et denses dans $X$ est dense dans X.

**Démonstration :** Montrons l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ . Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fermés de $X$ d'intérieurs vides. Montrons que $Y = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} F_n$ est d'intérieur vide. Si $\mathring{Y} \neq \emptyset$, alors $F = X\setminus \mathring{Y}$ est un fermé dans $X$ tel que $F \neq X$ et on a $X = F \cup \mathrm{Vg}_{n\geqslant 0} F_n$. Par hypothèse la réunion $\hat{F} \cup_{n>0} \hat{F}_n$ est dense dans $X$. Or, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\hat{F}_n = \emptyset$, on en déduit que $\hat{F}$ est dense dans $X$, donc $F$ est un fermé dense dans $X$, d'où $F = X$ ce qui est impossible. Donc on a $\hat{Y} = \emptyset$ Montrons l'implication (ii)$\Longrightarrow$(iii) $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'ouverts de $X$ et denses dans $X$. Soit $U = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} U_n$, et pour tout $n \geqslant 0$, soit $F_n = X\setminus U_n$. Alors pour tout $n \geqslant 0, F_n$ est un fermé dans $X$ et on a $\hat{F}_n = X\setminus\overline{U_n} = \emptyset$, voir proposition 1.2.2. Donc $\bar{X}\setminus\overline{U} = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} X\setminus U_n = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} F_n$ est d'intérieur vide, d'oit on a $X\setminus\bar{U} = \emptyset$. Donc $U$ est dense dans $X$ Montrons l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fermés dans $X$ telle que $X = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} F_n$. Pour tout $n \geqslant 0$, soit $K_n = F_n\setminus F_n$, alors $K_n$ est un fermé de $X$ tel que $\hat{K}_n = \emptyset$. Soit $U_n = X\setminus K_n$, alors $U_n$ est un ouvert dense dans $X$. Par conséquent, $\underset{n}{n}\sum_n^n U_n$ est dense dans $X$ et on a $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} U_n = X\setminus_{n\geqslant 0} K_n$. On a $F_n = K_n \cup F_n^\circ$, donc $\underset{n\geqslant 0}{V} \mathring{F}_n$ contient le complémentaire de $\cup K_n$, on en déduit que $\bigcup\limits_{n>0} \mathring{P}_n$ est dense dans $X$. $\square$

**Théorème** 7.1: Si $X$ est un espace métrique complet, ou si c'est un espace localement compact, $X$ est un espace de Baire

**Démonstration :** Nous la donnons tout d'abord dans oil $X$ est un espace métrique complet. Soit $(O_i)_{i=1,\cdots,+\infty}$ une famille dénombrables d'ouverts denses. Il faut montrer que $\cap O_i$ est encore dense. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour tout ouvert $W$ de $X$, l'intersection $(\cap O_i) \cap W$ est non vide. Par hypothése, $O_1 \cap W$ est non vide. Soit $x_1$ un point de cette intersection. L'ensemble $O_1 \cap W$ étant ouvert, il existe un nombre $r_1 > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B(x_1, r_1)}$ soit contenue dans $O_1 \cap W$. Appelons $W_1$ la boule ouverte $B(x_1, r_1)$ . Par hypothiese, $W_1$ rencontre $O_2$ et par conséquent, il existe un point $x_2$ appartenant I'intersection $W_1 \cap O_2$. De nouveau, on trouve $r_2$ strictement positif, que l'on peut supposer inferieur is $r_1/2$ tel que la boule fermée $\overline{B(x_2, r_2)}$ soit contenue dans $W_1 \cap O_2$. Désignons par $W_2$ la boule ouverte $B(x_2, r_2)$ . Poursuivant ce procedé, on construit une suite de boules $B(x_i, r_i)$ telles que :

* chaque rayon $r_i$ est inferieur à la moitié du précédent, de sorte que la suite $(r_i)$ tend vers 0.

* les boules forment une suite décroissante, et pour tout $i, \overline{B(x_i, r_i)} \subset O_1 \cap \cdots \cap O_i \cap W$

□

**Exemple** 7.1: Tout espace topologician discret est un expace de Baire.

**Exemple** 7.2: L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ n'est pas un espace de Baire.

**Proposition** 7.2: Tout ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire.

**Démonstration :** Soient $X$ un espace de Baire et $U$ un ouvert de $X$. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'ouverts denses dans $U$. Alors, pour tout $n \geqslant 0, U_n$ est un ouvert de $X$ et on a $\overline{U_n} \cap U = U$, voir exercice 1.24. Soit $F = \underset{n>0}{D_n}$, alors $F$ est un fermé de $X$ et on $U \subset F$. Soit $V = X \backslash F$, alors $V$ est un ouvert de $X$. On pose $V_n = U_n \cup V$, alors $V_n$ est un ouvert de $X$ et on a $\bar{V}_n = \overline{U_n} \cup \nabla = X$. Puisque $X$ est un espace de Baire, alors $\underset{n\geqslant 0}{\Omega} V_n = \left(\underset{n>0}{\cap} U_n\right) \cup V$ est dense dans X. D'oñ on a $\left(\bar{S}_{n\supset 0}\overline{U_n}\right) \cup \bar{\nabla} = X$. Par conséquent on a $U = X \cap U = \left(\prod_{n\geqslant 0} U_n \cap U\right) \cup (\bar{V} \cap U)$. Or on a $\bar{V} \cap U = \emptyset$, d'oi $U = \overline{\bigcap_0 U_n} \cap U$ Autrement dit, $\underset{n\geqslant 0}{\cap} U_n$ est dense dans $U$. Donc $U$ est un espace de Baire. □

**Théorème** 7.2: Soit $(X, d)$ un espace métrique complet. Alors $X$ est un espace de Baire.

**Démonstration :** Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'ouverts de $X$ et denses dans $X$. Pour montrer que $\bigcap_{n\geqslant 0} U_n$ est dense dans $X$, d'après la proposition 1.2.4, il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide $V$ de $X$, $V \cap_{n\geqslant 0} U_n \neq \emptyset$. Comme $U_0$ est dense dans $X$, alors $V \cap U_0 \neq \emptyset$, et soit $x_0 \in V \cap U_0$. Comme $V \cap U_0$ est un ouvert de $X$, il existe $r_0 > 0$ tel que $r_0 \leqslant 1$ et $B(x_0, 2r_0) \subset V \cap U_0$. On construit, par récurrence sur $n$, une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans $X$ et une suite $(r_n)_n \geqslant 0$ de nombres réels strictement positifs tels que $r_n \leqslant 2^{-n}$ et $B(x_n, 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, pour tout $n \geqslant 1$. En effet, on a déjà construit $x_0$ et $r_0$ et supposons $x_n$ et $r_n$ construits; comme $U_{n+1}$ est dense dans $X$, il existe $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Comme $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est ouvert, il existe $0 < r_{n+1} \leqslant 2^{-n-1}$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Soit $B_n = B'(x_n, r_n)$, on a $B_{n+1} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \subset B_{n-}$ Comme l'espace $(X, d)$ est complet et les $B_n$ forment une suite décroissante de fermés non vides dont les diamêtres tendent vers 0, d'aprós le thóorème de Cantor, on a $\underset{n>0}{\cap} B_n \neq \emptyset$. Or $B_0 \subset V$ et, pour tout $n \geqslant 0$, on a $B_n \subset U_n$ donc $\underset{n>0}{\cap} B_n \subset V \cap \underset{n\geqslant 0}{\cap} U_n$. Par conséquent, on a $V \cap \underset{n\geqslant 0}{V\cap} \underset{n\geqslant 0}{U} U_n \neq \emptyset$. Donc $\underset{n\geqslant 0}{D} U_n$ est dense dans $X$. Soit $(f_n)_n \geqslant 0$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$ La suite $(f_n(x))_n > 0$ converge vers un point $f(x) \in \mathbb{R}.\Pi$. Il existe des exemples qui montrent que $f$ n'est pas toujours continue sur $[0, 1]$. La question maintenant est de savoir s'il existe une telle suite $(f_n)_n \geqslant 0$ telle que $f$ soit discontinue partout sur $[0, 1]$ ou bien de savoir s'il y a un moyen pour contrôler la discontinuité de $f$. Le théorème suivant répond à cette question. □

**Théorème** 7.3: Soient $X$ un espace de Baire, $(Y, d)$ un espace métrique, $f$ une application de $X$ dans $Y$ et $(f_n)_n \geqslant 0$ une suite d'applications continues de $X$ dans $Y$ telle que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(x)$ dans $Y$. Soit $C$ l'ensemble des points de $X$ en lesquels $f$ est continue. Alors $C$ est dense dans $\bar{X}$.

**Théorème** 7.4: Tout espace localement compact $X$ est un espace de Baire.

**Démonstration :** Nous allons montrer que dans chacun des deux cas l'axiome (EB) est vérific. Soit $(\mathrm{A_n})$ une suite d'ensembles ouverts partout denses dans X, et soit G un ensemble ouvert non vide quelconque. On peut définir par récurrence une suite $(\mathrm{G}_n)$ d'ensembles ouverts non vides tels que $\mathrm{G_1} = \mathrm{G}$ et $\mathrm{G_{n+1}} \subset \mathrm{G_n} \cap \mathrm{A_n}$; en effet, $\mathrm{G}_n$ 'étant pas vide par hypothése, $\mathrm{G}_n \cap \mathrm{A}_n$ est un ensemble ouvert non vide ; comme X est régulier dans les deux cas envisagés, il existe un ensemble ouvert non vide $\mathrm{G_{n+1}}$ tel que $\mathrm{G_{n+i}} \subset \mathrm{G_n} \cap \mathrm{A_n}$. Cela étant l'ensemble $\mathrm{G} \cap \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ contient l'intersection des $\mathrm{G}_n$, et cette dernière est identique à l'intersection des $G_n$; tout revient à montrer que les ensembles $G_n$ ont une intersection non vide. Or, lorsque **X** est localement compact, on peut supposer $\mathrm{G_2}$ compact ; dans l'espace compact $\mathrm{G_2}$, les $\mathrm{G}_n (n \geqslant 2)$ forment une suite décroissante d'ensembles fermes non vides, et ont donc au moins un point commun d'aprés I'axiome $(\mathrm{C}^n)$. Lorsque X est un espace métrique complet (pour une distance compatible avec sa topologic), on peut supposer $G_n$ choisi de sorte que son diamétre (relatif à cette distance) tende vers 0 lorsque n croît indéfiniment ; les $\mathrm{G}_n$ forment alors une base de filtre de Cauchy qui converge vers un point appartenant nécessairement à leur intersection. □

**Exemple** 7.3: . $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : Baire en donne une nouvelle preuve, en appliquant (iii) aux fermés réduits ‡ un point (voir aussi la remarque 1 ci-dessous). De méme $\mathbb{R}$ 2 n'est pas réunion dénombrable de droites, ni de cercles, de paraboles... Mais líensemble des rationnels est évidemment réunion dénombrable de points. Les assertions du $\mathbb{Q}$ peuvent donc étre fausses si on omet l'hypothése complet. Voir cependant la remarque 2

Par passage aux complementaires l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ des irrationnels est intersection dénombrable d'ouverts denses. Mais il n'est pas réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (sinon $\mathbb{R}$, réunion de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ le serait aussi). En passant à nouveau aux complementaires, on voit donc que $\mathbb{Q}$ n'est pas intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$ (de tels ouverts, contenant $Q$, seraient forcément denses). On verra une application à l'Exemple 4.

**Exemple** 7.4: Un Banach est de dimension finie ou non denombrable. Autrement dit un espace vectoriel normé $E$ qui admet une base infinie dénombrable (par exemple l'espace des polynomes ) ne saurnit etre complet ([G] p. 393). Soit en effet $E_n$ le sous-espace de $E$ engendré par les $n$ premiers vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base. D'une part $E_n$ est fermé dans $E$ (car de dimension finie, donc complet). D'autre part $E_n$ est d'intérieur vide : s'il contenait une boule $\|x - a\| < r$, il contiendrait la boule $\|x\| < r$ par translation, donc l'espace entier par homothétie ; alors $E = E_n$ serait de dimension finie. Le theoreme de Baire interdit alors à l'espace $E$, réunion dénombrable des $E_n$, d'etre complet. Le résultat s'applique notamment au Hilbert $\ell^2$, ce qui ne l'empeche pas d'avoir une base hilbertiennbrable ! Ne pas confondre base an sens algébrique (tout vecteur est alors combinaison linéaire finie de vecteurs de la base) et base hilbertienne (tout vecteur est alors limite de combinnisons linénires finies de vecteurs de la base).

**Corollaire** 7.1: Soient $X$ un espace métrique complet qui est réunion dénombrable de fermés $F_n$. Alors la réunion des interieurs des $F_n$ est un ouvert dense de $X$.

## 7.2 Fonctions continues et semi-continue sur les espace de Baire

**Théorème** 7.5: Soit X un espace de Baire, et soit $(f_\alpha)$ une famille de fonctions numériques semi-continues inferieurement dans $\mathbf{X}$, telles qu'en tout point $x \in \mathbf{X}$, l'enveloppe supérieure $\sup f_\alpha(x)$ soit finie. Dans ces conditions, tout ensemble ouctert non uide contient un sous- ensemble ourert non vide dans lequel la famille $(f_\alpha)$ est uniformément majorke.
On peut encore tnoncer le théortme en disant que l'ensemble des points au voisinage desquels la famille $(f_\alpha)$ est uniformément majorée est un ensemble oubert partout dense.
Soit $f = \sup f_\alpha$ l'enveloppe supérieure de la famille $(f_\alpha)$ ; la fonction $f$ est semi-continue inférieurement $(\mathrm{IV}, \mathrm{p} \cdot 30, \mathrm{th}, 4)$ et finie en tout point de X.Il suffit donc de faire la démonstration lorsque la famille $(f_\alpha)$ se réduit à une seule fonction $f$. Soit $A_n$ l'ensemble des points $x \in \mathbb{X}$ tels que $f(x) \leqslant n; A_n$ est fermé.

**Proposition** 7.3: et l'hypothése entraine que $X$ est réunion des $A_n$ , donc l'un . au moins des $A_n$ a un point interieur, ce qui montre qu'il existe un ensemble ouvert non vide dans lequel $f$ est majoré (par un entier $n$ ). Si on applique ce resultat à un sous-espace ouvert non vide quelconque de X (sous-espace qui est un espace de Baire d'apres la prop. 3 de IX, p. 54), on obtient le théoréme.
Les applications les plus fréquentes de ce théoréme se rapportent au cas où les $f_\alpha$ sont continues dans **X**.

## 7.3 Théorème de Banach-Steinhauss

**Définition** 7.3.1: Soiet X un espace topologique et A un sous-ensemble de X.On dit que A est maige dans X s'il existe une suit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de sous-ensemble de X telle que $A = \cup_{n\geqslant 0} A_n$ et pour tout $n \geqslant 0$ ,on ait $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

**Exemple** 7.5: L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est maiger dans $\mathbb{R}$.

**Remarque** 7.1: Soit X un espace de Baire, voir proposition espace de Baire (les propriétés sont équivalentes) et théorème espace de Baire.Alors on a :

1. X n'est pas maiger dans X, si $X \neq \emptyset$.
2. Si A est un sous-ensemble maiger dans X,alors $X \setminus A$ est dense dans X.

Soient $(E, \|\|), (F, \|\|')$ des espace normés et A un sous-ensemble borné dans $\mathcal{L}(E; F)$, alors pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $f(x); f \in A$ est borné dans F. En effet, soit $M > 0$ tel que pour tout $f \in A$,on ait $\|f\| \leqslant M$.Soit $x \in E$, alors pour tout $f \in A$, on a $\|f(x)\|' \leqslant \|f\|\|x\| \leqslant M\|x\|$. Donc l'ensemble $f(x); f \in A$ est borné dans F.

**Théorème** 7.6 (Théorème de Banach-Steinhauss ): Soient $(E, \|\|), (F, \|\|')$ des espace normés et A un sous-ensemble $\mathcal{L}(E; F)$.Pour tout $x \in E$,soit $A_x = f(x); f \in A \subset F$ et soit $B = x \in E; A_x soitborndansF$.Si B n'est pas maigre dans E,alors l'ensemble A est borné dans $\mathcal{L}(E; F)$.Autrement dit, il exist une constant $M > 0$ tel que pour tout $f \in A$,on ait $\|f\| \leqslant M$.En particulier, on a $B = E$.

**Démonstration :** Pour tout $n \geqslant 1$, posons ; $C_n = \{x \in E; \|f\|' \leqslant n, pourtout f \in A\} = \{x \in E; A_x \subset B'_F(0, n)\}$. Pour tout $f \in A$, $C_{f,n} = x \in E; \|f\|' \leqslant n$ est fermé dans E.Comme on a $C_n \cap_{f\in A} C_{f,n}$, alors $C_n$ est fermé dans E. De plus, on a $B = \cup_{n\geqslant 1} C_n$.Puisque B n'est pas maiger dans E, il existe $n \geqslant 1$ tel que $C_n$ ait un intérieur non vide.Pour tout $n \geqslant 1$, on a $C_n = nC_1$, et comme la multiplication par n, $n \neq 0$, est un homéomorphisme, on en déduit que $C_1$ a un intérieur non vide. Donc il existe $x_0 \in C_1 rtr > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset C_1$.Autrement dit, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $z \in B(x_0, r)$ et pour tout $f \in A$, on dit $\|f(z)\|' \leqslant 1$. Soient $x \in B(0, 1)$ et $f \in A$; comme $x_0 \mp rx \in B(x_0, r)$ et $f(x) = \dfrac{1}{2r}(f(x_0 + rx) - f(x_0 - rx))$, on obtient $\|f\|' \leqslant \dfrac{1}{r}$. Donc, pour tout $x \in B(0, 1)$ et pour tout $f \in A$,on a $\|f\|' \leqslant \dfrac{1}{r}$. Cela montre que pour tout $f \in A$, on a $\|f\|' \leqslant \dfrac{1}{r}$. □

**Corollaire** 7.2: Soint $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, $(F, \|.\|')$ un espace normé et A un sous-ensemble $\mathcal{L}(E; F)$. Les propriétés sont équivalentes.
(i) A est borné dans $\mathcal{L}(E; F)$.
(ii) Pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $f(x); f \in A$ est borné dans F.

**Démonstration :** Ceci résulte du théorème précédent et du fait que si E est un espace de Banach, alors E n'est pas maigre dans E car E est un espace de Baire. □

**Corollaire** 7.3: Soint $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, $(F, \|.\|')$ un espace normé et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suit non bornée dans $\mathcal{L}(E; F)$. Alors l'ensemle

$$D = \{x \in E; (f_n)_{n\geqslant 0} \text{n'est pas convergents dans } F\}$$

est dense dans E.

**Démonstration :** Soit $B = \{x \in E;\ (f_x)_{n\geqslant 0} \text{ soit born dans } F\}$. D'aprés le théorème précédent, l'ensemble B est maigre. Comme E est un espace de Baire, alors $E \setminus B$ est dense dans E. Or on a $E \setminus B \subset D$, donc D est dense dans E. □

**Corollaire** 7.4: Soint $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, $(F, \|.\|')$ un espace normé et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suit d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$, la suit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converg ; notons $f(x)$ sa limite. Alors la suit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, $f$ est linéaire et continue et on a $a\|f\| \leqslant \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n\|$.

**Démonstration :** Il est clair que $f$ est linéaire. Pour tout $x \in E$, la suit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente, donc bornée. Par le théorème précédent, il existe une constante $M > 0$ tell que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $a\|f\| \leqslant M$. Donc, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a\|f\|' \leqslant M\|x\|$. On passe à la limite, on trouve $\|f\|' \leqslant M\|x\|$. Donc $f$ est continue. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(x)\|' &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n(x)\|' = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n(x)\|' \\ &\leqslant \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|x\|\|f_n\|' = \|x\| \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$a\|f\| \leqslant \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n\|.$$

□

**Proposition** 7.4: Soint $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, et $(F, \|.\|')$ ,$(G, \|.\|')$ deus espaces normés. Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire vérifant les conditions suivantes :

1. Pour tout $x \in E$, l'application linéaire $y \longmapsto B(x, y)$ est continue,
2. Pour tout $y \in F$, l'application linéaire $x \longmapsto B(x, y)$ est continue.

Alors B est continue.

**Démonstration :** bilinéaire B est continue s'il existe une constante $M > 0$ tell que pour tout $x \in B_E = B_{E'}(0,1)$ et pour tout $y \in B_F = B_{F'}(0,1)$, on ait $\|B(x,y)\| \leqslant M$. Pour $x \in E$,l'application $y \longmapsto B(x,y)$ est linéaire continue de F dans G, donc il existe une constante $M_x > 0$ tell que pour tout $y \in B_F$, on ait $\|B(x,y)\| \leqslant M_x$. Pour tout $y \in B_F$, l'application $B_y : x \longmapsto B(x,y)$ est linéaire continue de E dans G.Soit $A = B_y; y \in B_F$, alors $A$ est une famille d'applications linéaires continues de E dans G telle que pour tout $x \in E$, il existe une constante $M_x > 0$ tell que pour tout $y \in B_F$, on ait $\|B_y(x)\| = \|B(x,y)\| \leqslant M_x$. D'aprés le corollaire(1), la famille $A$ est bornée. Autrement dit, il existe une constante $M > 0$ tell que pour tout $y \in B_F$, on ait $\|B_y\| \leqslant M$. D' où, pour tout $x \in B_E$ et pour tout $y \in B_F$, on a $\|B(x,y)\| = \|B_y(x)\| \leqslant M$. Donc B est continue. □

## Exercice

**Exercice** 7.1: Soient E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow \ell^\infty$ un application linéaire. Pour tout $n \geqslant 0$, soit $f_n : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ la form linéaire continue défine par $f_n(x) = x_n$, pour tout $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^\infty$. Montrer que $T$ est continue si et seulement si pour tout $n \geqslant 0, f_n \circ T$ est continue de E dans $\mathbb{K}$.

**Solution :** Comme pour tout $n \geqslant 0, f_n$ est une form linéaire continue sur $\ell^\infty$, il en résulte que si $T$ est continue, alors pour tout $n \geqslant 0, f_n \circ T$ est continue.
Réciproquement, supposone que pour tout $n \geqslant 0, f_n \circ T$ est continue. Pour tout $x \in E$, on a $\mid f_n \circ T(x) \mid = \mid f_n(T(x)) \mid = \leqslant \|T(x)\|_\infty$. Par le théorème de Banach-Steinhauss,corollaire 1.1, il existe une constante $M > 0$ tell que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x \in E$, on ait $\mid f_n \circ T(x) \mid \leqslant M\|x\|$. D'où pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0} \mid f_n \circ T(x) \mid \leqslant M\|x\|$.
Donc T est continue.

**Exercice** 7.2: Soients E un espace de normé et D un sous-ensemble de E. On suppose que pour tout $f \in E^*$, l' ensemble $f(D)$ est borné dans $\mathbb{K}$. Montrer que D est borné dans E.

**Solution :** Soit $J : E \longrightarrow E^{**} = \mathcal{L}(E^*; \mathbb{K})$ l'application canonique. Pour tout $x \in E$ et tout $f \in E^*$, on a $J(x)(f) = f(x)$. Par hypothèse, pour tout $f \in E^*$, l'ensemble $J(x)(f); x \in D$ est borné dans $\mathbb{K}$. Alors on déduit, par le théorème de Banach-Steinhauss, que $J(D)$ est borné dans $E^{**}$, donc D est borné dans E car $J$ est une application isométrique.

## 7.4 *Espace vectoriels topologiques tonnelés*

Les propriétés précédentes sont réalisées par une classe d' espace vectoriels topologiques bien plus étendue que les espaces Baire, si l'on se restreint à ne considérer que des espaces localement convexes.

**Définition** 7.4.1: On dit qu'un espace vectoriel topologique $E$ est tonnelé s'il est séparé, localement convexe, et si tout tonneau, c'est -à-dire toute partie T, convexe, équilibrée, fermée, absorbante, est un voisinage de $O$.

On sait qu'il existe un systéme fondamental voisinages de $O$ convexes, équilibrés et fermés, et que tout voisinage de $O$ est absorbant ; on suppose ici qu'une certaine réciproque est vérifiée.

**Théorème** 7.7: Tout espace vectoriel topologique localement convexe de Baire est tonnelé.

**Démonstration :** Soit T un ensemble convexe équilibré fermé absorbant. La réunion des $nT, n \in \mathbb{N}$, est l'espace entier, puisque T est absorbant ; les T étant fermés et $E$ de Baire, l'un d'eux a un intérieur non vide, donc aussi T lui-méme par homothétie. Soit donc $a \in \overset{\circ}{T}$ ; comme T est équilibré, $a \in T$, et alors le théorème de Banach-Steinhauss dit que, T étant convexe, $O \in \overset{\circ}{T}$. □

**Remarque** 7.2: 1. En général, un espace vectoriel normé non complet, qui n'est pas de Baire ; n'est pas non plus tonnelé.
Reprenons l'exemple donné à la remarque 2 qui suit le théorème . L'espace $E$ indiqué n'est pas tonnelé.
En effet la boule unité B de $C[0, 1]$, pour sa norme usuelle $\|.\|$, est un tonneau de $E$

2. La réciproque n'est pas vraie, bien des espaces tonnelés ne sont pas de Baire ; c'est justement ce qui fait leur intérét, c'est une classe d'espace bien plus large que celle des espaces de Baire, néanmois ils en ont certaines des propriétés essentielles. Par exemple, méme un produit de deux espaces de Baire n'est pas forcément de Baire ; d'autre part, quotient d'un espaces de Baire par un sous-espace vectoriel fermé n'est pas nécessairement de Baire.

**Théorème** 7.8: Un produit d' espaces vectoriels topologiques tonnelés est tonnelé ; le quotient d'un espace vectoriel topologique tonnelé par un sous-espace vectoriel fermé est tonnelé.

**Démonstration :** Pour un produit fini, c'est évident. Soit T un tonneau $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, E_i$ tonnelés. On sait (premiére partie) qu'on peut remplacer la produit par la somme directe $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$. Alors l'intersection $T_i$ de T avec chaque sous-espace $E_i$ est un tonneau, donc un voisinage de $O$ dans $E_i$. Mais alors, T étant convexe, il contient

$$\frac{T_1}{n} + \frac{T_2}{n} + \ldots \frac{T_n}{n},$$

qui est un voisinage de $O$ dans pour la topologique produit de $E$, d'où la résultat. Supposons que $E$ soit un produit quelconue : $E = \prod_{i \in I} E_i, E_i$ tonnelés. Soit T un tonneau de $E$. Montrons qu'il existe un $J$ fini $\subset I$ tel que l'espace $\prod_{i \in J} \{O\} \times \prod_{i \in J} E_i$ soit contenu dans T. Supposons en effet que ce soit inexact, et montrons que nous aboutissons à une contradiction. Pour tout J, il devait exister un $a_J \in E$, de projection nulle sue $\prod_{i \in J} E_i$, et non siuté dans T. Pour tout $K \subset I$ soit $\pi_K$ l'opérateur de projection de $E$ sur $\prod_{i \in K} E_i$. Il existe un $K$ fini $\subset J$ tel que $\pi_K a_J \notin \pi_K T$ ; sans quoi $a_J$ serait adhérent à T (en effet, tuot voisinages $\vartheta$ de $a_J$ contient un produit $\prod_{i \in K} \vartheta_i \times \prod_{i \in \complement_k} E_i$, où $\vartheta_i$ est un voisinages $\pi_i a_J$ ; à fortiori $\vartheta$ contient $\{\pi_{i \in K} a_J\} \times \prod_{i \in \complement_K} E_i$ ; si $\pi_K a_J \in \pi_K T$, c'est qu'il existe $b \in T$ tel que $\pi_{i \in K} a_J = \pi_{i \in K} b$, alors $\vartheta$ contient $\{\pi_{i \in K} b\} \times \prod_{i \in \complement_K} E_i$ donc $b$, donc tout voisinages $\vartheta$ de $a_J$ couperait T, donc dans T supposé fermé. Donc il existe un $K \in\subset J$ , et $a_{J,K}$ dont les seules coordonnées non nulles sont d'indice $i \in K$, tel que $a_{J,K} \not\in_K T$ . Partons d'un $J_0$ arbitraire, prenons pour $J_1$ l'ensemble $K_0$ ainsi associé à $J_0$ pour $J_2$ l'ensemble $K_1$, associé à $J_1$ , etc ...

Nous avons ainsi une suite infinie $J_0, J_1, \dots J_n, \dots$, et des points $a_{J_n, J_{n-1}}$, tels que les seules coordonnées non nulles de $a_{J_n, J_{n-1}}$, sont d'indice $i \in J_{n+1} \backslash J_n$, et que $a_{J_n, J_{n+1}} \in \pi_{J_{n+1}} T$. Quels que soient les scalaires $c_0, c_1, \dots, c_n$, il existe un scalaire $c_{n+1}$ tel que $c_0 a_{J_0, J_1} + c_1 a_{J_1, J_2} + \dots + c_n a_{J_n, J_{n+1}}$ ne soit pas dans $(n+1)\pi_{J_{n+1}} T$ (si en effet, pour tout $c_{n+1}$, ce point était dans $(n+1)\pi_{J_{n+1}} T$, comme $\pi_{J_{n+1}} T$ est convexe équilibré, le point différence enter celui qui correspond à $c_{n+1}$ et celui correspond à $c_{n+1} + 2(n+1)$ serait dans $2(n+1)\pi_{J_{n+1}} T$ ; or c'est $2(n+1) a_{J_n, J_{n+1}} \notin 2(n+1)\pi_{J_{n+1}} T$). On détermine ainse une suite de nombres $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ tels que, pour tout n,$c_0 a_{J_0, J_1} + c_1 a_{J_1, J_2} + \dots + c_n a_{J_n, J_{n+1}}$ ne soit pas dans $(n+1)\pi_{J_{n+1}} T$. La série $\sum_{n \geqslant 0} c_n a_{J_n, J_{n+1}}$ est sommable dans $E$, prace que chacune de ses projections par $\pi_i$ est sommable, n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Soit $S$ sa somme. Alors $S$ ne puet pas étre absorbé par T. Si en effet nous effectuns la projection $\pi_{J_{n+1}}, \pi_{J_{n+1}} S \notin (n+1)\pi_{J_{n+1}} T$, donc à fotiori $S \notin (n+1)T$, donc $S \notin (n+1)\lambda T$, pour $\lambda \leqslant (n+1)$, donc $S$ n'est pas absorbé par T. Or ceci contredit le fait que T,était un tonneau, est absorbant. Nous avons donc bien obtenu une contradiction. Donc il doit bien exister $J fini \subset I$ tel que $\prod_{i \in J} \{O\} \times \prod_{i \in \complement_J} E_i$ soit dans T. D'auter part, J étant fini, T coupe $\prod_{i \in J} E \times \prod_{i \in \complement_J} \{O\}$ suivant un voisinage de $O, T_J$. Alors T, étant convexe,contient $\frac{1}{2} T_J \times \prod_{i \in \complement_J} E_i$ que est un voisinage de $O$ de $E$ ; donc $E$ est bien tonnelé.

Le cas du quotien est trivial. Soient $E$ tonnelé, $F$ sous-espace vectoriel fermé de $E$ ; le quotien $E/F$, muni de la topologie quotien, est séparé ; soit $\pi$ la projection canoniqe de $E$ sue $E/F$. Soit T un tonneau de $E/F$ ; $\pi^{-1} T$ est trivialement un tonneau de $E$, donc c'est un voisinage de $O$, donc T est bien un voisinage de $O$ de $E/F$, et celui-ci est bien tonnelé. □

Voici un auter exemple d'espaces tonnelés.
elle induit une semi-norme continue pour la topologie $\varsigma_i$

**Théorème** 7.9: Soient $E$ un espase vectoriel,$(E)_{i \in I}$, une famille de sous-espace vectoriel topologie localement convexe. Placons sur $E$ la topologie $\varsigma$ limite inductive des topologies $\varsigma_i$ des $E_i$ . Alors $\varsigma$ est sur $E$ la topologie d' espace vectoriel localement convexe la plus fini qui rend les injections canonique des $E_i$ , munis de $\varsigma_i$ dans $E$ , continues, ou encore qui induise sur chaque $E_i$ une topologie moins fine que $\varsigma_i$. Pour qu'une application linéaire de $E$ dans un espace vectoriel topologie localement convexe $F$, soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à chaque $E_i$ , muni de $\varsigma_i$, soit continue. Si les $E_i$, muni de $\varsigma_i$, sont tonnelés, alors $E$ muni de $\varsigma$, s'il est séparé, est tonnelé.

**Démonstration :** Soit $\varsigma'$ une topologie d'espace localement convexe sur $E$.
D'aprés , pour que l'injection de $E_i$, muni de $\varsigma_i$ dans $E$ muni de $\varsigma'$, soit continue, il faut et il suffit que, pour tout semi-norme continue $q'$ pour $\varsigma'$, la semi-norme induit par $q$ sur $E_i$ soit continue pour $\varsigma'$ ; cela exprime exactement que chaque $q$ est acceptée, donc que $\varsigma'$ est moins fine que $\varsigma$, d'où la premiére assertion. Elle est trivilement équivlente à la deuxiéme. Elle signifie aussi que les semi-norme acceptées sont exactement les semi-norme continues sur $E$ pour $\varsigma$. Soit ensuit une application linéaire $u$de $E$ dans un espace vectoriel topologie localement convexe $F$. Pour qu'elle soit continue, il faut et il suffit que, d'aprés pour tout semi-norme continue $q \circ u$ soit continue sur $E$ c'est-à-dire acceptée ;ceci veut dire $q \circ u$ induit sur chaque $E$ une semi-norme continue pour $\varsigma_i$ ; et cela équivaut à dire que induit sur chaque $E$ une application continue pour $\varsigma_i$. Supposons enfin les $E_i$ tonnelés et $E_i$ séparé .Soit T un tonneau de $E$. Puisque $\varsigma$ induit sur $E$ une topologie moins fine que $\varsigma_i$, $T \cap E_i = T_i$ est à fortiori fermé pour $\varsigma_i$ ; et convexe équilibré. Donc $T_i$ est un voisinage de $O$ pour $\varsigma_i$ supposée tonnelé. T a une jauge $p$, définie à peu prés comme au théoréme : pour tout $x \in E, p(x)$ est la borne inférieure des nombres réels $K \geqslant 0$ tel que $x \in KT$. Du fait que T est absorbant, on démontre, comme dans ce théoréme que $p(x) < +\infty$. Du fait que T est convexe équilibré, on a $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, et $p(\lambda x) =| \lambda | p(x)$ pour $\lambda$ scalaire. La seule différence avec la jauge du théoréme cité est qu'elle n'a aucune raison à priori d'étre continue et que T, étant fermé et non ouvert, est l'ensemble des $p(x) \leqslant 1$ et non $< 1$. De toute facon, $p$ est une semi-norme. Sur le sous-espace vectoriel $E_i$ muni de la topologie $\varsigma_i$, T découpe un ensemble$T_i$ qui est un voisinage de $v$ ; donc $p$ est continue sur $E_i$ pour la topologie $\varsigma_i$ ; donc $p$ est semi-norme acceptée, donc est continue sur $E$ pour la topologie limite inductive $\varsigma$. Donc l'ensemble T, semi-noule de $p$, est un voisinage de $O$.
On foreme aisément, avec des limites inductives, des espaces qui ne sont pas de Baire. En voici un qui jouera un role essentiel dans la théoréme de l'intégration. Soit X un espace topologie localement compact. On appelle $\mu(X)$ l'espace des fonctions complexes continues sur X , nulles en dehors de compacts. Autrement dit, un élément de $\mu(X)$ est fonction complexe continue $\phi$ sur X, telle qu'il existe un compact K de X pour lequel $\phi$ soit nulle sur $\complement K$. Pour un compact K de X, appelons $\mu_K(X)$ l'espace des fonctions continues sur X, nulles dans $\complement K$. Par définition, $\mu(X)$ est la réunion des sous-espace $\mu_K(X)$. Mais les $\mu_K(X)$ ont une topologie naturelle, définie par la norme $\|\phi\| = \max_{x \in K} | \phi(x) |$ .
Pour cette topologie $\mu_K(X)$ est un BanachP. Plaçons alors sur $\mu(X)$ la topologie limite inductive des $\mu_K(X)$. Elle parait, au premier abordn peu uitisable et peu visible;

encore une fois, elle joue un role essentiel dans l'intégration. La topologie $\mu(X)$ est plus fine que topologie induite par l'espace $(C'_{cb})$ des fonctions continues bornées ; en effet, la norme de ce dernier, $\|\phi\| = \sup_{x\in X} \mid \phi(x) \mid$ ., induit sur chaque $\mu_K(X)$ sa norme uselle, donc elle est acceptée. Comme $\|\phi\| = 0$ implique $\phi = 0$, $\mu(X)$ est séparé, donc il tonnelé. Notons, sans insister, que la topologie de $\mu_K(X)$ est strictement plus fine que topologie induite par$(C'_{cb})$. Or les $\mu_K(X)$ sont des Banach, donc des espaces de Baire, donc tonnelés, donc la limite inductive des $\mu_K(X)$ est aussi tonnelée. Oren général n'est de Baire. Supposons en effet qu'il existe sur X une suite de compacts $K_n$, telle que tout compact soit contenue dans l'un des $K_n$ ;( par exemple un espace vectoriel de dimension finie pour une norme quelconque), on peut prendre pour les $K_n$ les boules de rayon $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(X)$ est aussi la réunion des $\mu_{K_n}(X)$. Mais $\mu_{K_n}(X)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mu(X)$ (il est déjà fermé dans $\mu(X)$ pour la topologie de la convergence simple $C'$, qui est beaucoup moins fine). Un sous-espace vectoriel fermé distinct de l'espace entier n'a pas d'intérieur (sans quoi, par translation, il serait un voisinage de $O$ , et alors, étant absorbant et invariant par homothétie, serait l'espace entier). Donc $\mu(X)$, réunion dénombrable de fermés sans intérieur, n'est pas de Baire ; mais il est tonnelé.

### 7.4.1 Donnons maintenant les principales propriétés des espace tonnelés.

**Théorème** 7.10: Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels topologique localement convexes, $E$ tonnelé. Soit $\Omega$ un ensemble d'applications linéaires continues de $E$ dans $F$. Si, pour tout $x$ de $E, \Omega(x) = \{(ux);\ u \in \Omega\}$ est borné dans $F$, alors $\Omega$ est équicontinue.

**Démonstration :** Soit $\vartheta$ un voisinage de $O$ dans $F$, que nous pouvons supposer convexe équilibré fermé.
L'ensemble $T = \{x \in E; u(x) \in \vartheta \text{ pour toute } u \in \Omega\}$ est alors convexe équilibré fermé, comme intersection d'ensembles convexes équilibrés fermés. Il est absorbant, prce $\Omega$ est bornée dans $\mathcal{L}_i(E, F)$ ; soit en effet $x \in E; \Omega(x)$ est bornée dans $F$, donc il existe $\lambda > 0$ tel que $\Omega(x) \subset \lambda\vartheta$, donc $x \in \lambda T$. Donc c'est un tonneau, donc un voisinage de $O$ puisque $E$ est tonnelé. Et alors cela si gnifie bien que $\Omega$ est équicontinue à l'origine, donc partout. □

**Corollaire** 7.5: Si$E$ et $F$ sont localement convexes, $E$ est tonnelé, alors dans $\mathcal{L}(E, F)$, il y a identité entre parties bornées pour une quelconque topologie $\mathcal{L}_\sigma(E, F)$ ($\sigma$, famille de parties bornées de $F$ comprenant au moins toutes les parties réduites à un point), et les parties équicontinues.
En effet, toute partie équicontinue est bornée pour toute les topologies $\mathcal{L}_\sigma(E, F)$, et nous voyons maintenant que toute partie bornée pour $\mathcal{L}_i(E, F)$ est équicontinue.

**Corollaire** 7.6: Si $E$ est une espace vectoriel topologique tonnelé, il y a identité, dans le dual $E$, entre partie *-faiblement bornées, bornées pour$E_i$ *-faiblement bornées, et équicontinues.

**Corollaire** 7.7: (Banach-Steinhauss)-Soiet $E$ et $F$ des espaces vectoriels topologiques localement convexes, $E$ est tonnelé, et $u_n n \in \mathbb{N}$, une suite d'applications linéaires continues de $E$ dans $F$, convergeant simplement vers une limite $u$. Alors$u$est linéaire continue, et les $u_n$ convergeant vers $u$ uniformément sur tout compact de $E$. Si les $e_n$ sont des éléments de $E$ ayant une limite $e$ pour $n$ infini, les $u_n(e_n)$ convergeant vers $u(e)$.

## 7.5 *Espace de Montel*

**Définition** 7.5.1: une espace vectoriel topologique $E$ est dit de Montel s'il est tonnelé, et si toute partie bornée est relativement compacte.
Comme l'dhérence d'un partie bornée est encore bornée, il revient au méme de dire que toute partie fermée est bornée compacte. Un espace vectoriel topologique séparé de dimension fine est de Montel ; une espace vectoriel normé de dimension infine ne l' est jamais, en vertu du théorème de Riesz. Mais on verra qu'il existe des espaces importants en analyse, de dimension infine, qui sont de Montel (donc non normables).

**Théorème** 7.11: Soit $E$ une espace Montel. Alors il est réflexif, et son dual fort $E'$ est aussi Montel. Sur toute partie faiblement bornée de $E$ , les topologiques initiale et affaiblie coincident ; sur toute partie *-faiblement bornée de $E$ , les topologiques et *-forte et *-faibl coincident. Toute suite de $E$ , *-faiblement convergeante, est convergeante poure la topologiques initiale ; toute suite de $E'$, *-faiblement convergeante, est *- fortement convergeante.

**Démonstration :** $E$ est évidement semi-réflexif ; car toute partie faiblement fermée et bornée, est relativement compacte puisque $E$ de Montel ; mais elle est fermée, donc compacte, donc faiblement compacte, et on applique le critére de semi-réflexivité de Macky. Mais $E$ est tonnelé, donc il est réflexif. Alors $E'$ est aussi réflexif, donc lui aussi tonnelé la topologique *-faibl de $E'$ est l'affaiblie de l' *- forte. Il reste à voir que tout *- fortement bornée de $E'$ est *- fortement relativement compacte. Mais, les bornées de $E$ étant relativement compacte, la topologique *-fort de $E'$ est aussi la topologique $\overleftarrow{E}'_c$ de la convergence uniforme sur les parties compactes de $E$ ; mais une partie *-fortement bornée de $E'$ est équicontinue, donc relativements compactes dans $E'_c$. Donc $E'$ fort est bien de Montel.
Une partie faiblement bornée B de $E$ , donc bornée par Banach-Macky, et contenue dans un compacte K ; la topologique de K est identique à toute topologique séparée plus faible, donc à sa topologique affaiblie ; donc sur K comme sur B, les topologiques initiale et affaiblie coincident. De méme, sur toute partie *-faiblement bornée de $E'$, les topologiques *- forte et *-faibl coincident. Une suite faiblement convergeante de $E$ est faiblement bornée ; donc elle est aussi convergeante ; et de méme une suite faiblement convergeante de $E'$ est *-fortement convergeante.

**Remarque** 7.3: Du fait que les topologiques initiale et affaiblie d'un Montel $E$ induisent la méme topologique sur les parties bornées et aient les mémes suites convergeantes, il ne faudrait pas déduire qu'elles coincident.

**Exemple** 7.6: Soit $C^m[0,1]$ l'espace vrctoriel des fonctions de slasse $C^m$, c'est-à-dire à dérivées continus jusqu'à l'ordre $m$ inclusivement. On puet le munir de la norme

$$||\Phi||^m = \max_{p\in[0,1], p\leqslant m} \mid D'\Phi(x) \mid,$$

où $D'\Phi$ est la dérivée $p - ime$ de $\Phi$.

**Exemple** 7.7: Tout espace séparé de dimension finie est un espace de Montel. Un espace normé qui est un espace de Montel localement compact, donc de dimension finie.

**Théorème** 7.12: Les espace $C^m[0,1], C^\infty[0,1], \delta^m(\Omega), \delta(\Omega), D^m(\Omega), D(\Omega)$ sont complets et tonnelés. Les espace $C^m[0,1], \delta(\Omega), D(\Omega)$ sont des espaces de Montel.

**Corollaire** 7.8: Les espace $C^m[0,1], \delta(\Omega), D(\Omega)$ sont réflexifs, et leurs duals fort sont des espaces de Montel.
Il suffit d'appliquer. Le dual de $D'(\Omega)$ s'appelle espace des distributions sur $\Omega$

## Exercice

**Exercice** 7.3: Montrer qu'un espace de Banach E dont le dual fort $E'$ est de type dénombrable, et qui est semi-complet pour la topologique affaiblie $\sigma(E,E')$, est réflexif.

**Exercice** 7.4: Montrer qu'il existe dans F des ensembles compacts pour $\sigma(F,G)$ et de dimension infinie. Montrer qu'il existe aussi dans F des ensembles précompacts pour $\sigma(F,G)$ et non relativement compactes.

**Exercice** 7.5: Soient E un espace localement convexe séparé, $E'$ son dual. Montrer que les propsitions suivantes sont équivalentes :

i. E est tonnelé.
ii. toute partie faiblement bornée de $E'$ est équicontinue.
iii. toute partie faiblement bornée de $E'$ est relativement faiblement compacte, et la topologie de E est $\delta(E,E')$.

**Exercice** 7.6: Soient E un espace localement convexe séparé et quasi-copmle, E' son dual.
Montrer que sur E' la topologique de la convergence copmacte est la plus fine des topologiques compactes.

## 7.6 Théorème de Banach-Mackey

**Définition** 7.6.1: E est un espace à barreaux $c_0$ (quasibarrellés $c_0$) si toute suite nulle dans $(E, \sigma(E', E))$ $(E, \beta(E', E))$ est E-équicontinu.
Notez est espace $c_0$ barillet est un espace $c_0$ quasibarrelled.

**Lemme** 7.1: Si $(E, \sigma(E', E))$ est un espace de Banach-Mackey, où $\sigma(E', E)$ désigne la topologique de Mackey, et l'espace à quasibarrellés $c_0$ alors c'est un espace à $c_0$ barils.

**Définition** 7.6.2: étant donné une dual paire $(X, Y, \langle,\rangle)$, une topologique dual sur $X$ est une topologique localement convexe $\tau$ tout pour que $(X, \tau)' \simeq Y)$. Ici $(X, \tau)$désigne le dual continu de et $(X, \tau)' \simeq Y)$ signifie qu'il existe un isomorphisme linéaire

$$\Psi : Y \to (X, \tau)', y \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle).$$

Si une topologique localement convexe $\tau$ sur $X$ n'est pas une topologique dual, alors $\Psi$ n'est pas surjectif ou est mal défini car la fonction linéaire $x \mapsto \langle x, y\rangle$ n'est pas continu sur $X$ pour certains $y$.

**Exemple** 7.8:

- Dans tout espace vectoriel topologique, les ensembles finis sont bornés, en utilisant que l'origine a une base locale d'ensembles absorbants.
- L'ensemble des points d'une suite de Cauchy est bornée, l'ensemble des points d'un filet de Cauchy n'a pas besoin d' étre bornée.
- Chaque ensemble relativement compacte dans un espace vectoriel topologique est borné. Si l'espace est équipé de la topologique faibe, l'inverse est également vrai.

**Théorème** 7.13: Pour tout espace semi-normé séparé $E$ :
Borné dans $E - faible \Leftrightarrow$ Borné dans $E$.

**Démonstration :** Borné dans E $\Rightarrow$ dans E-faible. L'inclusion $E \subseteq$ E-faible cette propriété. (Elle résulta plus directement de la majoration).
Borné dans E-faible $\Rightarrow$ dans E. Soit U un borné dans E-faible.
Le cas où E est normé. La topologique de $E'$ est alors définie par la norme duale :

$$|||e'|||_{E'} = \sup_{e \in E, e \neq 0} \frac{|\langle e', e\rangle|}{||e||_E}.$$

Pour tout $e \in E$, définissons une appliction linéaire $T_e$ de $E'$ dans $\mathbb{R}$ par

$$T_e(e') = \langle e', e\rangle.$$

Comme $\langle e', e\rangle \leqslant |||e'|||_{E'} ||e||_E$, l'application $T_e$ est continue. D'autre part, comme U est borné dans E-faible et comme $\langle e', e\rangle = ||e||_{E-faible;e'}$, on a, pour tout $e' \in E'$,

$$\sup_{e \in U} | T_e(e') |= \sup_{e \in U} ||e||_{E-faible;e'} < \infty.$$

L'espace $E'$ étant de Banach, le théorème de Banach-Steinhauss montre que $T_e : e \in U$ est équicontinu et, plus précisément, qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{e \in U} \mid T_e(e') \mid \leqslant c \|| e' \||_{E'}.$$

Donc, $U$ est borné dans E. □ Le cas général. Revenons au cas où E est semi-normé. Soit $\|.\|_{E;\nu}$ une de ses semi-normés et

$$E/N = \{\widetilde{\nu} : \nu \in E\}, \quad \text{o} \quad \widetilde{\nu} = \{x \in E : \|x - \nu\|_{E;\nu} = 0\}.$$

L'espace quotient de E par le noyau N de $\|.\|_{E;\nu}$, est normé par

$$\| \widetilde{\nu} \|_{E/N} = \|\nu\|_{E;\nu}.$$

Soit $\lambda \in (E/N)'$. D'aprés la caractérisation du dual du théorème, il existe $c \geqslant 0$ tel que $\mid \langle \lambda, . \rangle \mid \leqslant c\|.\|_{E/N}$. On définit une application $\rho$ de E dans $\mathbb{R}$ par :
pour tout $e \in E$

$$\langle \rho, e \rangle = \langle \lambda, \widetilde{e} \rangle.$$

Elle est linéaire car l'application $e \mapsto \widetilde{e}$ est linéaire d'aprés . De plus

$$\mid \langle \rho, e \rangle \mid = \mid \langle \lambda, \widetilde{e} \rangle \mid \leqslant c \| \widetilde{e} \|_{E/N} = c\|e\|_{E/N}$$

donc $\rho \in E'$. En outre,

$$\| \widetilde{e} \|_{E/N-faible;\lambda} = \mid \langle \lambda, \widetilde{e} \rangle \mid = \mid \langle \rho, e \rangle \mid = \|e\|_{E-faible;\rho}.$$

Comme U est borné dans E-faible, il en résulte que

$$\sup_{e \in U} \| \widetilde{e} \|_{E/N-faible;\lambda} = \sup_{e \in U} \|e\|_{E-faible;\rho} < \infty.$$

L'ensemble $\widetilde{U} = \{\widetilde{e} : e \in U\}$ est donc borné dans $E/N - faible$. Comme $E/N$ est normé, le cas d'un tel espace montre que $\widetilde{U}$ est borné dans $E/N$ donc

$$\sup_{e \in U} \|e\|_{E;\nu} = \sup_{\widetilde{e} \in \widetilde{U}} \| \widetilde{e} \|_{E/N} < \infty.$$

Ceci est vrai pour toute semi-norme $\|\|\|_{E,\nu}$ de E, ce qui prouve que U est borné dans E.

**Exemple** 7.9: Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite donnée de nombres complexes. Si pour toute suite $b = (b_n)$ dans $\ell^2$ la strie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge, alors $a$ est aussi dans $\ell^2$ Soit en effet $S_N$ la forme linéaire sur $\ell^2$ définie par

$$S_N(b) = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n.$$

Par hypothese les $S_N$ convergent simplement sur $\ell^2$. D'apris le théoréme de Banach-Steinhaus I existe $M > 0$ tel que $\|S_N\| \leqslant M$ pour tout $N$ (norme d'application linéaire). Comme

$$\|S_N\| = \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\right)^{1/2}$$

(calcul facile) on en déduit $a \in \ell^2$ en faisunt tendre $N$ vers l'infini. Ne pas confondre ce resultat avec le théoréme de Riesz, de Riesz, d'apres lequel toute forme linéaire continue sur $\ell^2$ s'écrit $b \mapsto \sum a_n b_n$ avec $(a_n) \in \ell^2$ 1 Iri la contimuité de $b \mapsto \sum a_n b_n$ n'était pas supposée a priori.

**Corollaire** 7.9: Soit $E$ un espace de Banach et $F$ un espace vectoriel normé. On suppose que pour tout $nT_n$ est un opérateur linéaire de $E$ dans $F$ et que pour tout $x \in ET_nx \to Tx$. Alors $T$ est un opérateur continu de $E$ dans $F$.

**Proposition** 7.5: La linéarité de $T$ est facile, pour le reste il suffit de remarquer qu'une suite convergente est bornée et d'appliquer le principe de la borne uniforme.

**Remarque** 7.4: il n'est pas pas vrai que $T_n$ tende nécessairement vers $T$ en norme d'opérateur. Par exemple, si $E$ est un espace Hilbertien dont $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base, $T_n(x) = \langle x, e_n\rangle$ tend vers 0 pour tout $x$, mais $\|T_n\| = 1$ pour tout $n$.

## Exercice

**Exercice** 7.7: Soient $X$ un espace de Baire non vide et $\mathcal{F}$ une famille d'applications continues de $X$ dans $\mathbb{K}$ tolle que pour tout $x \in X$, il existe une constante $K_x > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $|f(x)| \leqslant K_x$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ et qu'il existe un ouvert non vide $U$ dans $X$ tels que pour tout $x \in U$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$ on ait $|f(x)| \leqslant K$.

**Solution :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = \{x \in X; |f(x)| \leqslant n \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}\}$. Alors $F_n$ est fermé dans $X$ et on a $\underset{n\geqslant 1}{\cup} F_n = X$. Comme $X$ cst un espace de Baire, alors il existe $\geqslant 1$ tel que $\hat{F}_n \neq \emptyset$, Soit $U = F_n$, alors $U$ est un ouvert non vide de $X$ et pour tout $f \in \overline{\mathcal{F}}$, on a $|f(x)| \leqslant n$.

**Exercice** 7.8: Montrer que tout ouvert (non vide) $\Omega$ d'un espace de Baire $X$ est encore un espace de Baire ( $x$ i $(\Omega_n)_{n>1}$ est whe suite d'oute d'ounerts denses dans $\Omega$, considerer le complementaire $\Omega$ de l'adhérence de $\Omega$, i.e. son exterieur, et $\pi'_n = \pi' \cup \Omega_n$; remaryuer We e'est une suite d'owerts denees de X $X$.

**Solution :** Posons $\mathbf{\Omega}' = X \backslash \bar{\Omega}$ et $\Omega'_n = \Omega' \cup \Omega_n$. Les $\Omega_n$ etant ouverts dans l'ouvert $\Omega$ sont ouverts dans $X$. Comme $\Omega'$ est lui-meme ouvert dans $X$, les $\Omega'_n$ sont aussi oussi oussi oussi oussi ouverts dans $X$. De plus, pour les adherences dans $X$, on a $\bar{\Omega}^2_n = \overline{\Omega'} \cup \overline{\Omega_n}$. Comme $\Omega_n$ est dense dans $\Omega$, son adherence dans $X$ contient $\Omega$, et donc $\bar{\Omega}$. Par ailleurs,

$\bar{\Omega}'$ contient $\Omega' = X \backslash \bar{\Omega}$; donc $\bar{\Omega}'_n \supseteq (X \backslash \bar{\Omega}) \cup \bar{\Omega} = X$, c'est-a-dire que $\mathcal{N}_n$ est dense dans $X$. Comme $X$ est un espace de Baire, $\Omega'_n$ est dense dans $X$. Cela entraine que $\Omega \cap \left( \bigcap_{n \geqslant 1} \Omega'_n \right)$ est dense dans $\Omega$. Comme $\cap_{n \geqslant 1} \widehat{\Omega \cap} \left( \cap_{n > 1} \Omega'_n \right) = \bigcap_{n > 1} \Omega_n$, car $\Omega \cap (X \backslash \bar{n}) = \theta$, on en deduit que $\Omega$ est un espace de Baire.

**Exercice** 7.9: Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base alEtbrique denombrable (raisonner par l'absurde $i$ si $(e_n)_{\text{that}}$ cat une dase algedñrique, utiliser le Theorkme de Baire avec $F_n = \text{ vect } \{e_1, \cdots, e_n\})$.

**Solution :** Dire que $(e_n)_{n \geqslant 1}$ est une base algebrique de $E$ signifie que $E = U_{n \geqslant 1} F_n$. Le sous-espace $F_n$ etant de dimension finie, il est ferme. Comme $E$ est complet, le Theoreme de Baire assure qu'au moins un des $F_n$ est d'interieur non vide. Mais le seul sous-espace $F$ d'interieur non vide est $E$ lui-méme (si la boule de centre $x_0$ et de rayon $r > 0$ est contenue dans $F$, celle de centre 0 et de rayon $r$ et aussi contenue dans $F$, par translation ; par homothetie, tout vecteur de $E$ est dans $F$ ). Donc $E = F_N$ pour un certain $N \geqslant 1$ et dim $E = N$, contrairement à l'hypothèse.

**Exercice** 7.10: Soit $f$ une application lineaire continue d'un Banach $X$ dans lui même telle que : $\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) = 0$. Montrer que $f$ est nilpotente i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N}, f^N = 0.$$

**Solution :** On a

$$X = \bigcup_{n \geqslant 1} \operatorname{Ker} f^n$$

Comme $X$ est d'intérieur non-vide, il existe $N$ tel que Ker $f^N$, est d'intérieur non-vide, or un sous-espace vectoriel qui contient une boule contient tout l'espace, donc Ker $f^N = X$ et $f^N = 0$.

**Exercice** 7.11: Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x$, la suite $(f(nx))_{n \geqslant 1}$ est de limite nulle. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $u, v, n \in \mathbb{N}$ avec $u < v$ tels que

$$\forall x \in [u, v] \quad \forall m \in [n, +\infty[ \cap \mathbb{N}; |f(mx)| \leqslant \varepsilon.$$

En déduire que $f$ est de limite nulle. Et si $f$ n'est pas continue ?

**Solution :** On a

$$\mathrm{R}_+ = \bigcup_{n \geqslant 1} \cap_{m \geqslant n} \{x \in \mathbb{R}_+; |f(mx)| \leqslant \varepsilon\}.$$

D'apres le théorème de Baire, il existe $n$ tel que le fermé

$$\bigcap_{m \geqslant n} \{x \in \mathbb{R}_+; |f(mx)| \leqslant \varepsilon\}$$

est d'intérieur non-vide, ce qui signifie qu'il contient un ensemble $[u, v]$ avec $u < v$. On a donc

$$\{y \in \mathbb{R}; |f(y)| \leqslant \varepsilon\} \supset \bigcup_{m \geqslant n} [mu, mv].$$

Il suffit donc de démontrer que cet ensemble est un voisinage de l'infini. Pour cela, il suffit encore de montrer qu'il existe $N$ tel que $(m+1)u < mv$ pour tout $m \geqslant N$. Ce dernier résultat est facile, en divisant les deux membres par $m$.

**Exercice** 7.12: Autour du théorème de Baire :
1) Montrer qu'un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable n'est pas complet.
2) On pourra admettre dans cette question que dans l'espace métrique $]0,+\infty[$, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Soit une application continue $f : ]0,+\infty[ \to \mathrm{R}$ telle que $\forall x > 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3) Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des nombres rationnels. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $U_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} \left] q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right[$. Montrer que $U = \cap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}\cap]0,1[} U_\varepsilon$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$, et qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

**Solution :** 1) Soit $E$ un espace vectoriel normé admettant une base algébrique dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons

$$F_n = \mathrm{Vect}\,(e_0, \ldots, e_n)\,.$$

Comme $F_n$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, il est complet, et donc en particulier fermé dans $E$. De plus, il est d'intérieur vide; en effet, supposons par l'absurde que $B\,(x_0, r) \subset F_n$ alors on a aussi $B(0, r) \subset F_n$ (car $F_n$) est stable par addition), et donc, si $x \in E\backslash\{0\}$, on a .

$$\frac{r}{2}\frac{x}{||x||} \in F_n$$

d'où l'on tire que $x \in F_n$ (car $F_n$ est stable par multiplication scalaire) puis que $E \subset F_n$ ce qui contredit que $E$ est de dimension infinension infinie. Ainsi, $F_n$ est fermé d'intérieur vide. De plus, comme $(e_n)$ est une base algébrique de $E$, on a donc $E = UF_n$. Si $E$ était complet, le théorème de Baire donnerait que cette réunion (et donc $E$ ) serait d'intérieur vide, ce qui est absurde. Finalement, $E$ n'est pas complet. (En particulier, il n'existe aucune sur $\mathbb{R}[X]$ qui le rende complet).

2) Fixons $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \geqslant 1$, posons

$$F_n = \{x > 0 | \forall p \geqslant n, |f(px)| \leqslant \varepsilon\} = \bigcap_{p\geqslant n} \{x > 0, \quad f(px)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Comme $x \mapsto |f(px)|$ est continue, on voit que $F_n$ est un fermé de $\mathbb{R}_+^*$ en tant qu'intersection de fermés. De plus, comme $(f(nx))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 pour tout $x$, on a $]0,+\infty[= \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$. Comme $[0,+\infty[$ possede la propriété de Baire, on en déduit qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que $F_N$ est d'intérieur non vide. Donc $F_N$ contient un intervalle ouvert $]a, b[$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in ]a, b[, \forall n \geqslant N, \quad |f(nx)| \leqslant \varepsilon.$$

Choisissons un entier $P > \max\left(N, \frac{a}{b-a}\right)$. Alors

$$]Pa, +\infty[ \subset \cup_{p>P} ]Pa, pb[.$$

En effet, si $y > Pa$, alors $y/a > P$ donc $p := \lfloor y/a \rfloor$ est $\geqslant P$. On a alors, par définition de la partie entiere

$$p \leqslant \frac{y}{a} < p + 1$$

d'où
$$pa \leqslant y < pa + a$$
Or $p > \frac{a}{b-a}$ donne que $pa + a < pb$. Donc $[pa \leqslant y < pb]$ Ainsi, si $y > pa$, on a bien $y \in ]\rho a, pb[$ avec $p \geqslant P$. Et si $y = pa$, alors$p = \frac{y}{a} > P$ et donc en posant $q = p - 1$ ,on a$q \geqslant P$ et $y \in ]qa, qb[$ car $(.y = pa = qa + a < qb)$ car on a $q \geqslant P > \frac{a}{b-a}$ Ainsi, quel que soit $y > Pa,$ il existe $p \geqslant P$ tel que $\frac{4}{\rho} \in \Big] a, b[$, et donc* avec ce qui précède,
$$|f(y)| = \left| f\left(p\frac{y}{p}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$
Finalement, on a bien prouvé que $f$ admettait 0 pour limite en $+\infty$.

3) Il est clair que $U_\varepsilon$ est un ouvert comme réunion d'ouverts. De plus $U_\varepsilon$ est dense car il contient Q. Ainsi, $U$ est un $G_\mathcal{S}$ -dense de $\mathbb{R}$. De plus, comme $U_\varepsilon$ décroît vers $U$, la propriété de continuité monotone de la mesure assure que $\lambda(U) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda\left(U_\varepsilon\right)$.
Or
$$\lambda\left(U_\varepsilon\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(]q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = 4\varepsilon$$
et donc $\lambda(U) = 0$. Finalement, $U$ est bien un $G_\mathcal{S}$ -dense de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle.

**Exercice** 7.13: Un espace métrique non complet qui n'est pas de Baire L'objectif de cet exercice est de montrer que $E = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$ n'est pas un espace de Baire.
1) Montrer que la boule unité fermée pour la norme infinie, notée $B$ est un fermé de $E$.
2) On suppose que $E$ est un espace de Baire. Montrer alors qu'il exite $r > 0$ tel que $B_{\|-\|_1}(0, r) \subset B$.
3) En déduire qu'il existe une constante $K$ telle que $\|\cdot\|_\infty \leqslant K\|\cdot\|_1$. Conclure.

**Solution :** 1) Soit $(f_n)$ une suite de $B$ qui converge vers une fonction $f \in E$ pour la norme $\|.\|$. S'il existe $a \in [0,1]$ tel que $|f(a)| > 1$ alors par continuité, il existe un voisinage $]a - \eta, a + \eta[$ avec $\eta \in ]0, [1$ tel que $\forall x \in [0,1] \cap ]a - \eta, a + \eta[, |f(x)| > 1 + \delta$. Mais alors on aurait
$$\int_0^1 \left|f_n - f\right|(x)dx \geqslant \eta\delta$$
car $\left\|f_n\right\|_\infty \leqslant 1$. Cela contredit le fait que $\left\|f_n - f\right\|_1 \to 0$. Ainsi, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et $B$ est fermée dans $E$.
2) Si $E$ était un espace de Baire. Comme $E = \cup_{n\geqslant 1} nB$ avec $nB$ fermé, le théorème de Baire fournirait alors $n_0$ tel que $n_0B$ est d'intérieur non vide, et donc $B$ d'intérieur non vide. Si $g \in B$ il existe alors $r > 0$ tel que $B(g, r) \subset B$ on parle ici de la boule pour le norme $\|.\|_1$. Or, $B$ est symétrique par rapport à 0. Donc $-B(g, r) = B(-g, r) \subset B$. De plus, $B$ est convexe, donc $\frac{1}{2}(B(g, r) + B(-g, r)) \subset B$. En remarquant que $B(0, r) \subset \frac{1}{2}(B(g, r) + B(-g, r)) \subset B$ .

3) Soit alors $f \in E, f \neq 0$. Alors $\frac{rf}{2\|f\|_1} \in B(0,r) \subset B$. Donc $\left\|\frac{rf}{2\|f\,\mathrm{l}n}\right\|_\infty \leqslant 1$, soit $\|f\|_\infty \leqslant \frac{2}{r}\|f\|_1$
Cette inégalité est contredite par la suite de fonctions

$$f_n : [0,1] \to [0,1], x \mapsto x^n$$

En effet, $\left\|f_n\right\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ mais $\left\|f_n\right\|_\infty = 1$ d'où la contradiction. Ainsi $E$ n'est pas de Baire.

**Exercice** 7.14: Pour tout espace semi-normé séparé E, montrer

(a) $(E - faible)' \equiv E'$.

(b) $E - faible - faible \equiv E - faible$.

**Solution :**

(a) Comme $E \subseteq E - faible$, on a :

$$(E - faible)' = \mathcal{L}(E - faible; \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(E; \mathbb{R}) = E'$$

Réciproquement, comme la continuité faible et $\mathbb{R} - faible$ et est topologiquement égal à $\mathbb{R}$,on a :

$$E' = \mathcal{L}(E; \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(E - faible; \mathbb{R} - faible) = \mathcal{L}(E - faible; \mathbb{R}) = (E - faible)'.$$

Donc, (E-faible)'=E'.
En outre, leurs familles des semi-normés sont identiques car elles sont respectivement indexées par les bornés de E-faible etE, que concident d'aprés le théorème de Banach-Mackey.

(b) Par définition, E-faible-faible l'espace vectoriel E-faible, c'est-à-dire E, muni des semi-normés $\|e\|_{E-faible-faible,e'} =| \langle e', e\rangle |$ indexées par $e' \in (E - faible)'$, c'est-à-dire par $e' \in E'$ d'aprés (a). Sa famille de semi-normés est donc identique à celle de E-faible.

# Bibliographie


[1] A. V. Arkhangelskii, *Topological Function spaces,* Klewer Acad. Publishers (1992).

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale, éléments de mathématique,* Springer Verlag, Hermann, (1965).

[3] N. Bourbaki, *éléments de mathématique,* Masson.Paris, (1981).

[4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications,* Masson (1983).

[5] N. H. Hassan, *Topologie général et espace normés,* Dunod,2011.

[6] S. Gonnord et N. Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses (1996)

[7] D. Lehmann, *Initiation µa la topologie générale,* Collection Mathématiques pour le Second Cycle, Ellipses (2004)

[8] J.L. Kelley, *General Topology,* Van Nostrand (1955).

[9] N .El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés,* Dunod, Paris, (2011).

[10] C. Tisseron, *Notions de Topologie. Introduction aux espaces fonctionnels.* Hermann (1985).