

Thermodynamique Appliquée

CHAPITRE 02 Les gaz parfaits, Transformations et 1er principe de la Thermodynamique

2.1 Gaz parfaits	17
2.2 Les équations d'état des gaz parfaits	18
2.3 Equation d'état des gaz parfaits	18
2.4 Représentations graphiques de l'équation de Clapeyron	19
2.6 Gaz réels	20
2.7 Le premier principe de la thermodynamique	20
2.8 Le calcul d'une transformation thermodynamique	21
2.9 Les transformations thermodynamiques de base	24
2.9.1 Transformation Isochore	24
2.9.2 Transformation Isobare	25
2.9.3 Transformation Isotherme	27
2.9.4 Transformation adiabatique	28
2.9.5 Tableau récapitulatif des équations de transformations	33
Exercices corrigés	34

Les gaz parfaits, Transformations Et 1er principe de la Thermodynamique

Le gaz parfait est un modèle mathématique qui permet de prévoir les propriétés (énergie interne, enthalpie) d'un gaz simplement en fonction de sa température. Par approximation, l'air est un gaz parfait.

2.1. Gaz parfaits

Un gaz parfait est un gaz dont les molécules n'ont aucune action mutuelle. Lorsque l'on fait croître le volume occupé par le gaz, la pression du gaz décroît tandis que les interactions entre molécules diminuent. Sous certaines conditions, un gaz réel peut être considéré comme un gaz parfait, par exemple : sous une très faible pression ou sous haute température. Sous les hypothèses citées ci-dessus, nous abordons l'étude des fluides moteurs (constituants les systèmes thermiques) comme étant des gaz parfaits.

L'étude des gaz nécessite de rappeler les variables d'état suivantes :

Le volume massique du gaz :

$$v = \frac{V}{m} \text{ [m}^3\text{/kg]}$$

La masse volumique (masse spécifique) du gaz :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1}{v} \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

La pression :

$$P = \frac{F}{A} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

La température :

La température T est un paramètre qui caractérise l'état thermique du gaz, c.à.d. son degré d'agitation thermique.

2.2. Les équations d'état des gaz parfaits

Tous les gaz à des pressions suffisamment basses et des températures élevées (faible densité) sont considérés des gaz parfaits et obéissent à trois lois : **Boyle**, **Charles**, et **Gay-Lussac**.

1° La loi de Boyle-Mariotte : le volume occupé par une certaine masse de gaz, maintenue à température constante ($T=C_{te}$), varie inversement avec la pression qu'elle subit, ou bien :

$$P_1V_1 = P_2V_2 = P_3V_3 = C^{te} \tag{2.1}$$

La valeur de la constante dépend de la nature du gaz.

2° La loi de Charles : la pression d'un gaz varie directement avec la température lorsque le volume est maintenu constant ($V=C_{te}$).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (2.2)$$

Echauffement ou refroidissement à volume constant ($V=C_{te}$) :

3° La loi de Gay-Lussac :

Le volume d'un gaz varie directement avec la température lorsque la pression est maintenue constante ($P=C_{te}$), où

Echauffement ou refroidissement à pression constante ($P=C_{te}$):

$$V_1 = \frac{mrT_1}{P_1} = \frac{mrT_2}{P_2} = V_2 \quad (2.3)$$

Cela permet d'écrire :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (2.4)$$

2.3. Equation d'état des gaz parfaits

En combinant les lois de Boyle-Mariotte (2.1) et de Charles (2.4), la relation suivante est obtenue :

$$\frac{PV}{T} = C_{te} \quad (2.5)$$

La constante dans l'équation précédente est dite constante universelle des gaz parfaits est désignée par R , c'est une propriété liée à la masse molaire (M) en $[kg/kmole]$ du gaz et la constante des gaz (r) suivant la formule :

$$R = \frac{r}{M} = 8.32 \left[\frac{J}{Mole \cdot ^\circ K} \right] \quad (2.7)$$

Avec : $r = C_p - C_v$ en $\left[\frac{J}{kg \cdot ^\circ K} \right]$ dite *relation de Mayer*.

Cette équation est dite aussi équation de Clapeyron, elle est valide pour une mole du gaz, pour n moles, elle devient :

$$PV = nRT \quad (2.8)$$

2.4. Représentations graphiques de l'équation de Clapeyron

L'équation d'état (2.8) comporte trois variables, c'est pourquoi elle ne peut être représentée dans l'espace que par une surface caractéristique du gaz parfait dans l'espace P.V.T dont chaque point figure un état du gaz. Les diagrammes les plus utilisées sont (P-V) donnant les courbes des isothermes, voir (figure 2.1.).

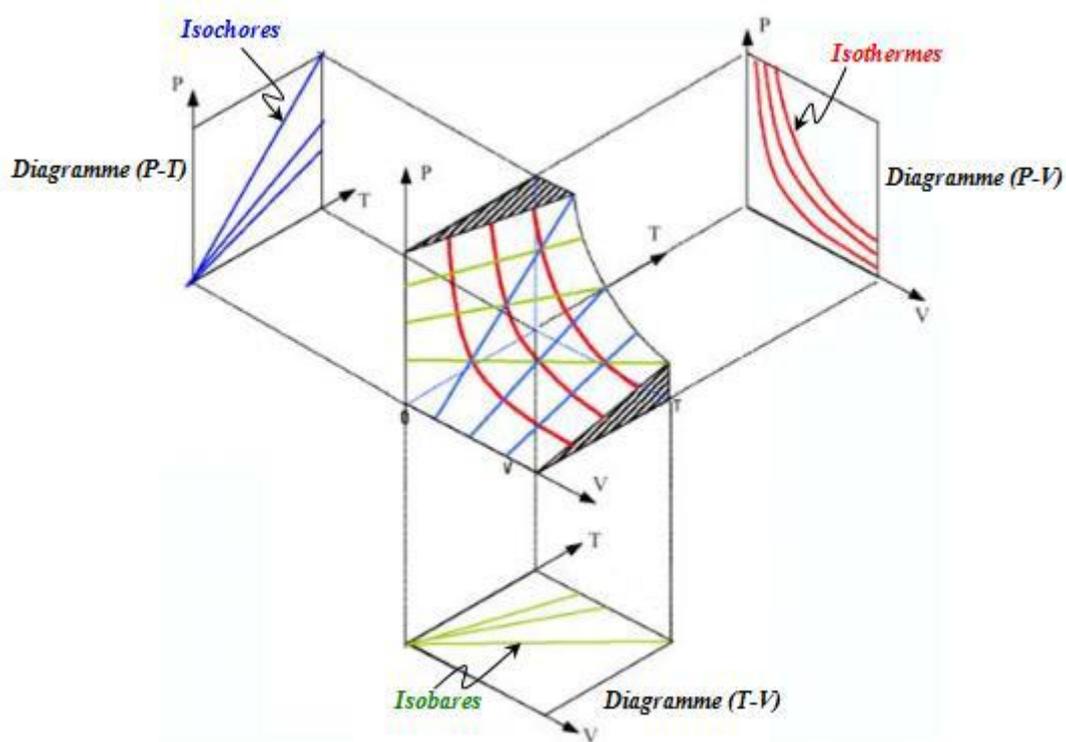


Figure 2.1. Les différents diagrammes de Clapeyron

Exemple 2-1.

Une masse de 2 kg de gaz dont la constante est $R = 100 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ est contenue dans un réservoir de 200 L à pression de 3 bar. Quelle est sa température ?

Nous partons de l'équation 4/2 pour exprimer la température : $T = \frac{p V}{m R} = \frac{3 \cdot 10^5 \times 0,2}{2 \times 100} = 300 \text{ K} = 26,85 \text{ }^\circ\text{C}$.

👍 Admirable Émile ! La simplicité de ce calcul nous manquera au chapitre prochain.

👍 La seule épine dans cette équation concerne les unités, qu'il faut bien convertir en SI : 200 L = 0,2 m³ et 3 bar = 3 · 10⁵ Pa. La température est toujours en kelvins.

Exemple 2-2.

L'air atmosphérique peut être modélisé par un gaz parfait avec $R_{\text{air}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Aux conditions ambiantes (1 bar, 20 °C), quels sont le volume spécifique et la masse volumique de l'atmosphère ?

Nous partons de l'équation 4/1 pour exprimer le volume spécifique : $v = \frac{R T}{p} = \frac{287 \times (20 + 273,15)}{1 \cdot 10^5} = 0,841 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$. La masse volumique suit simplement : $\rho = \frac{1}{v} = 1,189 \text{ kg m}^{-3}$.

☞ Là encore, une erreur dans les unités de température serait fatale (on s'en convaincra en prenant $T = 0 \text{ °C}$).

☞ Dans un mètre cube nous n'avons que 1,2 kg d'air. C'est très peu, surtout si l'on compare à l'eau liquide (1 000 kg pour le même volume). Les machines à air fonctionnent usuellement avec des débits volumiques importants.

4.5. Propriétés des gaz parfaits**4.5.1 Deux capacités calorifiques importantes**

Nous avons déjà abordé la notion de capacité calorifique (ou « chaleur massique »), au premier chapitre (1.31). Elle se définit comme la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter d'un Kelvin 1 la température d'un kilo du corps. On a ainsi :

Comme la température d'un gaz varie aussi lorsqu'il reçoit ou fournit du travail, il existe une infinité de façons de faire varier sa température d'un degré, en combinant chaleur et travail (figure 2.2). Chacune nécessite une quantité de chaleur unique ; il y a donc une infinité de chaleurs massiques correspondantes.

Parmi celles-ci, deux valeurs particulières (figure 2.3) nous servent de référence pour décrire le comportement d'un gaz parfait :

- La chaleur massique à volume constant : c_v ;
- La chaleur massique à pression constante : c_p .

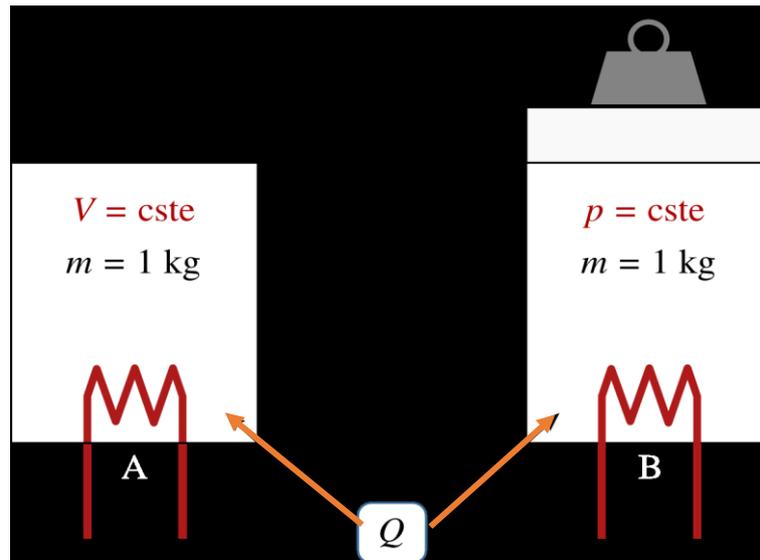


Figure 2.2 – Deux quantités identiques de gaz reçoivent la même quantité de chaleur Q . L'élévation de température sera plus faible à droite à cause du travail effectué sur le piston.

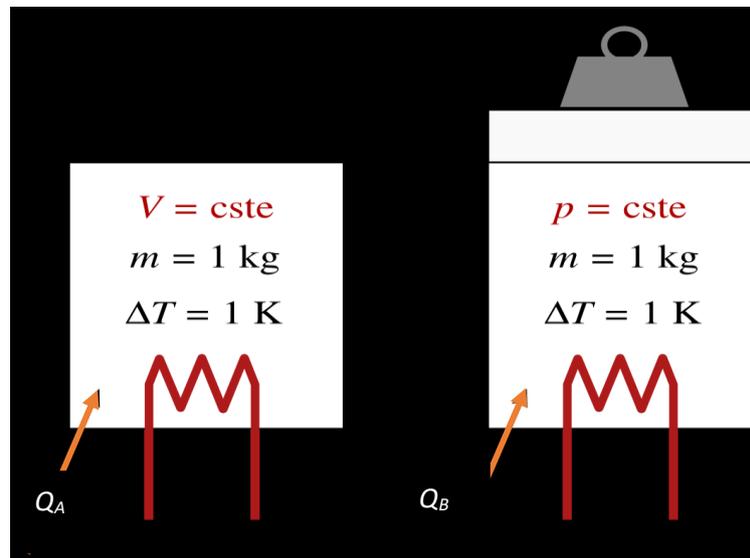


Figure 2.3– Définitions des chaleurs massiques. À gauche, le volume est fixé et la capacité calorifique massique sera c_v . À droite, la pression est constante et la capacité sera c_p .

4.5.2 Différence des chaleurs massiques

Quelle est la différence entre les chaleurs massiques de chacun des gaz ? Dans chacun des deux cas, nous avons $q_{1-2} + w_{1-2} = \Delta u$ (2/2). Pour le corps A à gauche, comme aucun travail n'est effectué et que l'évolution est à volume constant, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} q_A = c_v \Delta T \\ \Delta u = q_A \end{cases}$$

Pour le corps B à droite, comme la pression p_{cste} est constante, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} q_B = c_p \Delta T \\ \Delta u = q_B + (-p_{\text{cste}} \Delta v) \end{cases}$$

En combinant les deux systèmes 4/5 et 4/6¹, nous obtenons

$$c_v \Delta T = c_p \Delta T - p_{\text{cste}} \Delta v$$

qui stipule simplement que la différence entre les deux chaleurs fournies est retrouvée dans le travail fourni par le gaz de droite.

Une brève manipulation amène :

$$\begin{aligned} (c_p - c_v) \Delta T &= p_{\text{cste}} \Delta v \\ (c_p - c_v) &= \frac{p v_2 - p v_1}{\Delta T} = \frac{R T_2 - R T_1}{\Delta T} = \frac{R \Delta T}{\Delta T} \\ c_p - c_v &= R \end{aligned}$$

Cette expression a pour seul intérêt de nous permettre de simplifier l'équation 4/13 que nous allons écrire plus bas.

4.5.3 Quotient des chaleurs massiques

Le ratio des chaleurs massiques à pression et à volume constants est nommé. Ainsi :

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$$

En retournant à la figure 2.3 il apparaît rapidement que c_p doit être supérieur à c_v ; ainsi est toujours supérieur à 1. Nous retenons air = 1,4.

2.6. Gaz réels

Dans les gaz réels les forces d'interaction intermoléculaires et les volumes mêmes des molécules ne sont pas négligeables. Dans ce cas l'interdépendance des variables d'état assurée par l'équation d'état $f(P, V, T) = 0$ à une forme plus compliquée.

Plusieurs autres équations d'état peuvent être utilisées pour correspondre aux gaz réels sur une plus grande plage de propriétés.

Ainsi, l'équation résultante est dite équation de **Van der Waals**.

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT \quad (2.9)$$

Cette équation a l'intérêt de tenir compte de deux facteurs ignorés dans l'équation d'état (2.5) : la force d'attraction entre les molécules (le terme $(a/v)^2$, qui devient partie de l'expression de la pression) et le volume occupé par les molécules elles-mêmes (le terme b qui se retranche au volume disponible).

Les valeurs numériques de a et b sont caractéristiques d'un gaz donné peuvent être calculées par les relations suivantes :

$$a = \frac{27.R^2.T_G^2}{64.P_G} \quad \text{Et} \quad b = \frac{R.T_G}{8.P_G} \quad (2.10)$$

Malgré les difficultés inhérentes à la quantification des termes a et b , ces modifications ont considérablement étendu la plage d'application des équations d'état. Elles ont valu à leur auteur, **Johannes Diderik van der Waals**, le prix Nobel de physique en 1910.

La recherche de modèles mathématiques pour décrire l'état des gaz réels est un thème important de recherche en mécanique des fluides. L'étudiant/e curieux/se pourra consulter les équations d'état de **Beattie-Bridgeman**, de **Benedict-Webb-Rubin** ou encore de **Strobridge** pour se faire un aperçu de la complexité croissante de cette branche. Nous resterons quant à nous à l'équation (2.5).

2.7. Le premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique ce n'est rien d'autre que l'application du principe de la conservation d'énergie. Le premier principe de la thermodynamique définit la variation de l'énergie interne (ΔU) d'un système comme étant égale à la différence de quantité de chaleur (Q) échangée par le système et le travail (W) fourni ou reçu par le système.

Considérons un système fermé où il n'y a pas transfert de masse entrant dans ou sortant du système, et la masse du fluide reste constante. Pour un tel système, le 1^{er} principe de la thermodynamique se résume comme suit :

$$\Delta U = Q - W \quad (2.11)$$

Ce principe repose sur l'usage des concepts de l'énergie interne (ΔU), la chaleur (Q) et le travail du système (W).

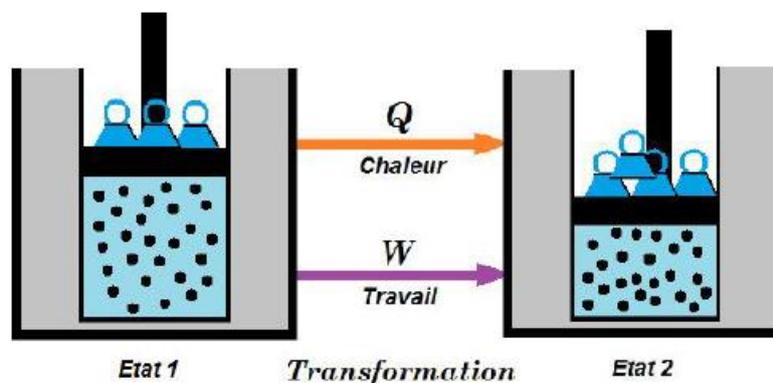


Figure 2.4– Variation de l'énergie interne d'un système thermodynamique.

Ce résultat exprime simplement la conservation de l'énergie d'un système fermé, constitue le premier principe de la thermodynamique. Il exprime le fait que l'énergie interne permet, outre un dégagement de chaleur, la production de travail. C'est le principe qui est à l'origine des moteurs thermiques.

2. 8. Le calcul d'une transformation thermodynamique

Le calcul d'une transformation thermodynamique consiste à :

- Déterminer les paramètres du système au début et à la fin de la transformation ;
- Déterminer les variations des variables et des fonctions d'état au cours de la transformation ;
- Déterminer les quantités de la chaleur et du travail mis en jeu entre le système et son milieu extérieur lors de la transformation.

Dans ce sens, l'étude des transformations se déroule de la manière suivante :

1° Selon les conditions et sur la base de l'équation de Clapeyron, on obtient les **équations de transformations**, sous la forme : $P=f(V)$; $T=F(V)$; $T=f(P)$; $V=f(T)$

2° Sur la base de l'équation de la transformation, on peut établir les valeurs **des variables d'état** au début (P_1, V_1, T_1) et à la fin (P_2, V_2, T_2) de la transformation.

3° Evaluation des quantités de **Chaleur Q** et du **travail W** par leurs relations respectives :

$$Q = \int_1^2 C.dT \quad (2.12)$$

$$W = \int_1^2 P.dV \quad (2.13)$$

4° Calcul des variations sur les fonctions d'état :

a) **Energie interne :**

$$\Delta U = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1) \quad (2.14)$$

b) **Enthalpie :**

$$\Delta H = H_2 - H_1 = C_P(T_2 - T_1) \quad (2.15)$$

c) **Entropie**

Lorsqu'elle ne dépend que des deux états : initial et final de la transformation, elle est donnée par :

$$\Delta S = S_2 - S_1 \quad (2.16)$$

Sinon, la variation de l'entropie est fonction de T et de V , du 1^{er} principe, on a :

$$dU = T.dS - P.dV \quad (2.17)$$

D'ou,

$$dS = \frac{dU + PdV}{T} \quad (2.18)$$

Avec : $dU = C_V dT$ il vient donc ;

$$dS = C_V \cdot \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} \cdot dV \quad (2.19)$$

Selon l'équation d'état des gaz parfaits,

$$\frac{P}{T} = \frac{r}{V} \quad (2.20)$$

On obtient alors,

$$dS = C_V \cdot \frac{dT}{T} + r \cdot \frac{dV}{V} \quad (2.21)$$

$$\Delta S = \int_1^2 dS = C_V \int_1^2 \frac{dT}{T} + r \int_1^2 \frac{dV}{V} \quad (2.22)$$

Donc,

$$\Delta S = C_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + r \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.23)$$

On peut réécrire l'expression de l'entropie en fonction de variables T et P comme suit :

$$PV = rT \quad (2.24)$$

Et :

$$P.dV + V.dP = r.dT \quad (2.25)$$

On peut écrire :

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} \quad (2.26)$$

Et d'après la relation de l'entropie ci-dessus, on a :

$$dS = C_V \cdot \frac{dT}{T} + r \left(\frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right) = (C_V + r) \cdot \frac{dT}{T} - r \cdot \frac{dP}{P} \quad (2.27)$$

Où :

$$\Delta S = C_P \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - r \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (2.28)$$

ΔS , peut aussi être exprimé en fonction de P et V . Des deux formules précédentes, il vient :

$$dS = C_V \left(\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} \right) + r \cdot \frac{dV}{V} \quad (2.29)$$

$$dS = C_V \cdot \frac{dP}{P} + (C_V + r) \cdot \frac{dV}{V} \quad (2.30)$$

$$dS = C_V \frac{dP}{P} + C_P \cdot \frac{dV}{V} \quad (2.31)$$

Après intégration,

$$\Delta S = C_P \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (2.32)$$

2.9. Les transformations thermodynamiques de base

1. Transformation Isochore ($V=Cte$)
2. Transformation Isobare ($P=Cte$)
3. Transformation Isotherme ($T=Cte$)
4. Transformation Adiabatique (Isentrope) ($Q=0$ et $S=Cte$)

2.9.1. Transformation Isochore ($V=Cte$)

En vertu de l'équation des gaz parfaits :

$$PV = rT \quad (2.33)$$

a) L'équation relative à une transformation isochore ($V=Cte$) : peut être déduite de la sorte :

$$P = \frac{r}{V}T = CT \quad (2.34)$$

Avec, C : c'est une constante, où :

$$C = \frac{P}{T} \quad (2.35)$$

D'où entre deux états d'équilibre (1) et (2) d'une transformation isochore, on a :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{Loi de Charles}) \quad (2.36)$$

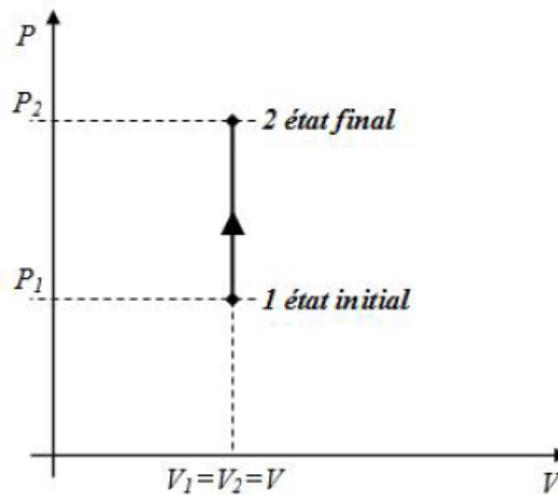


Figure 2. 3. Représentation graphique d'une transformation isochore.

b) Travail extérieur :

Puisque $V=Cte$, $dV=0$ et par conséquent :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV = 0 \quad (2.37)$$

c) Quantité de chaleur :

$$Q_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1) \quad (2.38)$$

d) Energie interne :

D'après le 1^{er} principe, on a : $\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} + W_{1-2}$

Avec, $W_{1-2} = 0$

$$\text{Donc : } \Delta U_{1-2} = Q_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1) \quad (2.39)$$

Il est clair que pour une transformation isochore, la quantité de chaleur accompagnant la transformation représente la variation en énergie interne du système.

e) Enthalpie :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_P.(T_2 - T_1) \quad (2.40)$$

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = C_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.41)$$

2.9.2. Transformation Isobare ($P=Cte$)

En vertu de l'équation des gaz parfaits :

$$PV = r.T \quad (2.42)$$

a) L'équation relative à une transformation isobare ($P=Cte$) : peut être déduite de la sorte :

$$V = \frac{r}{P} T = C.T \quad (2.43)$$

Avec, C : c'est une constante, où :

$$C = \frac{V}{T}$$

D'où entre deux états d'équilibre (1 et 2) d'une transformation isobare, on a:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{Où} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (\text{Loi de Gay-Lussac}) \quad (2.44)$$

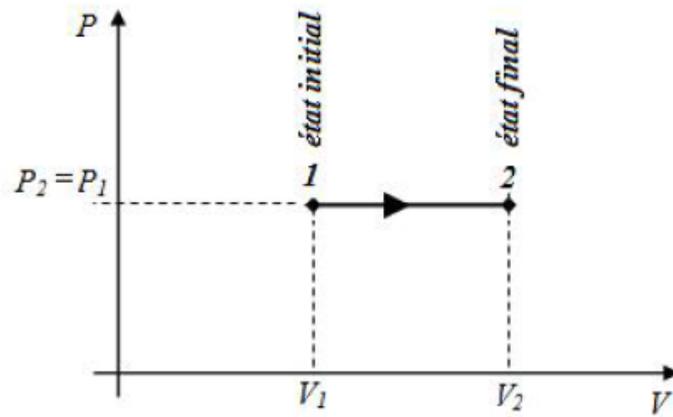


Figure 2. 4. Représentation graphique d'une transformation isobare.

b) Travail extérieur :

Puisque $P = \text{Cte}$, on a :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV = P(V_2 - V_1) \quad (2.45)$$

W peut être exprimé en fonction de température, de l'équation d'état des gaz parfaits,

$$V_1 = \frac{rT_1}{P_1} \text{ Et } V_2 = \frac{rT_2}{P_2}$$

$$\text{D'où : } W_{1-2} = r(T_2 - T_1) \quad (2.46)$$

c) Quantité de chaleur :

$$Q_{1-2} = C_p.(T_2 - T_1) \quad (2.47)$$

d) Energie interne :

La variation de l'énergie interne est donnée par :

$$\Delta U_{1-2} = C_v.(T_2 - T_1) \quad (2.48)$$

e) Enthalpie :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_p.(T_2 - T_1) \quad (2.49)$$

Dans ce cas : $\Delta H = Q$ (voir quantité de chaleur).

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.50)$$

2.9.3. Transformation Isotherme ($T=Cte$)

a) L'équation relative à la transformation isotherme est tirée à partir de l'équation d'état :

$$PV = rT \quad (2.51)$$

Pour $T=Cte$, l'équation d'état devient :

$$PV = Cte \quad (2.52)$$

En réécrivant cette équation pour les deux points de la transformation, on a :

$$P_1 V_1 = Cte$$

$$P_2 V_2 = Cte$$

D'où :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad (2.53)$$

On voit que, les pressions dans ce cas sont inversement proportionnelles aux volumes.

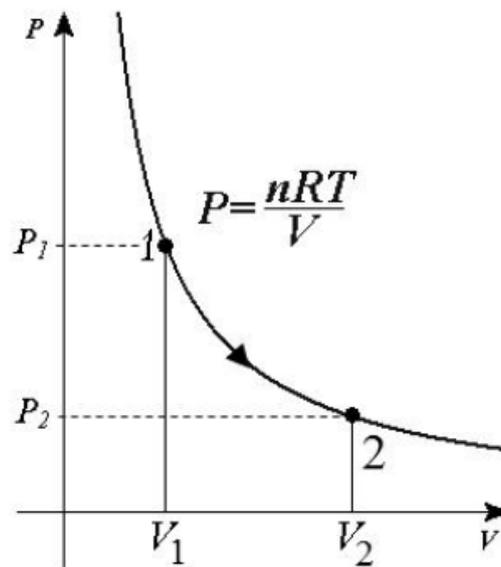


Figure 2. 5. Représentation graphique d'une transformation isotherme.

b) Travail extérieur :

On a :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV \quad (2.54)$$

De l'équation d'état, on a :

$$P = \frac{r.T}{V} \quad (2.55)$$

D'où :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV = \int_1^2 P_1.V_1 \cdot \frac{dV}{V} = P_1.V_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = P_1.V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.56)$$

$$W_{1-2} = r.T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.57)$$

Et encore : $W_{1-2} = r.T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$ (2.58)

c) Quantité de chaleur :

D'après le 1^{er} principe, on a :

$$\Delta U = Q - W \quad (2.59)$$

Pour cette transformation ($\Delta U=0$), il vient donc :

$$Q_{1-2} = W_{1-2} = r.T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.60)$$

Aussi, $Q_{1-2} = T.(S_2 - S_1)$ (2.61)

d) Energie interne :

La variation de l'énergie interne pour ce cas ($dT=0$) est :

$$\Delta U_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1) = 0 \quad (2.62)$$

e) Enthalpie :

Puisque pour cette transformation $dT=0$, on a :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_P.(T_2 - T_1) = 0 \quad (2.63)$$

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{T} = r \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.64)$$

2.9.4. Transformation adiabatique (Isentropique, S=Cte)

a) Equation de la transformation adiabatique :

Au cours d'une transformation adiabatique, le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur, où :

$$Q = 0$$

Donc, $dQ = 0$

Dans cette transformation, toutes les variables d'état P , V et T changent au même temps.

Du **1^{er} principe**, on a :

$$dQ = dU + p dV \quad (2.65)$$

Aussi,

$$dQ = dH - V dP \quad (2.66)$$

$$\text{De : } dU = C_V dT \quad \text{et} \quad dH = C_P dT \quad (2.67)$$

On obtient :

$$dQ = C_V dT + p dV = 0 \Rightarrow C_V dT = -P dV \quad (2.68)$$

$$dQ = C_P dT - V dP = 0 \Rightarrow C_P dT = V dP \quad (2.69)$$

Où :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = -\frac{V dP}{P dV} \Rightarrow \gamma P dV + V dP = 0 \quad (2.70)$$

Par intégration de cette relation, on obtient :

$$\int \frac{dP}{P} + \gamma \int \frac{dV}{V} = C \Rightarrow \ln P + \gamma \ln V = \ln C \quad (2.71)$$

Alors, **l'équation de la transformation adiabatique** est la suivante :

$$PV^\gamma = Cte$$

Où, P est la pression, V est le volume.

On a :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (2.72)$$

Et,

$$C_P - C_V = R \quad (2.73)$$

C_P c'est la chaleur spécifique à pression constante, C_V est la chaleur spécifique à volume constant, γ est l'index adiabatique et R est la constante universelle des gaz parfaits.

b) Travail extérieur :

Puisque $V=Cte$, $dV=0$ et par conséquent :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV = 0 \quad (2.37)$$

c) Quantité de chaleur :

$$Q_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1) \quad (2.38)$$

d) Energie interne :

D'après le 1^{er} principe, on a : $\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} + W_{1-2}$

Avec, $W_{1-2} = 0$

$$\text{Donc : } \Delta U_{1-2} = Q_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1) \quad (2.39)$$

Il est clair que pour une transformation isochore, la quantité de chaleur accompagnant la transformation représente la variation en énergie interne du système.

e) Enthalpie :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_P.(T_2 - T_1) \quad (2.40)$$

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = C_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.41)$$

2.9.2. Transformation Isobare ($P=Cte$)

En vertu de l'équation des gaz parfaits :

$$PV = r.T \quad (2.42)$$

a) L'équation relative à une transformation isobare ($P=Cte$) : peut être déduite de la sorte :

$$V = \frac{r}{P}.T = C.T \quad (2.43)$$

Avec, C : c'est une constante, où :

$$C = \frac{V}{T}$$

D'où entre deux états d'équilibre (1 et 2) d'une transformation isobare, on a :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{Où} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (\text{Loi de Gay-Lussac}) \quad (2.44)$$

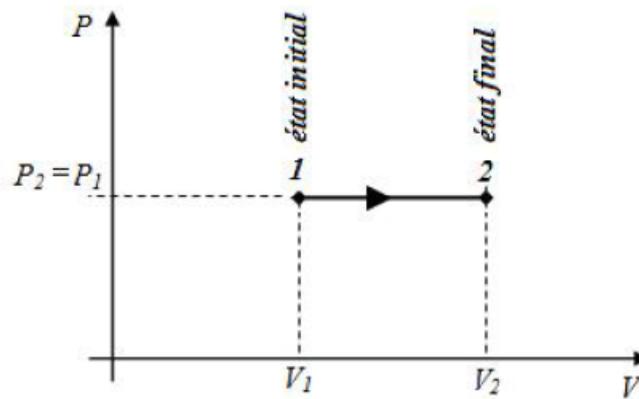


Figure 2. 4. Représentation graphique d'une transformation isobare.

b) Travail extérieur :

Puisque $P=Cte$, on a :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV = P(V_2 - V_1) \quad (2.45)$$

W peut être exprimé en fonction de température, de l'équation d'état des gaz parfaits,

$$V_1 = \frac{rT_1}{P_1} \text{ Et } V_2 = \frac{rT_2}{P_2}$$

$$\text{D'où : } W_{1-2} = r(T_2 - T_1) \quad (2.46)$$

c) Quantité de chaleur :

$$Q_{1-2} = C_p.(T_2 - T_1) \quad (2.47)$$

d) Energie interne :

La variation de l'énergie interne est donnée par :

$$\Delta U_{1-2} = C_v.(T_2 - T_1) \quad (2.48)$$

e) Enthalpie :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_p.(T_2 - T_1) \quad (2.49)$$

Dans ce cas : $\Delta H = Q$ (voir quantité de chaleur).

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.50)$$

2.9.3. Transformation Isotherme ($T=Cte$)

a) L'équation relative à la transformation isotherme est tirée à partir de l'équation d'état :

$$PV = r.T \quad (2.51)$$

Pour $T=Cte$, l'équation d'état devient :

$$PV = Cte \quad (2.52)$$

En réécrivant cette équation pour les deux points de la transformation, on a :

$$P_1 V_1 = Cte$$

$$P_2 V_2 = Cte$$

D'où :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad (2.53)$$

On voit que, les pressions dans ce cas sont inversement proportionnelles aux volumes.

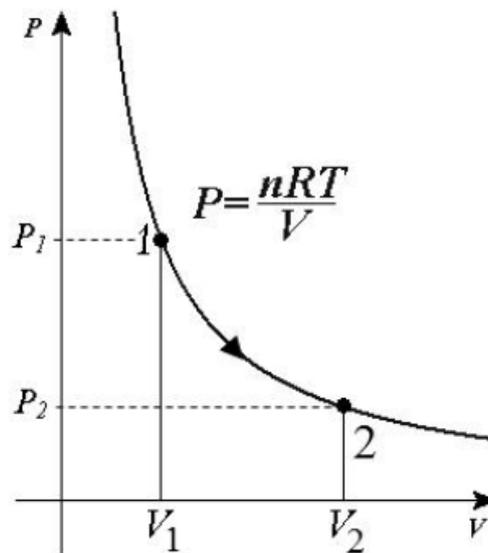


Figure 2. 5. Représentation graphique d'une transformation isotherme.

b) Travail extérieur :

On a :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV \quad (2.54)$$

Il vient donc,

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} - 1 = \gamma - 1 \quad (2.74)$$

Alors, pour une transformation adiabatique entre deux points d'équilibre, on peut écrire :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow T.V^{\gamma-1} = Cte \Leftrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad (2.75)$$

De :

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} \Rightarrow \left(\frac{PV}{nR} \right) V^{\gamma-1} = Cte \Rightarrow PV^\gamma = Cte \quad (2.76)$$

On aura :

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad (2.77)$$

De :

$$PV = n.RT \Rightarrow V = \frac{n.RT}{P} \Rightarrow P \left(\frac{RT}{P} \right)^\gamma = Cte \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = Cte \quad (2.78)$$

$$T.P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte \quad (2.79)$$

Il vient :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.80)$$

Pour une telle transformation, il est également vrai que :

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = Cte \quad (2.81)$$

Où T est la température absolue.

Qui peut être réécrite aussi comme suit :

$$T.V^{\gamma-1} = Cte \quad (2.82)$$

De l'équation d'état, on a :

$$P = \frac{r.T}{V} \quad (2.55)$$

D'où :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV = \int_1^2 P_1.V_1 \cdot \frac{dV}{V} = P_1.V_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = P_1.V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.56)$$

$$W_{1-2} = r.T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.57)$$

Et encore : $W_{1-2} = r.T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$ (2.58)

c) Quantité de chaleur :

D'après le 1^{er} principe, on a :

$$\Delta U = Q - W \quad (2.59)$$

Pour cette transformation ($\Delta U=0$), il vient donc :

$$Q_{1-2} = W_{1-2} = r.T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.60)$$

Aussi, $Q_{1-2} = T.(S_2 - S_1)$ (2.61)

d) Energie interne :

La variation de l'énergie interne pour ce cas ($dT=0$) est :

$$\Delta U_{1-2} = C_V.(T_2 - T_1) = 0 \quad (2.62)$$

e) Enthalpie :

Puisque pour cette transformation $dT=0$, on a :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_P.(T_2 - T_1) = 0 \quad (2.63)$$

f) Entropie :

$$\Delta S_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{T} = r \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.64)$$

2.9.4. Transformation adiabatique (Isentropique, S=Cte)

a) Equation de la transformation adiabatique :

Au cours d'une transformation adiabatique, le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur, où :

$$Q = 0$$

Donc, $dQ = 0$

Dans cette transformation, toutes les variables d'état P , V et T changent au même temps.

Du **1^{er} principe**, on a :

$$dQ = dU + pdV \quad (2.65)$$

Aussi,

$$dQ = dH - V.dP \quad (2.66)$$

$$\text{De : } dU = C_V.dT \quad \text{et} \quad dH = C_P.dT \quad (2.67)$$

On obtient :

$$dQ = C_V.dT + pdV = 0 \Rightarrow C_V.dT = -P.dV \quad (2.68)$$

$$dQ = C_P.dT - V.dp = 0 \Rightarrow C_P.dT = V.dP \quad (2.69)$$

Où :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = -\frac{V.dP}{P.dV} \Rightarrow \gamma.PdV + V.dP = 0 \quad (2.70)$$

Par intégration de cette relation, on obtient :

$$\int \frac{dP}{P} + \gamma \cdot \int \frac{dV}{V} = C \Rightarrow \ln P + \gamma \cdot \ln V = \ln C \quad (2.71)$$

Alors, **l'équation de la transformation adiabatique** est la suivante :

$$P.V^\gamma = Cte$$

Où, P est la pression, V est le volume.

On a :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (2.72)$$

Et,

$$C_P - C_V = R \quad (2.73)$$

C_P c'est la chaleur spécifique à pression constante, C_V est la chaleur spécifique à volume constant, γ est l'index adiabatique et R est la constante universelle des gaz parfaits.

Il vient donc,

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} - 1 = \gamma - 1 \quad (2.74)$$

Alors, pour une transformation adiabatique entre deux points d'équilibre, on peut écrire :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cte \Leftrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (2.75)$$

De :

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} \Rightarrow \left(\frac{PV}{nR}\right)V^{\gamma-1} = Cte \Rightarrow PV^\gamma = Cte \quad (2.76)$$

On aura :

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \quad (2.77)$$

De :

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow P \left(\frac{nRT}{P}\right)^\gamma = Cte \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = Cte \quad (2.78)$$

$$T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte \quad (2.79)$$

Il vient :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.80)$$

Pour une telle transformation, il est également vrai que :

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = Cte \quad (2.81)$$

Où T est la température absolue.

Qui peut être réécrite aussi comme suit :

$$TV^{\gamma-1} = Cte \quad (2.82)$$

b) Travail extérieur :

On a :

$$W_{1-2} = \int_1^2 P.dV \quad (2.83)$$

Multipliant par V^γ et divisant par V^γ , P et V varient mais $PV^\gamma = Cte$ et on peut donc le ressortir de l'intégrale :

$$W_{1-2} = PV^\gamma \int_1^2 \frac{dV}{V} = \left[PV^\gamma \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_1^2 \quad (2.84)$$

$$W_{1-2} = \left[\frac{PV}{1-\gamma} \right]_1^2 \quad (2.85)$$

Donc :

$$W_{1-2} = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1} \quad (2.86)$$

De même, et à partir de l'équation d'état des gaz parfaits, le travail peut réécrit en fonction de T comme suit :

$$W_{1-2} = \frac{r(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \quad (2.87)$$

Aussi, en se servant de l'équation (2.80), il vient donc :

$$W_{1-2} = \frac{rT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \quad (2.88)$$

c) Energie interne :

La variation de l'énergie interne est :

$$\Delta U_{1-2} = C_v(T_2 - T_1) \quad (2.89)$$

d) Enthalpie :

La variation en enthalpie pour cette transformation est :

$$\Delta H_{1-2} = H_2 - H_1 = C_p(T_2 - T_1) \quad (2.90)$$

e) Entropie :

On a $S=Cte$ (transformation isentropique)

D'où :

$$\Delta S_{1-2} = 0$$

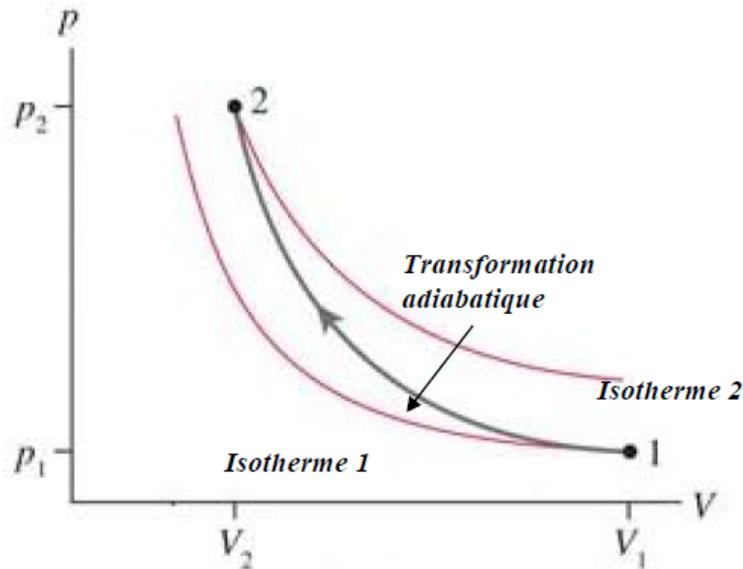


Figure 2. 6. Représentation graphique d'une transformation adiabatique.

2.9.5. Tableau récapitulatif des équations de transformations

Transformation	Isobare ($p=Cte$)	Isochore ($V=Cte$)	Isotherme ($T=Cte$)	Adiabatique ($Q=0$)
Equation de transformation	$\frac{T}{V} = Cte$	$\frac{p}{T} = Cte$	$p.V = Cte$	$p.V^\gamma = Cte$
1 ^{er} principe	$\Delta U = W + Q$	$W=0 ; \Delta U = Q$	$Q = W ; \Delta U = 0$	$Q = 0 ; \Delta U = W$
Travail	$W = -p.(V_2 - V_1)$ $W = -m.r(T_2 - T_1)$	$W = 0$	$W = p_1.V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ $W = m.r.T \ln \frac{V_2}{V_1}$	$W = \frac{p_2.V_2 - p_1.V_1}{\gamma - 1}$ $W = \frac{m.r(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$
Chaleur	$Q = m.c_p.(T_2 - T_1)$	$Q = m.c_v.(T_2 - T_1)$	$Q = p_1.V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ $Q = m.r.T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$	$Q = 0$

Transformation	Isobare ($p=C^{te}$)	Isochore ($V=C^{te}$)	Isotherme ($T=C^{te}$)	Adiabatique ($Q=0$)
Energie interne	$\Delta U = m.c_v(T_2 - T_1)$	$\Delta U = m.c_v(T_2 - T_1)$	$\Delta U = 0$	$\Delta U = m.c_v(T_2 - T_1)$
Enthalpie	$\Delta H = m.c_p(T_2 - T_1)$	$\Delta H = m.c_p(T_2 - T_1)$	$\Delta H = 0$	$\Delta H = m.c_p(T_2 - T_1)$
Entropie	$\Delta S = m.c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$	$\Delta S = m.c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$	$\Delta S = m.r \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\Delta S = 0$
Gaz parfaits $p.V = m.r.T = Cte$	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$	$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$