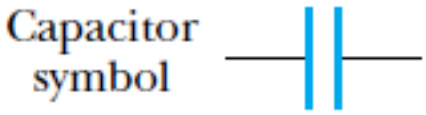
الفصل الثاني: المكثفات

مقدمة

المكثفة كما يدل اسمها هي جهاز لتخزين الشحنات الكهربائية. وتتكون من ناقلين يحيط أحدهما بالآخر، ويدعيان" لبوسا المكثفة "واقعين في حالة تأثير كلي فيما بينهما، يفصلهما وسط عازل.

نرمز لها في الدارات الكهربائية بالرمز:



و هي مركب إلكتروني له خاصية تخزين الطاقة الكهربائية عندما يوضع تحت تأثير كمون كهربائي. تشحن المكثفة بكميه من الكهرباء Q عندما توضع تحت تأثير توتر كهربائي وهذه الكمية من الكهرباء تتعلق بالكمون ومدة الشحن. يتم استرجاع الطاقة المخزنة عند تفريغ المكثفة.

هناك العديد من أنواع المكثفات التي تختلف وفقًا لطبيعة النواقل الموصلة والعازل بينهما (الهواء والسيراميك والميكا...).

سعة المكثفة

نعرف سعة المكثفة على أنها نسبة شحنة أحد اللبوسين بالقيمة المطلقة إلى فرق الكمون V بينهما:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{V}}$$

تقاس السعة بوحدة الفاراد(F)

$$1F = \frac{Coulomb}{Volt} = \frac{Coulomb^2}{joule}$$

وأكثر قيمها تداولا في التطبيقات العملية تكون من رتبة μF أو nF.

كيفية حساب سعة المكثفة

1. حساب الحقل الكهربائي في كل نقطة داخل المكثفة (بين اللبوسين)

2. استنتاج فرق الكمون بين اللبوسين باستعمال العلاقة $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

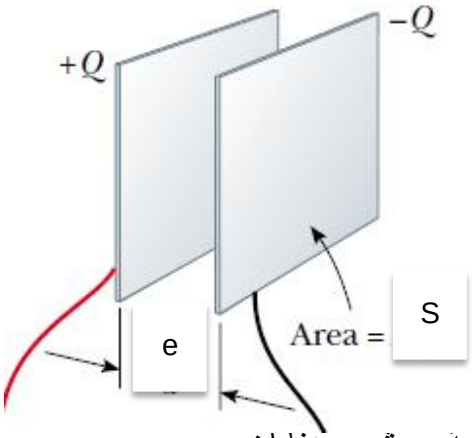
3. ايجاد النسبة $C = \frac{Q}{V}$

1. حساب سعة مكثفة مستوية

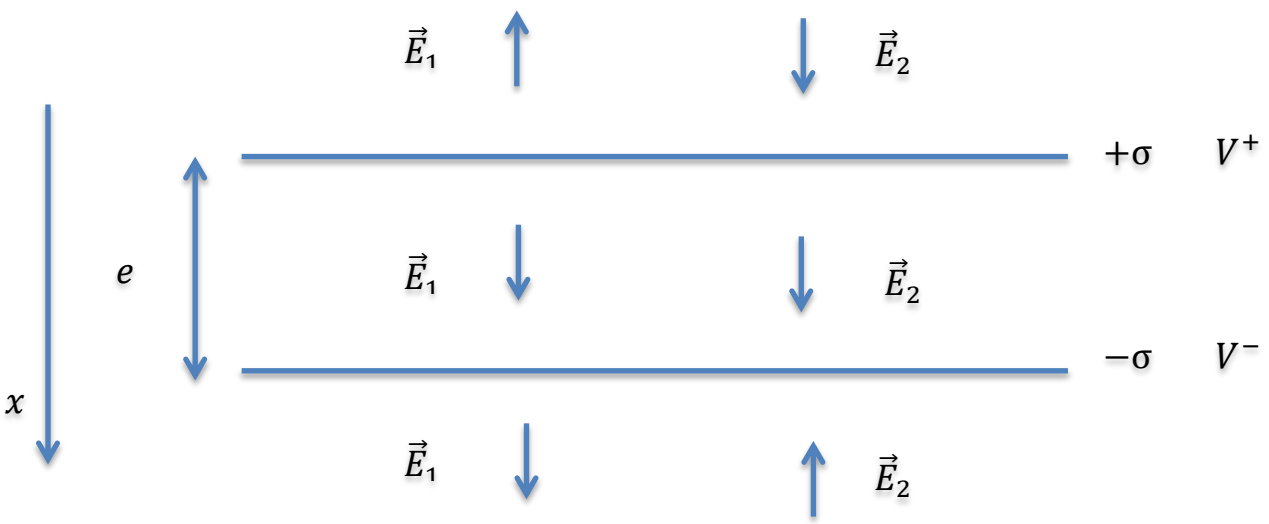
احسب سعة مكثفة مستوية الشكل مساحة كل من اللبوسين S والبعد بينهما e

سبق وأن عرفنا بأن الحقل الكهربائي بالنسبة لمستوى لا نهائي كثافته السطحيه σ في أي نقطة من الفضاء حوله يساوي

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



يمكن الرجوع للجزء الاول من التمرين السابع من السلسلة الثانيه حيث وجدنا ان:



الحقل الكلي بين اللبوسين بتطبيق مبدأ التراكب يكون:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath}$$

حساب فرق الكمون بين طرفي المكثفة

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{\imath}$$

$$\rightarrow E = -\frac{dV}{dx}$$

$$\rightarrow dV = -E\,dx$$

$$\rightarrow \int_{V^+}^{V^-} dV = -\int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0}dx$$

$$\rightarrow \quad V^- - V^+ = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$$

$$\rightarrow \quad V = V^+ - V^- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$$

بوضع $\sigma = \frac{Q}{S}$ يمكن كتابة

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}e$$

ومنه تكون السعة

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

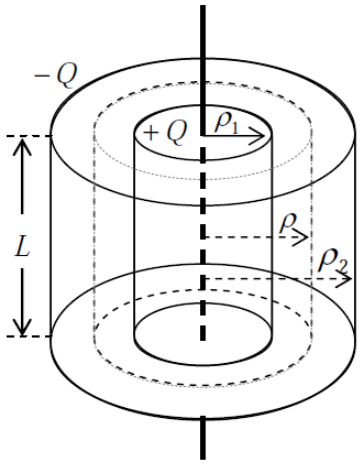
يلاحظ ان سعة المكثفة تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين الممثل ب S و e وسماحية الوسط العازل بينهما والذي في حالتنا هو الفراغ ممثلا ب ε_0.

في التطبيقات العملية ، غالبًا ما يتم إدخال العازل بين اللبوسين؛ وعادة يكون العازل خطي متجانس، تكون السعة C للمكثفة هي:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\, S}{e} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{e}}$$

ε_r: السماحية النسبية للعازل. ε_0: سماحية الفراغ

2. حساب سعة مكثفة اسطوانية



لحساب سعة مكثفة اسطوانية الشكل ذات انصاف اقطار على التوالي ρ_1 ، ρ_2 وارتفاعها L نقوم اولا بحساب الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة بتطبيق نظريه غوص في المنطقة حيث ρ_2 $> r > \rho_1$

نختار سطح غوص هو سطح اسطوانة نصف قطرها r

$$\oint \vec{E}\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E\ 2\pi r L = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E\ = \frac{Q_{int}}{2\pi L \varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

الحقل الكهربائي $\overrightarrow{E}$ قطري أي يتعلق فقط ب r وله مركبه على $\overrightarrow{u_r}$ ومنه فرق الكمون بين طرفي المكثفة

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}dV \rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{u_r}$$

$$\rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$$

$$\rightarrow dV = -\,E\,dr$$

$$\rightarrow \int_{V^+}^{V^-} dV = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{Q_{int}}{2\pi L \varepsilon_0}\frac{1}{r}\,dr$$

$$\rightarrow \quad V^- - V^+ = -\frac{Q_{int}}{2\pi L\varepsilon_0} ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

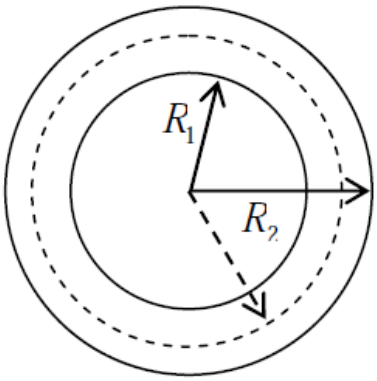
$$\rightarrow V = V^+ - V^- = \frac{Q_{int}}{2\pi L\varepsilon_0} ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ومنه السعة

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}}$$

يلاحظ ايضا ان سعة المكثفة الاسطوانية تتعلق فقط بالشكل الهندسي للبوسين وسماحية الوسط العازل الذي يعتبر في حالتنا الفراغ ε_0.

حساب سعة مكثفة كروية:



مكثفة كروية الشكل ذات أنصاف أقطار على التوالي R_1 ، R_2

نحسب الحقل الكهربائي بين لبوسي المكثفة بتطبيق نظرية غوص في المنطقة $R_1 < r < R_2$

نختار سطح غوص كرة نصف قطرها r

$$\oint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E\ 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E\ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري أي يتعلق فقط ب r وله مركبه على $\overrightarrow{u_r}$ ومنه فرق الكمون بين طرفي المكثفة

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{u_r}$$

$$\rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$$

$$\rightarrow dV = -E\,dr$$

$$\rightarrow \int_{V^+}^{V^-} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$\rightarrow \; V^- - V^+ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$V = V^+ - V^- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

ومنه السعة

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

الطاقة الكهربائية للمكثفة

يتَم حساب الطاقة الكهربائيةَ للمكثفة بنفس الطريقَة كما في حالة النواقل إذن:

الطاقة الكهروستاتيكية لمكثفة مكونة من لبوسين يحمل احدهما الشحنة q والآخر الشحنة $-q$ وبينهما فرق كمون V هي

$$E_P = \frac{1}{2} q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c}$$

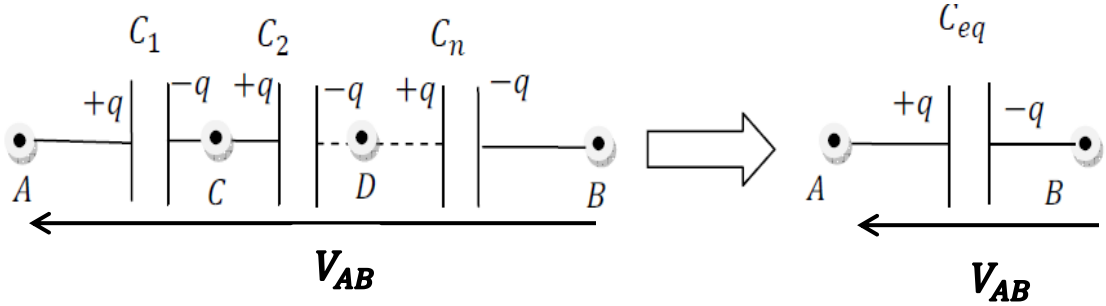
ضم المكثفات:

عمليا لا يمكن رفع قيمة فرق الكمون بين لبوسي مكثفة بغير حدود لأنها لا تتحمل بين لبوسيها فرقا في الكمون أعلى من قيمة حدية معينة وإلا فإنها ستتلف. (ارتفاع شدة الحقل في الوسط الفاصل بين اللبوسين يؤدي إلى تخريب المادة العازلة)، نلجأ لتخزين أكبر كمية ممكنة من الطاقة بتجميع عدة مكثفات.

تسمى مكثفة مكافئة لمجموعة من المكثفات، المكثفة الوحيدة التي يكون فرق الكمون بين لبوسيها مساويا نفس فرق الكمون بين طرفي المجموعة و كذلك تحمل شحنة مساوية لشحنة المجموعة. وتنتج أثناء التفريغ نفس الطاقة و نفس كمية الكهرباء التي تنتجها المجموعة.

الضم على التسلسل:

كل المكثفات لها نفس الشحنة. فرق الكمون بينَ طرفي كل المجموعة يسَاوي مجموع فروق الكمونات لكل المكثفات.



$$V_{AB} = V_1 + V_2 + \cdots V_n = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \cdots . \frac{q}{C_n}$$

$$V_{AB} = \frac{q}{C_{eq}}$$

وعليه تحسب السعة المكافئة بالعلاقة

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots . \frac{1}{C_n}$$

أو يمكن كتابة

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{C_i}}$$

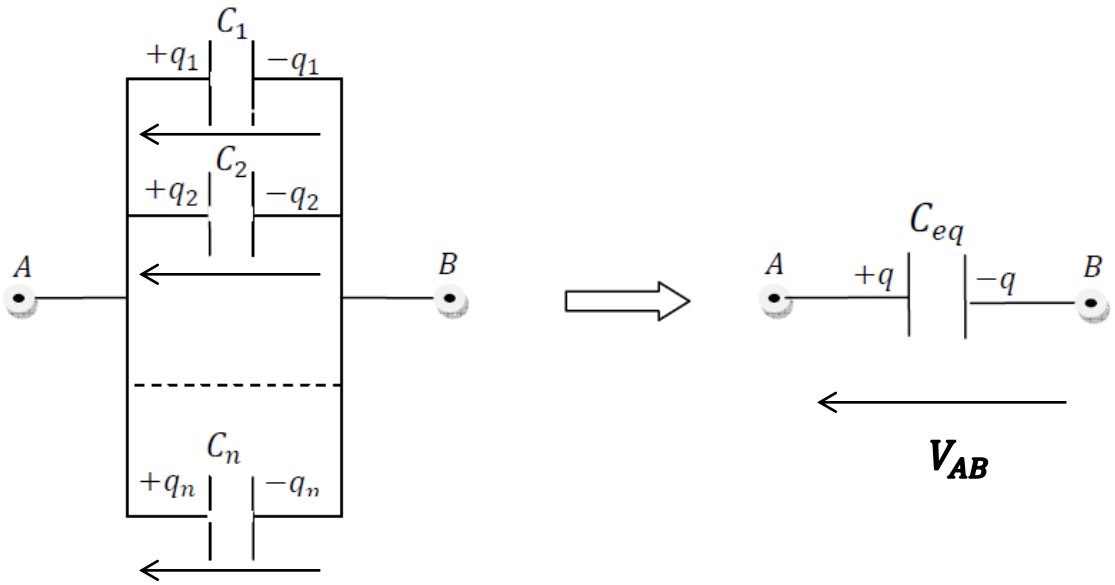
نتيجة لهذا الربط تكون سعة المكثفة المكافئة أقل من سعة كل واحدة من المكثفات مأخوذة على حدة.

في حالة جملة مكونة من n مكثفة متماثلة لها سعة C_0 موصلة على التسلسل تكون السعة المكافئة

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_0} + \cdots . \frac{1}{C_0} = \frac{n}{C_0} \rightarrow C_{eq} = \frac{C_0}{n}$$

فائدة الربط عل التسلسل: يسَتعمل هذا النوع من التوصيل عندما يَكون فرق الكمون كبيرا جدا و لا يمَكن لمكثفة واحدة تحمله.

الضم على التوازي (التفرع):



كل المكثفات الموصولة على التفرع لها فرق الكمون نفسه وهو فرق الكمون بين النقطتين A و B

$$V_{AB} = V_1 = V_2 = \cdots = V_n = V$$

تحمل المكثفة المكافئة شحنة تساوي مجموع الشحنات التي تحملها المكثفات الموصولة على التفرع

$$q_{eq} = q_1 + q_2 + \cdots . q_n$$

وعليه تحسب السعة المكافئة

$$q_{eq} = q_1 + q_2 + \cdots . q_n \rightarrow C_{eq}V_{AB} = C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots C_n\mathrm{V_n}$$

$$\rightarrow C_{eq}V = (C_1 + C_2 + \cdots C_n)V$$

$$\rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots C_n$$

تكون سعة المكثفة المكافئة الناتجة عن ضم مجموعة من المكثفات على التوازي مساوية الى مجموع سعات هذه المكثفات وبالتالي فالسعة الناتجة اكبر من سعة كل مكثف مأخوذة لوحدها.

يمكن أن نكتب

$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i}$$

في حالة جملة مكونة من n مكثفة متماثلة لها سعة C_0 موصلة على التفرع تكون السعة المكافئة

$$C_{eq} = nC_0$$

فائدة الربط على التفرع هو الحصول عل مكثفة ذات سعة كبيرَة جدا.

<u>تطبيقات</u>

1- شحنت المكثفة التي سعتها $2,5\ \mu F$ حتى أصبح فرق الكمون بين طرفيها $100\ V$، ثم فصلت عن المصدر الكهربائي، ووصل قطبيها بقطبي مكثفة أخرى سعتها $10\ \mu F$، أحسب:

أ- فرق الكمون بين طرفي المجموعة.

ب- الطاقة الكلية المخزونة فيهما.

جـ- قارن بين: الطاقة الكلية للمكثفتين وطاقة المكثفة الأولى قبل توصيلها بالمكثفة الثانية.

الإجابة

1- العبارة التي تعطى الطاقة المخزنة في المكثفة بدلالة C ، V_C: لدينا: $E_p = \frac{1}{2} Q V_C$

وبما أن: $Q = C \cdot V_C$ فإن: $E_p = \frac{1}{2} . (C V_C) . V_C = \frac{1}{2} C V_C^2$

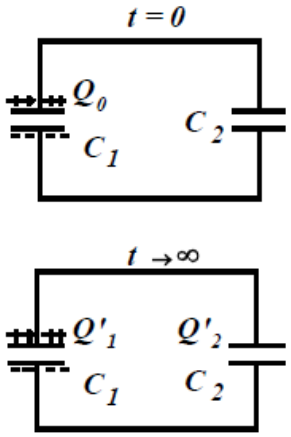
2- أ) فرق الكمون بين طرفي المجموعة :

- بعد عملية الشحن ينعدم التيار الكهربائي لتوازن النظام $(I = 0)$ وعندها يكون: $V_C = E$

والشحنة المخزنة في المكثفة C_1 هي: $Q_0 = C_1 \times V_C \quad , V_C = E$

تطبيق عددي: $Q_0 = 2,5 \times 100 = 250\ \mu C$

- بعد عملية شحن C_1 توصل بمكثفة أخرى شحنتها في البدء معدومة:



وحسب قانون انحفاظ الشحنة $Q_0 = Q'_1 + Q'_2$

وبما أن: $V_{C_1} = V_{C_2}$ فإن: $\frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{C_1 + C_2}$

وبالتالي: $\frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} \Rightarrow Q'_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0$

$\frac{Q'_2}{C_2} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} \Rightarrow Q'_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0$

ومنه سيكون التوتر الكهربائي بين طرفي المجموعة هو: -

$$V_{C_1} = V_{C_2} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} . E = \frac{2,5}{10 + 2,5} . 100 = 20\ V$$

ب- حسب الطاقة الكلية المخزونة في كل من المكثفتين:

- طاقة المكثفة C_1: $E_{p1} = \frac{1}{2} C_1 V_{C_1}^2$ • طاقة المكثفة C_2: $E_{p2} = \frac{1}{2} C_2 V_{C_2}^2$
- وتكون طاقة المجموعة: $E_p = E_{p1} + E_{p2}$

تطبيق عددي: $E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2} . 2,5 . 10^{-6} . 20^2 + \frac{1}{2} . 10 . 10^{-6} . 20^2 = 2,5 . 10^{-3}\ J$

جـ- مقارنة طاقة المكثفة C_1 قبل وصلها بطاقة المجموعة:

أولا: طاقة المكثفة C_1 قبل وصلها: $E_{p0} = \frac{1}{2} C_1 V_C^2 = \frac{1}{2} . 2,5 . 10^{-6} . 100^2 = 0,0125\ J$

ثانيا: المقارنة $\Delta E_p = E_p - E_{p0} = 2,5 . 10^{-3} - 12,5 . 10^{-3} = 0,01\ J$

إن الطاقة التي كانت مخزنة في المكثفة C_1 غير محفوظة ، هذا يعني أن جزءا منها ضاع في أسلاك التوصيل بفعل جول و الجزء الأخر وزع بين المكثفتين حسب سعة كل منهما .