# تطبيقات نظرية الرواسب لحساب التكاملات:

يمكن في كثير من الأحيان حساب التكاملات باستعمال نظرية الرواسب مع دالة $f(z)$ مناسبة و مسار مغلق مناسب، وعملية اختيار الدالة والمسار تلعب دورا مهما في إيجاد حل التكاملات وفيما يلي بعض النماذج:

أ/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum \text{Res}\, f(z)\, e^{iz}$$

بشرط أن تكون $|f(z)\, e^{iz}| \to 0$ $\quad z \to \infty$

مثال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\, e^{ix}}{x^2 - 2x + 2}\, dx.$$

ب/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \begin{matrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{matrix} dx = \begin{matrix} 2\pi\, \text{Re} \sum \text{Res}\, f(z)\, e^{iz} \\ -2\pi\, \text{Im} \sum \text{Res}\, f(z)\, e^{iz} \end{matrix}.$$

$f(x)$ حقيقية

مثال 2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\, \sin(2x)}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

ج/ $R(z)$ دالة ممثلة لها الأقطاب $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ في نصف المستوى العلوي و $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ أقطاب على المحور الحقيقي.

إذا كان: $R(z) \sim O\left(\frac{1}{z}\right)$ $|z| \to \infty$

إذن: $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{a_k}^{n} \text{Res}\left(R(z)\, e^{iz}\right) + i\pi \sum_{b_k}^{m} \text{Res}\left(R(z)\, e^{iz}\right)$$

مثال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x}\, dx$$

1 $\quad a > 0$

2 $\quad a < 0$

د/ لتكن $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ دالة تكون عبارتها على $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ فقط.

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

مثال:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}.$$

هـ/ لتكن $f(z)$ دالة دورية بدور $2\pi$ وتحليلية في الحيز $(\alpha < \operatorname{Im} z < \beta)$ ما عدا عند الأقطاب $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ في الشريحة

$$0 < \operatorname{Im} z < \beta \quad \text{و} \quad |\operatorname{Re} z| < \pi.$$

نفرض كذلك أن: $f(z) \to A$ عندما $\operatorname{Im} z \to +\infty$ إذن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 2\pi A + 2i\pi \sum_{k}^{n} \operatorname{Res}(f(z_k)).$$

و/ بالإضافة إلى شروط (هـ) إذا كانت الدالة لها أقطاب $b_1, b_2, \dots, b_m$ على المحور $(-\pi, \pi)$ إذن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 2\pi A + 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(a_k)) + i\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f(b_k))$$

ي/ ① إذا كانت $f(z)$ دورية بدور $i\omega$ في $(f(z) = f(z+i\omega))$ عندما $0 < \operatorname{Im} z < \omega$ عند أقطابها $a_1, a_2, \dots a_n$ التي تنتمي إلى الشريحة

لذلك $f(z)$ ليس لديها أقطاب على المحور الحقيقي إذن:

$$|f(z)| = O\left(e^{-p|\operatorname{Re} z|}\right), \operatorname{Re} z \to \pm\infty \quad (p>0).$$

إذا كان $= \to 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} f(x)\, dx = \frac{-2i\pi}{e^{i\alpha\omega} - 1} \sum_{k}^{n} \operatorname{Res}\, e^{\alpha z_k} f(z_k) \quad |\operatorname{Re}\alpha| < p$$

حيث:

(5) ~~$\left(-\frac{i\pi\left(e^{i\alpha\omega}+1\right)}{\left(e^{i\alpha\omega}-1\right)} \sum^{m}\right)$~~

② بإضافة إلى الشروط ① (R) و $f(z)$ لها أقطاب $b_1, b_2, \dots b_m$ على المحور الحقيقي إذن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} f(x)\,dx = \frac{-2i\pi}{e^{i\alpha w}-1} \sum_{a_k=1}^{n} \operatorname{Res} e^{\alpha z_k} f(z_k)$$

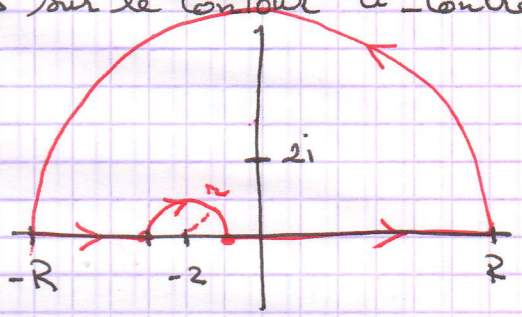
$$- \frac{i\pi\,(e^{i\alpha w}+1)}{(e^{i\alpha w}-1)} \sum_{b_k=1}^{m} \operatorname{Res} e^{\alpha z_k} f(z_k)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)^2} \longrightarrow f(z) = \frac{1}{(z+2)(z^2+4)^2}.$$

$z_1 = -2$ pôle simple.

$z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$. = double pôles

On applique le théorème des résidus sur le contour ci-contre




$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, z_2 = 2i).$$

$$= 2\pi i \frac{\partial}{\partial z}\left[(z-2i)^2 f(z)\right]_{z=2i}$$

$$= 2\pi i \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{(z+2)(z+2i)^2}\right]_{z=2i} = 2\pi i \left[-\frac{1}{(z+2)^2(z+2i)^2} - \frac{2}{(z+2)(z+2i)^3}\right]_{z=2i}$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{1}{(2i+2)^2(4i)^2} - \frac{2}{(2i+2)(4i)^3}\right] = \int_{\Gamma} \ldots$$

$$\oint f(z)\,dz = \int_{-R}^{-2-r} \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)^2} + \int_{\pi}^{0} \frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{(re^{i\theta}+2)(r^2e^{2i\theta}+4)^2} + \int_{-2+r}^{R} \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)^2} + \int_{0}^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\,d\theta}{(Re^{i\theta}+2)(R^2e^{2i\theta}+4)^2}$$

à la limite $R \to \infty$.

$$\oint f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{-2-r} \frac{dx}{(x+2)^2(x^2+4)^2} + i\int_{\pi}^{0} \frac{d\theta}{8^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x+2)} - i\frac{\pi}{8^2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)} - i\frac{\pi}{8^2} = -2\pi i \left[\frac{1}{(2i+2)^2(4i)^2} + \frac{2}{(2i+2)(4i)^3}\right].$$

$$= \frac{2\pi}{4^3}\left[1 - \frac{i}{2}\right].$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)^2} = \frac{2\pi}{4^3}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx \quad ; \text{ On écrit : } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}}_{\arctan x} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx$$

Calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx$ par les résidus

On fait le changement $2x = y \Rightarrow dx = \frac{dy}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{\frac{y^2}{4}+1}\,\frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{\frac{y^2+4}{4}}\,dy = \frac{4}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{y^2+4}\,dy}_{(a)}.$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2e^2} = \frac{\pi}{e^2} \quad \text{c'est exactement.}$$

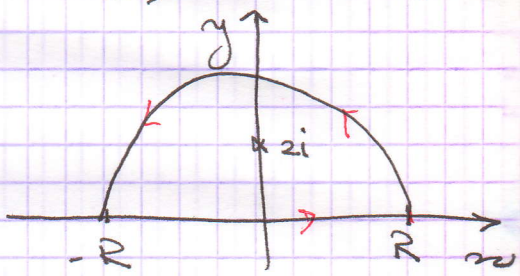
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4}\,dx \rightarrow$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx$ : On construit la fonction de la variable complexe $= f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$.

$f(z)$ possède 2 pôles simples $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$.

On applique le théorème des résidus sur le contour ci. contre




$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z_1).$$

$$= 2\pi i \left[ (z - z_1) \frac{e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)} \right]_{z=z_1}$$

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \frac{e^{iz_1}}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi i\, e^{-2}}{4i} = \frac{\pi}{2e^2}.$$

D'autre part l'intégrale sur le contour fermé s'écrit :

$$\oint f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\,dx + \int_{\cap} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 4}\, iRe^{i\theta}\,d\theta$$

$\to 0$

à la limite $R \to \infty$ (la deuxième intégrale s'annule)

$$\oint_{R\to\infty} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{2e^2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{2e^2}.$$