جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2021/2020

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

حل السلسلة رقم 02

التمرين الأول:

(١).

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 x(\frac{t+1}{2}).\overline{y(t)}dt$$

بوضع $s = \frac{t+1}{2}$ $dt = 2ds$ **نعوض انجد**

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(s).\overline{\frac{1}{2}y(2s-1)}ds$$

ومنه

$$T^*y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(٢).

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \overline{y_n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\overline{\alpha_n} y_n} = \langle x, T^*y\rangle$$
$$\Rightarrow T^*y = \overline{\alpha_n} y_n.$$

(٣). $\langle Tx, y\rangle = \int_0 a(t)x(t+h)\overline{y(t)}dt$ **بوضع** $s = t+h$، $ds = dt$ **نجد**

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^{\infty} x(s)\overline{\overline{a(s-h)}y(s-h)}ds$$
$$\Rightarrow T^*y = a(t-h)y(t-h).$$

التمرين الثاني:

(١). λ **قيمة ذاتية لـــ** T **اذا وفقط اذا قبلت المعادلة التالية حلولا غير معدومة:**

$$Tx = \lambda x$$

$$x(-t) = \lambda x(t)$$

اذاكانت $\lambda = 1$ **فان كل الدوال الزوجية هي حلول للمعادلة. اذاكانت** $\lambda = -1$ **فان كل الدوال الفردية هي حلول. اذن له قيمتان ذاتيتان والاشعة الذاتية المرفقة بهما على التوالي هما الدوال الزوجية والدوال الفردية.**

(٢).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds = \lambda x(t).$$

$$\lambda x(t) = \sin t \int_{-\pi}^{\pi} \cos sx(s)ds + \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \sin sx(s)ds.$$

اذن المعالة تقبل حلولا من الشكل

$$x(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t.$$

يالتعويض نجد

$$(\lambda\alpha - \beta\pi)\sin t + (\alpha\pi - \beta\lambda)\cos t = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda\alpha - \beta\pi = 0)(\alpha\pi - \beta\lambda = 0)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \pi^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pi, \lambda = -\pi.$$

$$\lambda = \pi \Rightarrow x(t) = \alpha(\sin t + \cos t)$$

$$\lambda = -\pi \Rightarrow x(t) = \alpha(\sin t - \cos t).$$

التمرين الثالث:

$$T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$$

$$Tx(t) = \varphi(t)\int_0^1 \varphi(s)x(s)ds = \langle x, \varphi\rangle\varphi, \quad \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi \in C([0,1], \mathbb{R}).$$

ا. **خطية** T

$$T(\alpha x + y) = \varphi(t)\int_0^1 \varphi(s)(\alpha x(s) + y(s)ds$$

$$= \alpha\varphi(t)\int_0^1 \varphi(s)x(s)ds + \varphi(t)\int_0^1 \varphi(s)y(s)ds.$$

$$Tx(t) = \langle x, \varphi\rangle\varphi$$

$$|Tx(t)| = |\langle x, \varphi\rangle\varphi|$$

باستعمال متباينة كوشي شوارتز نجد

$$|Tx(t)| \leq \|x\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}|\varphi|$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{L^2}^2 \leq \|x\|_{L^2}^2\|\varphi\|_{L^2}^2\int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt = \|x\|_{L^2}^2\|\varphi\|_{L^2}^4$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^2}^2\|x\|_{L^2}.$$

ب. **لنبين ان** T **قرين لنفسه، اي** $T^* = T$. **نعلم ان**

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

ومنه

$$\langle Tx, y\rangle = \langle\langle x, \varphi\rangle\varphi, y\rangle$$

$$= \langle x, \varphi\rangle\langle \varphi, y\rangle$$
$$= \overline{\langle y, \varphi\rangle}\langle x, \varphi\rangle$$
$$= \langle x, \langle y, \varphi\rangle\varphi\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

اذن T قرين لنفسه.

ج.

$$T^2x(t) = T(Tx(t)) = \langle Tx, \varphi\rangle$$
$$= \langle\langle x, \varphi\rangle\varphi, \varphi\rangle\varphi$$
$$= \langle x, \varphi\rangle\langle \varphi, \varphi\rangle\varphi$$
$$= \|\varphi\|^2_{L^2}\langle x, \varphi\rangle\langle\varphi = \|\varphi\|^2_{L^2}Tx(t)$$
$$\Rightarrow \lambda = \|\varphi\|^2_{L^2}.$$

د. $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow r(T) = \lim_{n\to\infty} \|\lambda\|^{\frac{n-1}{n}} = \lambda.$$

التمرين الرابع

$$T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), Tx = (x_2, x_3, ..., x_n, ...)$$

١. تكونλ قيمة ذاتية اذا كانت للمعادلة التالية حلولا غير معدومة في $\ell^2(\mathbb{C})$

$$Tx = \lambda x, \qquad (١)$$

المعالة (١) تكافىء

$$(x_2, x_3, ..., x_n, ...) = \lambda(x_1, x_2, ...)$$
$$\Rightarrow x_{n+1} = \lambda x_n = \lambda^{n-1}x_1, \quad \forall n < 1.$$

اذن اذا كان $|\lambda| < 1$, فان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^n|^2$ متقاربة، وبالتالي

$$x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^n, ...) \in \ell^2(\mathbb{C}), x_1 \neq 0$$
$$\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(T).$$

بمان $\|T\| = 1$ و

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \|T\| = 1\}$$

لكن حسب السؤال الاول لدينا ق

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T)$$
$$\Rightarrow \overline{\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\}} \subset \overline{\sigma(T)} = \sigma(T)$$

لان الطيف مجموعة مغلقة. اذن

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} = \overline{D}$$

ب. بمان T ليس متباينا فان الصفر ليست قيمة ذاتية. بالخلف، نفرض انه يقبل قيمة ذاتية غير معدومة ، اذن لدينا

$$(0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ...)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_n = \lambda x_{n+1}, \quad n \geq 2$$

اذن كي يكون $x = (x_1, x_2, ...)$ حلا يجب ان يكون

$$x_n = 0, \forall n \geq 1$$

وهذا تناقض مع كون الحل الذي نبحث عنه يجب ان يكون غير معدوم.

$$\sigma(S) = \sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\overline{\lambda}| \leq 1\} = \overline{D}.$$

التمرين الخامس

ا. $Tx = \lambda x$

$$(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...)$$

$$\Rightarrow \lambda = \alpha_n, \forall n \geq 1$$

من اجل $\lambda = \alpha_1$ في هذه الحالة مثلا، يوجد حل غير معدوم وهو $x = (1, 0, .., 0, ..)$ وهكذا من اجل $\lambda = \alpha_n$ يوجد حل غير معدوم وهو $x = (0, 0, .., 1, ...)$. اذن من اجل كل n من $\mathbb{N}$ α_n قيمة ذاتية.

ب. نضع $F = \overline{\{\alpha_n, n \geq 1\}}$ ولنفرض ان $\lambda \notin F$ اذن

$$d(\lambda, F) = \inf_{\alpha_n \in F} d(\lambda, \alpha_n) = m > 0$$

لنبين ان $(T - \lambda I)$ قابل للقلب ومستمر على $\ell^2(\mathbb{C}$

$$y_n = (T - \lambda I)x_n = (\lambda - \alpha_n)x_n$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{\lambda - \alpha_n} y_n$$

اذن المؤثر $(T - \lambda I)^{-1}$ خطي و معرف على $\ell^2(\mathbb{C})$ ولنبين انه مستمر

$$\|(T - \lambda I)^{-1} x\|_{\ell^2} = \|\frac{1}{\lambda - \alpha_n} x\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{m} \|x\|_{\ell^2}$$

$$\Rightarrow (T - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^{\in})$$

$$\Rightarrow \lambda \in \rho(T).$$

ج. حسب السؤال الاول لدينا

$$F \subseteq \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$$

وحسب السؤال الثاني، وباستخدام العكس النقيض لدينا

$$\sigma(T) \subseteq F$$

ومنه المساواة $\sigma(T) = F$.