ملخص درس المعادلات التفاضليّة:

1- المعادلات التفاضليّة ذات متغيرين منفصلين:

تعريف: نسميّ معادلة تفاضليّة من الرتبة الأولى ذات متغيّرين منفصلين كلّ معادلة تكتب على الشكل:

$$g(y)y'=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

حيث f **و** g دالتان مستمرتان على مجالين I و J على الترتيب.

ملاحظة: عمليّاً المعادلة التفاضليّة (1) تصاغ على الشكل $g(y)dy=f(x)dx$ (لأنّ $y'=\dfrac{dy}{dx}$).

حل معادلة تفاضليّة ذات متغيّرين منفصلين:

للحصول على الحل العام لمعادلة تفاضليّة ذات متغيرين منفصلين نقوم بمكاملة طرفيها:

$$g(y)dy=f(x)dx \Rightarrow \int g(y)dy=\int f(x)dx+C$$

إذا كانت F أصليّة لـ f على I و G أصليّة لـ g على J فإنّ الحل العام لـ (1) معطى بالدستور:

$$G(y)=F(x)+C$$

ملاحظة: نحاول التّعبير على y بدلالة x(الشكل الصريح للحل) فإن لم نستطع كتبنا x بدلالة y فإن تعذّر ذلك

تركنا الحل على شكله الضمني أي: $G(y)-F(x)-C=0$.

2- المعادلات التفاضليّة الخطّيّة من الرتبة الأولى:

تعريف:

نسمّي معادلة تفاضليّة خطّيّة من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y'+p(x)y=q(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

حيث p و q دالتان مستمرّتان على مجال I.

إذا كانت q معدومة قلنا أنّ المعادلة:

$$y'+p(x)y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(EH)$$

متجانسة (بدون طرف ثان) مرفقة بـالمعادلة (E)

نظرية: الحل العام للمعادلة (E) يُكتب على الشكل: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

حيث y_h هو حل عام للمعادلة المتجانسة (EH) و y_p حل خاص للمعادلة (E).

- **حساب y_h :** المعادلة المتجانسة (EH) ذات متغيرين منفصلين و عليه:

$$y'+p(x)y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

و بمكاملة الطرفين نجد:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx \Rightarrow \ln|y|=-\int p(x)dx+K \qquad K\in\mathbb{R}$$

و بالتّالي:

$$y(x)=\pm e^{\left(-\int p(x)dx+K\right)}=Ce^{-\int p(x)dx} \qquad C=\pm e^{+K}$$

و منه الحلّ العام للمتجانسة: $$y_h(x)=Ce^{-\int p(x)dx} \qquad C\in\mathbb{R}$$

- **حساب y_p : لنستعمل طريقة تغيير الثابت للاغرنج –Lagrange-**

تعتمد هذه الطريقة على جعل الثابت الاختياري C الموجود في $y_h(x)$ دالة $C(x)$ للمتغيّر x ثمّ البحث على الحلّ الخاص لـلمعادلة (E) على الشكل : $y_p(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$

بالتعويض في (E) نجد:

$$y_p' + p(x)y_p = q(x) \Rightarrow \left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right) = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + -p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

و عليه :

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

ثمّ بالمكاملة نجد:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}$$

و بالتّعويض عن $C(x)$ في عبارة y_p نجد المطلوب:

$$y_p(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\right)e^{-\int p(x)dx}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (E):

3ـ المعادلات التفاضليّة الخطّيّة المتجانسة من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة :

تعاريف:

- نسمّي معادلة تفاضليّة خطّيّة من الرتبة الثانيّة بمعاملات ثابتة كل معادلة من الشكل:

$$y'' + py' + qy = f(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (E)$$

حيث p و q عددان حقيقيان، و f دالة مستمرّة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- المعادلة التّفاضليّة:

$$y'' + py' + qy = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (EH)$$

تُسمى المعادلة التفاضليّة المتجانسة (بدون طرف ثان) المرفقة بـ(E).

- المعادلة الجبريّة (ذات المجهول r):

$$r^2 + pr + q = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (EC)$$

تُسمى المعادلة المميّزة المرفقة بـ(E).

خلاصة: نميّز ثلاث حالات حسب إشارة مميّز المعادلة المميّزة: $\Delta = p^2 - 4q$

- **إذا كان:** $\Delta > 0$ **:** المعادلة المميّزة (EC) تقبل جذرين حقيقيّن مختلفين r_1 و r_2 و بالتّالي الحل العام لـ (EH) هو: $\boxed{y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}}$ حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.

- **إذا كان:** $\Delta = 0$ **:** المعادلة المميّزة (EC) تقبل جذراً مضاعفاً r_0 و بالتّالي الحل العام لـ(EH) هو:

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2x)e^{r_0x}}$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.

- **إذا كان:** $\Delta < 0$ **:** المعادلة المميّزة (EC) تقبل جذرين مركبين مترافقين $r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$

والحل العام لـ (EH) هو: $\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))}$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.