الفصل الثالث:
المعادلات التفاضليّة

I. عموميات:

1 . **تعريف المعادلة التفاضليّة:** نسمّي **معادلة تفاضلية** من الرتبة n حيث $\left(n \in \mathbb{N}^* \right)$ كل مساواة من الشكل:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

حيث F علاقة جبريّة تربط بين **متغيّر حرّ** x و دالّة مجهولة y و مشتقاتها حتى الرتبة n .

- **أمثلة:**

1- $xy' - y = 0$ معادلة تفاضليّة من الرتبة الأولى.

2- $y'' - y + x^2 + 1 =$ معادلة تفاضليّة من الرتبة الثانيّة.

3- $\dfrac{y'''}{x+y} = 0$ معادلة تفاضليّة من الرتبة الثالثة . . . . .إلخ

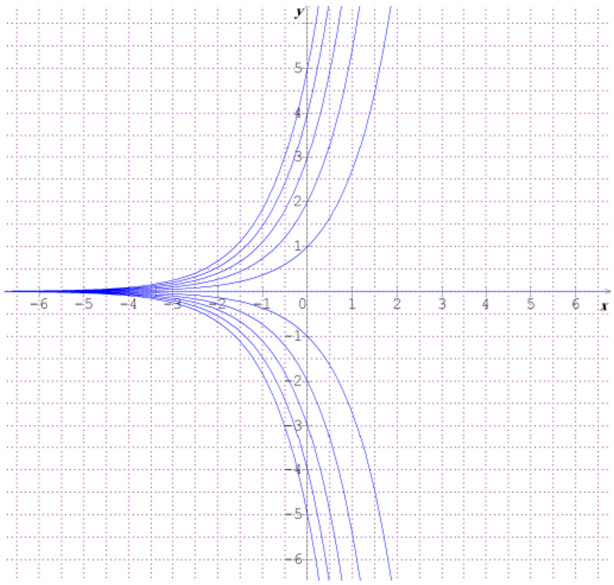
2 . **تعريف حل معادلة تفاضليّة:** نسمّي حلاّ أو جذراً للمعادلة $(*)$ في مجال حقيقي I كلّ دالّة φ قابلة للاشتقاق n مرّة على I و تحقق $(*)$ أي أنّ:

$$F\left(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots\ldots\ldots, \varphi^{(n)}\right) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

و يُسمى بيان الدّالة φ **بالمنحنى التكاملي** للمعادلة $(*)$، وعمليّة البحث على كل حلول معادلة تفاضلية تُسمى حل معادلة تفاضلية أو مكاملة معادلة تفاضلية.

مثال:

الدوال $\varphi(x) = ce^x$ حيث $c \in \mathbb{R}$ هي حل أو تكامل المعادلة $y' - y = 0$.



المنحنى التكاملي للمعادلة التفاضلية $y'-y=0$

3. تعريف المعادلة التفاضليّة من الرتبة الأولى :

نسميّ **معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى** كل مساواة من الشكل:

$$F(x,y,y')=0$$

حيث F علاقة جبريّة تربط بين **متغيّر حرّ** x و دالّة مجهولة y و دالتها المشتقة y'

في الغالب تُصاغ المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى على **الشكل الصريح** التالي:

$$\frac{dy}{dx}=y'=f(x,y)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

حيث f دالّة معطاة للمتغيرين x و y .

ملاحظتان:

- إذا كانت الدالّة f مستمرة على مجال $[a,b]$ ومتعلّقة فقط بـ x

  فإنّ تكامل أو حلّ المعادلة (1) هو الدوال الأصلية لـ f .

من أجل $x,x_0\in[a,b]$ بمكاملة طرفي $y'=f(x)$ من x_0 إلى x نجد $\int_{x_0}^{x}y'=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ وبالتّالي حل

المعادلة يُعطى بالعلاقة: $y(x)=y(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(t)dt$.

- إذا كان حل المعادلة (1) يأخذ القيمة y_0 عند النقطة x_0 من المجال I فإنّ هذا الحل وحيداً، و تسمى القيمة $y(x_0)=y_0$ بالشّرط الابتدائي.

مثال: $y=e^x$ هو الحل الوحيد للمعادلة $y'-y=0$ الذي يحقق $y(0)=1$.

4 . تعريف:

نسميّ حلاً عامّاً للمعادلة (1) كل دالّة $y(x)=\varphi(x,C)$ متعلّقة بثابت اختياري C و تحقق الشرطين التاليين:

1) y تحقق المعادلة (1) .

2) مهما يكن الشرط الابتدائي $y(x_0)=y_0$ يوجد حل $y(x)=\varphi(x,C_0)$ يحقق هذا الشرط.

(أي يوجد $C_0\in\mathbb{R}$ حيث $y_0=y(x_0)=\varphi(x_0,C_0)$).

و نسمّي حلاّ خاصا لـ (1) كل دالة $y(x)=\varphi(x,C_0)$ مُستنتجة من الحل العامّ $y(x)=\varphi(x,C)$.

التفسير الهندسي للحلّ العام و الحلّ الخاص:

هندسيا الحلّ العام لمعادلة تفاضلية يعبّر على المنحنى التكاملي لها، و الحلّ الخاص يُعبّر على المنحنى المارّ من النقطة

(x_0,y_0) .

ملاحظة: **نشير إلى أنّه لا توجد طرق عامّة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، في الفقرة القادمة سنتهتّم ببعض الطرق الخاصة لحل بعص الأنماط منها .**

II . بعض أنماط المعادلات التفاضليّة من الرتبة الاولى:

1 . المعادلات التفاضليّة ذات متغيرين منفصلين:

تعريف: نسميّ معادلة تفاضليّة من الرتبة الأولى ذات متغيّرين منفصلين كلّ معادلة تكتب على الشكل:

$$g(y)y'=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

حيث f **و** g دالتان مستمرتان على مجالين I و J على الترتيب.

ملاحظة: عمليا المعادلة التفاضليّة (1) تصاغ على الشكل $g(y)dy = f(x)dx$ (لأنّ $y' = \frac{dy}{dx}$).

حل معادلة تفاضليّة ذات متغيّرين منفصلين:

للحصول على الحل العام لمعادلة تفاضليّة ذات متغيرين منفصلين نقوم بمكاملة طرفيها :

$$g(y)dy = f(x)dx \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

إذا كانت F أصليّة لـ f على I و G أصليّة لـ g على J فإنّ الحل العام لـ (1) معطى بالدستور:

$$G(y) = F(x) + C$$

ملاحظة: نحاول التّعبير على y بدلالة x (الشكل الصريح للحل) فإن لم نستطع كتبنا x بدلالة y فإن تعذّر ذلك تركنا الحل على شكله الضمني أي: $G(y) - F(x) - C = 0$.

أمثلة:

1) كامل المعادلة التفاضليّة: $y' = \frac{x^2}{y^2}$

نفصل المغيرين فنجد: $y' = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow y^2dy = x^2dx$

و بمكاملة الطرفين نحصل على:

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + K \qquad (K \in \mathbb{R})$$

وعليه:

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C} \qquad \left(C = \frac{K}{3} \in \mathbb{R}\right)$$

2) كامل المعادلة التفاضليّة: $y' = \frac{x+1}{y-1}$

نفصل المتغيّرين لنجد:

$$(y-1)dy = (x+1)dx$$

و بمكاملة الطرفين نحصل على:

$$\frac{1}{2}y^2 - y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

ليبقى الحل على شكله الضمني:

$$\frac{1}{2}y^2-y-\frac{1}{2}x^2-x+C=0 \qquad (C\in\mathbb{R})$$

3) حل المسألة التالية:

$$\begin{cases} y'=(1+y^2)x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

لنبحث على الحل العام للمعادلة المرفقة بالمسألة

$$y'=(1+y^2)x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=(1+y^2)x \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2}=xdx \Rightarrow \arctan(y)=\frac{1}{2}x^2+C$$

و منه الحلّ العامّ للمعادلة هو :

$$y(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x^2+C\right) \qquad C\in\mathbb{R}$$

بتعويض الشرط الابتدائي في الحل العام نجد

$y(0)=\tan(C)=1$ و بالتّالي يمكن أخذ قيمة $C=\frac{\pi}{4}$

و علية حلّ المسألة (أو الحل الخاص للمعادلة) هو:

$$y(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4}\right)$$

2. المعادلات التفاضليّة المتجانسة من الرتبة الأولى:

تعريف: نقول أنّ الدّلة $f(x,y)$ ذات المتغيّرين x و y أنّها متجانسة من الرتبة $n\in\mathbb{N}$ إذا حقّقت الشّرط التّالي:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y) \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\forall(x,y)\in D_f$$

حالة خاصّة: إذا كان $n=0$ قلنا أنّ الدّلة f متجانسة من الرتبة صفر أي أنّ:

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right) \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\forall(x,y)\in D_f \wedge x\neq 0$$

مثال: الدّالة $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ متجانسة من الرتبة صفر لأنّ :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}=f(x,y) \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\forall(x,y)\neq(0,0)$$

أو يمكن إثبات ذلك اعتمادا على المساواة الثانية، من أجل $(x,y)\neq(0,0)$ لدينا :

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\frac{xy}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{1.\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

تعريف: نسمّي معادلة تفاضليّة متجانسة من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y'=f(x,y)\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

حيث f دالّة متجانسة من الرتبة صفر.

طريقة حل المعادلة المتجانسة:

عموماً تُحل هذه المعادلة على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ بتغيير المتغيّر $z=\frac{y}{x}$

بمأنّ المعادلة $(*)$ تكافئ $y'=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ بوضع $z=\frac{y}{x}$ و بالتّالي: $y=x.z$ و بالتّعويض نجد:

$$\begin{aligned}&(xz)'=f(1,z)\\ \Leftrightarrow\ & z+xz'=f(1,z)\\ \Leftrightarrow\ & x\frac{dz}{dx}=f(1,z)-z\\ \Leftrightarrow\ & \frac{dz}{f(1,z)-z}=\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

ومنه حل $(*)$ يؤول إلى حل

$$\frac{dz}{f(1,z)-z}=\frac{dx}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

وهي معادلة ذات متغيّرين منفصلين.

ملاحظة:

إذا قبلت المعادلة الجبريّة $f(1,z)-z=0$ للمجهول z جذوراً حقيقيّة $(z_k)_{1\le k\le r}$ فإنّ المستقيمات $y=z_kx$ حيث $k=1,2,\ldots\ldots,r$ هي حلول **شاذّة** لـ $(*)$ تُضاف إلى الحل العام النّاتج عن مكاملة $(**)$.

أمثلة:

1) حلّ المعادلة التفاضليّة:

$$x^2y'-y^2+xy=0\cdots\cdots\cdots\cdots(*) \quad \text{حيث} \quad x\neq 0$$

بحساب بسيط يمكن كتابة $(*)$ على الشكل التّالي:

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

الطرف الثاني لـ $(**)$ دالة للمتغيّر $\frac{y}{x}$ فهي متجانسة، بوضع $z=\frac{y}{x}$ ثمّ بالاشتقاق و التعويض نجد:

$$z+xz'=z^2-z$$

وعليه:

$$\frac{dz}{z^2-2z}=\frac{dx}{x}$$

بمكاملة الطّرفين ينتج:

$$\int\frac{dz}{z^2-2z}=\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\int\frac{dz}{z-2}-\int\frac{dz}{z}\right)=\int\frac{dx}{x}$$

و بالتّالي:

$$\ln\sqrt{\left|\frac{z-2}{z}\right|}=\ln|x|+K, \quad K\in\mathbb{R}$$

أي أنّ:

$$\sqrt{\left|\frac{z-2}{z}\right|}=Cx, \quad C=\pm e^K\in\mathbb{R}$$

بالتعويض عن z نجد الحلّ العام للمعادلة $(*)$ على الشّكل الضمني:

$$\sqrt{\left|\frac{y-2x}{y}\right|}=Cx, \quad C=\in\mathbb{R}^*$$

و بمأنّ المعادلة $z^2-2z=0$ تقبل جذرين حقيقيّين هما: $z_1=0$ و $z_2=2$ فإنّ المستقيمين: $y=0$ و $y=2x$ هما حلين

شاذين لـ $(*)$، وعلية مجموعة حلول $(*)$ هي:

$$\left\{y=0, y=2x, \sqrt{\left|\frac{y-2x}{y}\right|}=Cx, \quad C=\in\mathbb{R}^*\right\}$$

2) كامل على المجال $]0,+\infty[$ المعادلة التفاضليّة:

$$xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

نلاحظ أنّ $(*)$ تكتب على الشكل:

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$$

فهي معادلة متجانسة (لأنّ الدّالة $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$ متجانسة من الرتبة صفر)، نضع $z=\dfrac{y}{x}$ أي أنّ:

$y=xz$ بالاشتقاق والتعويض نجد:

$$z+xz'=\frac{\sqrt{x^2+(xz)^2}+xz}{x}=\sqrt{1+z^2}+z$$

أي أنّ:

$$x\frac{dz}{dx}=\sqrt{1+z^2}$$

بفصل المتغيّرين نجد:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{x}$$

بمكاملة الطّرفين ينتج:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\ln|x|+K \qquad (K\in\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow z+\sqrt{1+z^2}=Cx \qquad \left(C=\pm e^K\right)$$

لنحاول إيجاد z بدلالة x:

$$\sqrt{1+z^2}=Cx-z$$

$$\Rightarrow 1+z^2=(Cx-z)^2=C^2x^2+z^2-2Cxz$$

أي أنّ:

$$1=C^2x^2-2Cxz$$

و بالتّالي:

$$2Cxz=C^2x^2-1$$

$$\Rightarrow z=\frac{C^2x^2-1}{2Cx}$$

بالرّجوع إلى y $(y=xz)$ نجد الحلّ العام للمعادلة $(*)$:

$$y(x)=x\left(\frac{C^2x^2-1}{2Cx}\right)=\frac{1}{2}Cx-\frac{1}{2C}\qquad C\in\mathbb{R}^*$$

أمّا الحلول الشاذّة غير موجودة لأنّ المعادلة $\sqrt{1+z^2}=0$ لا تملك جذوراً حقيقيّة.

3. المعادلات التفاضليّة الخطّية من الرتبة الأولى:

تعريف:

نسمّي معادلة تفاضليّة خطّية من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y'+p(x)y=q(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

حيث p و q دالّتان مستمرّتان.

إذا كانت q معدومة قلنا أنّ المعادلة:

$$y'+p(x)y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(EH)$$

متجانسة (بدون طرف ثان) مرفقة بالمعادلة (E)

ملاحظة: مصطلح التجانس في المعادلات الخطّية نعني به المعادلة بدون طرف ثان.

أمثلة:

$$y'+y=x^2+2x-1 \quad ، \quad xy'+2y=x^2 \quad ، \quad ch(x)y'+\frac{x}{2}y=0$$

نظرية:

الفرق بين حلين للمعادلة (E) هو حل للمعادلة (EH)

برهان: ليكن y_1، y_2 حلين للمعادلة (E) أي أنّ:

$$\begin{cases} y_1'+p(x)y_1=q(x)\\ y_2'+p(x)y_2=q(x)\end{cases}$$

بالطرح طرفاً لطرف نجد:

$$(y_1'-y_2')+p(x)(y_1-y_2)=0$$

خطيّة الاشتقاق تُعطي المطلوب:

$$(y_1-y_2)'+p(x)(y_1-y_2)=0$$

نتيجة: الحل العام للمعادلة (E) يُكتب على الشكل: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

حيث y_h هو حل عام للمعادلة المتجانسة (EH) و y_p حل خاص للمعادلة (E) .

- **حساب** y_h**:** المعادلة المتجانسة (EH) ذات متغيرين منفصلين و عليه:

$$y'+p(x)y=0\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

و بمكاملة الطرفين نجد:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx \Rightarrow \ln|y|=-\int p(x)dx+K \qquad K\in\mathbb{R}$$

و بالتّالي:

$$y(x)=\pm e^{\left(-\int p(x)dx+K\right)}=Ce^{-\int p(x)dx} \qquad C=\pm e^{+K}$$

و منه الحّل العام للمتجانسة: $y_h(x)=Ce^{-\int p(x)dx} \qquad C\in\mathbb{R}$

- **حساب** y_p**:** لنستعمل طريقة تغيير الثابت للاغرنج **–Lagrange–**

تعتمد هذه الطريقة على جعل الثابت الاختيّاري C **الموجود في** $y_h(x)$ **دالة** $C(x)$ **للمتغيّر** x **ثمّ البحث على الحلّ الخاص للمعادلة** (E) **على الشكل :** $y_p(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$

بالتعويض في (E) نجد:

$$y'_p+p(x)y_p=q(x)\Rightarrow\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)'+p(x)\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)=q(x)$$
$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}+-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$
$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

و عليه :

$$C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

ثمّ بالمكاملة نجد:

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}$$

و بالتّعويض عن $C(x)$ في عبارة y_p نجد المطلوب:

$$y_p(x)=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\right)e^{-\int p(x)dx}$$

ومنه الحل العام للمعادلة (E):

$$y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}+\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\right)e^{-\int p(x)dx} \qquad C\in\mathbb{R}$$

مثال:

كامل المعادلة التفاضليّة : $y'+\frac{1}{x^2}y=e^{\frac{1}{x}}\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

المعادلة المتجانسة المرفقة بـ$(*)$هي:

$$y'+\frac{1}{x^2}y=0$$

بمكاملتها نجد:

$$y'+\frac{1}{x^2}y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}y\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x^2}$$

و بالتّالي:

$$\ln|y(x)|=\frac{1}{x}+K \qquad K\in\mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمتجانسة هو: $C=\pm e^K\in\mathbb{R}$ $y_h(x)=Ce^{\frac{1}{x}}$.

لنبحث على حلّ خاصّ لـ $(*)$ على الشكل: $y_p(x)=C(x)e^{\frac{1}{x}}$ بالاشتقاق و التعويض في $(*)$ نجد:

$$y'_p+\frac{1}{x^2}y_p=e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\left(C(x)e^{\frac{1}{x}}\right)'+\frac{1}{x^2}\left(C(x)e^{\frac{1}{x}}\right)=e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow C'(x)=1\Rightarrow C(x)=x+C \qquad C\in\mathbb{R}$$

وعليّة الحل العام لـ$(*)$هو:

$$y(x)=Ce^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}} \qquad C\in\mathbb{R}$$

مبدأ الفصل: لإيجاد حل خاص للمعادلة: $y'+p(x)y=q_1(x)+q_2(x)+\cdots\cdots+q_k(x)$

يكفي جمع الحلول الخاصة للمعادلات: $1 \le i \le k \quad y' + p(x)y = q_i(x)$

طريقة أخرى لحل المعادلة الخطيّة من الرتبة الأولى:

يمكن البحث على الحل العام للمعادلة الخطيّة $y' + p(x)y = q(x)$ على الشكل $y(x) = u(x)v(x)$.

وذلك بالاشتقاق و التعويض:

$$\begin{aligned}
&(u(x)v(x))' + p(x)u(x)v(x) = q(x) \\
&\Rightarrow u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = q(x) \\
&\Rightarrow v(x)\left(u'(x) + p(x)u(x)\right) + u(x)v'(x) = q(x)
\end{aligned}$$

و المعادلة الأخيرة مكافئة للجملة التاليّة:

$$\begin{cases} u'(x) + p(x)u(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ v'(x)u(x) = q(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بحل (1) بفصل المتغيرات نجد:

$$u(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad C \in \mathbb{R}$$

ثمّ بالتعويض علية في (2) ثمّ المكاملة نجد:

$$v(x) = \left(\frac{1}{C}\int q(x)e^{\int p(x)dx}\right) + K \qquad K \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام لـ (E) هو: $A = CK \in \mathbb{R} \quad y(x) = \left(e^{-\int p(x)dx}\right)\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + A\right)$

4 . معادلة برنولي Bernoulli:

تعريف: المعادلة التفاضليّة :

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

غير خطيّة تُسمى معادلة **برنولي**.

ملاحظة: إذا كان $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ فإنّ المعادلة (1) هي معادلة خطيّة.

- **حل معادلة برنولي:**

لمكاملة معادلة برنولي نقوم بالتّبديل: $z = y^{1-\alpha}$ فنحصل على معادلة خطيّة.

نلاحظ أنّه إذا كان $\alpha > 0$ فإنّ الدالة المعدومة $y = 0$ هي حل واضح للمعادلة (1) .

نفرض أنّ: $y \neq 0$ بقسمة طرفي (1) على y^{α} نجد:

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

و بوضع: $z = y^{1-\alpha}$ فإنّ: $z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$ المعادلة (2) تعطي:

$$z' + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

وهي معادلة خطيّة للمجهول z بمكاملتها نحصل على y حل معادلة برنولي.

مثال1: حل المعادلة التفاضليّة:

$$y' - y = x^2 y^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$(*)$ معادلة برنولي $\alpha = 2$

نلاحظ أنّ $y = 0$ حل واضح لـ $(*)$، نفرض أنّ $y \neq 0$ و بوضع $z = y^{1-2} = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ فأنّ:

$$z' = -y'y^{-2}$$

و بقسمة $(*)$ على y^2 نجد:

$$y'y^{-2} - y^{-1} = x^2$$

و بالتعويض نحصل على المعادلة الخطيّة :

$$z' + z = -x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

المعادلة المتجانسة المرفقة بـ $(**)$ هي: $z' + z = 0$ حلّها العام: $C \in \mathbb{R}$ $\quad z_h = Ce^{-x}$

و بواسطة طريقة تغيير الثابت نحصل على الحل العام لـ $(**)$: $C \in \mathbb{R}$ $\quad z = -x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}$

و باختيار مناسب للثابت C نجعل $z \neq 0$ و منة الحل العام للمعادلة $(*)$ هو:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-x^2 + 2x - 2 + Ce^{-x}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

مثال2: لنكامل المعادلة التفاضليّة:

$$y' = \frac{2}{3}xy - \frac{x}{y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

$(*)$ تكافئ المعادلة $y' - \dfrac{2}{3}xy = -xy^{-2}$ فهي معادلة برنولي مع $\alpha = -2$ نضع: $z = y^{1-(-2)} = y^3$

فنحصل على المعادلة الخطيّة:

$$z'-2xz=-3x\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة بها هو: $C\in\mathbb{R}$ $\quad z_h=Ce^{x^2}$

و باستعمال طريقة تغيّير الثابت نجد حل خاص لـ $(**)$: $z_p=\left(\int -3xe^{-x^2}\right)e^{x^2}=\frac{3}{2}$ و منه الحلّ العامّ لـ $(**)$ هو

$C\in\mathbb{R}$ $\quad z=\frac{3}{2}+Ce^{x^2}$ و عليه الحل العام لـ $(*)$ هو: $C\in\mathbb{R}$ $\quad y=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+Ce^{x^2}}$.

III. المعادلات التفاضليّة الخطّيّة من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة :

تعاريف:

- نسمّي معادلة تفاضليّة خطّيّة من الرتبة الثانيّة بمعاملات ثابتة كل معادلة من الشكل:

$$y''+py'+qy=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

حيث p و q عددان حقيقيان، و f دالة مستمرّة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- المعادلة التّفاضليّة:

$$y''+py'+qy=0\cdots\cdots\cdots\cdots(EH)$$

تُسمى المعادلة التفاضليّة المتجانسة (بدون طرف ثان) المرفقة بـ (E) .

- المعادلة الجبريّة (ذات المجهول r):

$$r^2+pr+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots(EC)$$

تُسمى المعادلة المميّزة المرفقة بـ (E) .

أمثلة:

$y''+y'-y=x^2$ ، $y''=y$ ، $y''+3y=-1$ ، $y''-y'=\ln(x)$ .... إلخ.

حل المعادلة (E):

نعني بحل أو بمكاملة المعادلة (E) ايجاد دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق مرّتين على المجال I و تحقق (E) .

نظرية:

الفرق بين حلين كيفيّين للمعادلة (E) هو حل للمعادلة المتجانسة (EH) .

برهان: ليكن y_1 ، y_2 حلّين للمعادلة (E) أي أنّ:

$$\begin{cases} y_1''+py_1'+qy_1=f(x) \\ y_2''+py_2'+qy_2=f(x) \end{cases}$$

بالطرح طرفاً لطرف نجد:

$$(y_1''-y_2'')+p(y_1'-y_2')+q(y_1-y_2)=0$$

خطيّة الاشتقاق تُعطي :

$$(y_1-y_2)''+p(y_1-y_2)'+q(y_1-y_2)=0$$

أي أنّ y_1-y_2 حل للمعادلة المتجانسة (EH) و هو المطلوب.

نتيجة:

الحل العامّ للمعادلة (E) هو مجموع الحلّ العامّ للمعادلة المتجانسة (EH) و حل خاصّ لـ (E)

أي أنّ: $y=y_h+y_p$

حيث: y_h الحلّ العام للمتجانسة (EH) و y_p حل خاص للمعادلة (E)

أ- حل المعادلة المتجانسة (EH):

يمكن التّأكّد بسهولة بأنّ مجموع حلين لـ (EH) هو حل لـ (EH)، و ضرب سلّمية حقيقيّة في حل لـ (EH) هو حلّ كذالك لـ (EH)، أي أنّ مجموعة حلول المعادلة الخطّية المتجانسة (EH) هي فضاء **شعاعي جزئي** S على $\mathbb{R}$ من فضاء الدوال المستمرة على المجال I بالنسبة لجمع الدوال و ضرب دالة في سُلمية حقيقيّة.

و الهدف الآن هو معرفة الحل العام للمعادلة المتجانسة انطلاقا من معرفة أساس لهذا الفضاء الشعاعي، أي نعيّن

عائلة مولّدة لـ S و مستقلة خطيا.

تذكير: نقول عن حلين y_1 و y_2 للمعادلة المتجانسة (EH) أنهما مستقلاّن خطّيا على I إذا لم يكونا متناسبين أي أنّ:

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$$

قضيّة:

الحلاّن y_1 و y_2 للمعادلة المتجانسة (EH) مستقلين خطياّ على I **إذا وفقط إذا كان** المحدد

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

غير معدوم على المجال I .

برهان: نستعمل العكس النقيض

$\Leftarrow$) نفرض أنّ: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$ هذا يؤدّي إلى أنّ: $\dfrac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = 0$ أيّ أنّ:

$\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = 0$ معناه أنّ الدّالة $\dfrac{y_2}{y_1}$ ثابتة على المجال I أيّ أنّه : $\dfrac{y_1}{y_2} = C$ $\exists C \in \mathbb{R}$ ومنه y_1 و y_2 مرطبتين

خطياّ .

$\Rightarrow$) نفرض أنّ الحلّين y_1 و y_2 مرطبتين خطياّ أي: $y_1 = Cy_2$ $\exists C \in \mathbb{R}$ و بالتّالي:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cy_2 & y_2 \\ Cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = Cy_2y_2' - Cy_1'y_2 = 0$$

و منه المطلوب.

نظرية: الحل العام للمعادلة (EH) يُكتب على شكل **مزج خطيّ** لحلين y_1 و y_2 مستقلين خطّيا لها.

أي أنّ الحل العام لـ (EH): $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.

برهان: ليكن y_1 و y_2 حلين مستقلين خطّيا لـ (EH)

أولا: بمأنّ مجموعة حلول (EH) لها بنية فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ فإنّ كل مزج خطّي لـ y_1 و y_2 هو حل لـ (EH)

.

ثانيا: لنبرهن أنّ المسألة : $(*)$………… $\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$ تقبل حلاً وحيدّا في شكل مزج خطّي لـ y_1 و y_2

أي نبحث على **ثابتين حقيقين** C_1 و C_2 **وحيدين** حيث : $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ حل لـ $(*)$

بالتعويض في الشرطين الابتدائيين نجد: $\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \alpha \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = \beta \end{cases}$ و هي جملة خطّية لكرامر (Cramer)

محددها غير معدوم (لأنّ y_1 و y_2 حلين مستقلّين خطّيا لـ (EH) فإنّ

$\left(W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0 \right.$

فهي تقبل حلاً وحيداً :
$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & y_2 \\ \beta & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \dfrac{\alpha y_2' - \beta y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \\ C_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & \alpha \\ y_1' & \beta \end{vmatrix}}{W} = \dfrac{\beta y_1 - \alpha y_1'}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \end{cases}$$
و هو المطلوب.

قضيّة: الدّالة e^{rx} حل للمعادلة المتجانسة (EH) **إذا وفقط إذا كان** r حل للمعادلة المميّزة (EC).

برهان:

e^{rx} حل للمعادلة (EH) $\quad (e^{rx})'' + p(e^{rx})' + q(e^{rx}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$

$\Leftrightarrow \quad (r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$

و بمأنّ المقدار e^{rx} لا ينعدم فإنّ: $r^2 + pr + q = 0$ و هو المطلوب.

و أخيراً نقدّم الخلاصة التالية التي تُعطي الحلّ العام للمعادلة المتجانسة (EH)

خلاصة: نميّز ثلاث حالات حسب إشارة مميّز المعادلة المميّزة: $\Delta = p^2 - 4q$

- **إذا كان:** $\Delta > 0$ **:** المعادلة المميّزة (EC) تقبل جذرين حقيقيّين مختلفين r_1 و r_2 و بالتّالي $y_1 = e^{r_1x}$ و $y_2 = e^{r_2x}$ حليّن مستقلين خطّيا للمعادلة المتجانسة (EH) و عليه الحل العام لها هو:

$$\boxed{y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}}$$ حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختيّاريان.

- **إذا كان:** $\Delta = 0$ **:** المعادلة المميّزة (EC) تقبل جذراً مضاعفاً r_0 و بالتّالي $y_1 = e^{r_0x}$ و $y_2 = xe^{r_0x}$ حليّن مستقلين خطّيا للمعادلة المتجانسة (EH) و عليه الحل العام لها هو:

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2x)e^{r_0x}}$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختيّاريان.

- **إذا كان:** $\Delta < 0$ **:** المعادلة المميّزة (EC) تقبل جذرين مركبين مترافقين $r_1 = \alpha + i\beta$ $\quad r_2 = \alpha - i\beta$

و لدينا $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ و $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ حلين مستقلّين خطّيا للمعادلة المتجانسة و عليه الحل العام لها هو:

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))}$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختيّاريان.

أمثلة:

لنحل المعادلات التالية:

$$y''+y'-2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y''-2y'+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$y''+y'+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

- المعادلة المميّزة المرفقة بـ (1) هي: $r^2+r-2=0$ مميّزها $\Delta=9>0$ $r_1=-2$ و $r_2=1$ و علية

الحلّ العام لـ (1) هو: $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ $\quad y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$

- المعادلة المميّزة المرفقة بـ (2) هي: $r^2-2r+1=0$ مميّزها $\Delta=0$ حلّها المضاعف $r_0=1$ و علية

الحلّ العام لـ (2) هو: $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ $\quad y(x)=(C_1+C_2x)e^{x}$

- المعادلة المميّزة المرفقة بـ (3) هي: $r^2+r+1=0$ مميّزها $\Delta=-3<0$ حليّها المركبين المترافقين هما

$r_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و $r_2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و علية الحلّ العام لـ (3) هو:

$$y(x)=e^{\frac{-x}{2}}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

ب- البحث على حلّ خاصّ للمعادلة غير المتجانسة (E)

تعتبر عمليّة البحث على حل خاصّ للمعادلة (E) **العائق الأكبر** لحلّ هذا النمط من المعادلات، نستعرض الطريقة الفعّالة و المهمّة كما في المعادلات الخطيّة من الرتبة الأولى و هي **طريقة تغيير الثّابتين** الواردين في الحل العام للمعادلة المتجانسة.

ليكن y_1 و y_2 حلين مستقلين خطّيا لـ (EH) و بالتّالي الحل العام للمتجانسة (EH) يُكتب على الشكل :

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ حيث C_1 و C_2 ثابتان حقيقيان اختياريان.

لنبحث على حل خاص للمعادلة (E) من الشكل: $y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

حيث C_1 و C_2 دالّتين للمتغيّر الحقيقي x .

بالاشتقاق نجد:

$$y'_p(x) = C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + C_1(x)y'_1 + C_2(x)y'_2$$

نختار C_1 و C_2 حيث:

$$C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

و علية y'_p يصبح:

$$y'_p(x) = C_1(x)y'_1 + C_2(x)y'_2$$

بالاشتقاق مرّة ثانيّة نجد:

$$y''_p(x) = C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + C_1(x)y''_1 + C_2(x)y''_2$$

بالتعويض في المعادلة (E) نحصل على:

$$\left(C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + C_1(x)y''_1 + C_2(x)y''_2\right) + p\left(C_1(x)y'_1 + C_2(x)y'_2\right) + q\left(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\right) = f(x)$$

و بالتّالي:

$$C_1\left(\underbrace{y''_1 + py'_1 + qy_1}_{=0}\right) + C_2\left(\underbrace{y''_2 + py'_2 + qy_2}_{=0}\right) + C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x)$$

و بمأنّ y_1 و y_2 حلين للمعادلة المتجانسة فإنّ:

$$C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

بدمج المعادلتين (1) و (2) نحصل على **جملة خطّية لكرامر** للمجهولين C_1' و C_2' :

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

حلّها الوحيد:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \\ C_2'(x) = \dfrac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \end{cases}$$

بالمكاملة نجد الدّالتين C_1 و C_2 و بتعويض قيمتيهما في العلاقة

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

نحصل على الحلّ الخاص المنشود لـ (E) .