

Examen	12/06/2019	Université CHAHIDE HAMMA LAKHDAR EL-Oued	Nom :
Module : Méthode des volumes finis		Faculté de technologie	Prénom :
1 <sup>ère</sup> Master Energétique		Département de génie mécanique	

**Exo1 (6 pt):**

On considère une plaque d'épaisseur  $L=10$  mm, ayant la conductivité thermique constante  $\lambda=89$  W/mK, et un puits de chaleur  $S = - 877$  kW/m<sup>3</sup>. Les faces A et B de la plaque se trouvent aux températures constantes de 144°C et 238°C respectivement. En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions y et z soient très grandes et le transfert de chaleur s'effectue dans la direction x seulement, Donner le système d'équations algébriques correspondant, en prenant  $n=5$  VC (le nombre de volume de contrôle).

L'équation gouvernante est  $\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$

A  B

**Solution**

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -a_w & a_p & -a_E & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -a_w & a_p & -a_E & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -a_w & a_p & -a_E & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -a_w & a_p & -a_E \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5 \\
 T_6
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 144 \\
 b \\
 b \\
 b \\
 b \\
 238
 \end{bmatrix}$$

$\Delta x = L/n = 10/5 = 2 \text{ cm}$   
 $a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + b$   
 $a_w = a_E = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{89}{2} = 44.5$   
 $a_p = a_E + a_w = 89$   
 $b = S \Delta x = -877 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = -17.54$   
 $T_1 = T_A; T_6 = T_B$

**Exo2 (10 pt):**

On considère une plaque métallique mince, ayant la distribution de température *initiale*  $T(0, x) = 100$  °C. À l'instant  $t = 0$ , la température de la paroi "East" de la plaque est brusquement mise à 50 °C. Les autres surfaces de la plaque sont *isolées*. Résoudre ce problème en utilisant le *schéma explicite* de la MVF pour discrétiser l'EDP en question ( $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right\}$ ), en prenant un pas de temps  $\Delta t = 2$  s, pour calculer la *distribution transitoire* de la température à l'instant  $t = 8$  s, pour  $n=5$  VC. Les données du problème sont :  $L = 5$  cm,  $\lambda = 21$  W/mK et  $\rho C_p = 0.5 \times 10^8$  J/m<sup>3</sup>K.

- 1- Donner l'équation discrétisée pour les nœuds interne
- 2- Donner l'équation discrétisée pour le nœud 'West'
- 3- Vérifier la condition de stabilité
- 4- Calculer la température dans les instants  $t = 0$  s, 2 s, 4 s, 6 s, et 8 s

$T_{\text{West}}$    $T_{\text{East}}$



Solution	Relation mathématique finale avec l'application numérique (العلاقة الرياضية النهائية مع التعويض العددي)					
	$\Delta x = \frac{L}{n} = \frac{5}{5} = 1 \text{ cm}$					
Question 1	$a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + a_p T_p / a_p = 5c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0,5 \text{ W} \cdot \frac{2}{2} = 25 \text{ W}$					
	$a_w = a_E = \frac{\lambda}{\Delta x} = 21 / 10^{-2} = 2100 ; / a_p = a_p - a_w - a_E = 24,58 \text{ W}$					
Question 2	$T_{West} = T_p = \rho \frac{a_p T_p}{2} = a_E T_E + \frac{a_p T_p}{2}$ $12,5 \text{ W} T_p = 21 \text{ W} T_E + 12,29 \text{ W} T_p$					
Question 3	$\frac{d \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{\lambda}{5c_p} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} ; \frac{\lambda}{5c_p} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{21}{0,5 \cdot 8} \cdot \frac{2}{10^{-4}} = 0,0084 < 0,5$					
Question 4						
Nœuds →	$T_{West}$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_{East}$
Temps (s) ↓						
$t = 0 \text{ s}$	100	100	100	100	100	50
$t = 2 \text{ s}$	100	100	100	100	99,58	50
$t = 4 \text{ s}$	100	100	100	99,99	99,16	50
$t = 6 \text{ s}$	100	100	100	99,98	98,76	50
$t = 8 \text{ s}$	100	100	99,99	99,97	98,36	50

### Question de cours (4 pt)

Citer l'énoncé des 4 règles de Patankar pour l'application de la MVF?

Règle N 1	Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle. L'expression du flux à travers d'interface doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.
Règle N 2	Tous les coefficients $a_p$ et $a_w$ doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.
Règle N 3	Pente négative dans le terme source linéaire. Lors de la linéarisation du terme source $S = S_c + S_p T_p$ , la pente $S_p$ doit être $\leq 0$ , car sinon on peut avoir $a_p < 0$ avec des $a_w > 0$ (contraire à la règle n°2).
Règle N 4	$a_p = \sum a_w$ si $S = 0$ $a_p \geq \sum a_w$ si $S \neq 0$



Rattrapage S2	...../...../2019	Université CHAHIDE HAMMA LAKHDAR EL-Oued	Nom :
Module : Méthode des volumes finis		Faculté de technologie	Prénom :
1 <sup>ère</sup> Master Energétique		Département de génie mécanique	

**Exo1 (6 pt):**

Calculer la répartition de la température stationnaire à travers une barre de longueur de 2 cm de section  $A=1\text{m}^2$ ; de conductivité thermique  $k=0.5\text{ W/m.C}^\circ$  et soumise à ses extrémité aux températures  $T_A=100\text{C}^\circ$  et  $T_B=200\text{C}^\circ$  et a une source de chaleur  $q=1000\text{ kW/m}^3$ . Le pas d'espace est  $dx=0.004\text{ m}$

L'équation gouvernante est  $\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+q=0$



Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + b$   
 $a_w = a_E = \frac{0.1}{0.004} = 125$   
 $a_p = a_w + a_E = 250$   
 $b = \bar{S} \Delta x = 10 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 4000$

**Exo2 (8 pt):**

Une barre métallique se trouve initialement à une température uniforme de  $320\text{C}^\circ$  de longueur de 2 cm de section  $A=1\text{m}^2$ ; de conductivité thermique  $k=10\text{ W/m.k}^\circ$  et  $\rho c_p = 10^7\text{ J/m}^3\text{k}$ . A l'instant  $t=0$  la température de paroi 'West' de la barre est brusquement réduite à  $0\text{C}^\circ$ , l'autre extrémité 'East' est brusquement réduite à  $120\text{C}^\circ$ . On considère une source de chaleur uniforme  $S=2000\text{ W/m}^3$ . Le pas d'espace est  $\Delta x=4\text{ mm}$

L'équation gouvernante est  $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+S=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$ . En utilisons un schéma explicite et un pas de temps

$\Delta t=4\text{ s}$

- 1- Donner l'équation discrétisée pour les nœuds interne
- 2- Calculer la température dans les instants  $t=0\text{ s}, 4\text{ s}, 8\text{ s}, 12\text{ s et } 16\text{ s}$



Solution						
Relation mathématique finale avec l'application numérique (العلاقة الرياضية النهائية مع التعويض العددي)						
Question 1	$a_p T_p = a_w T_w^o + a_e T_e^o + a_p^o T_p^o + S_C$ / $a_p = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^4$ $a_w = a_e = \frac{\lambda}{\Delta x} = 2800$ ; $S_C = 90 \times 28$ / $a_p^o = a_p - a_w - a_e = 5000$					
Question 2						
Nœuds →	$T_{West}$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_{East}$
Temps (s) ↓						
$t = 0s$	0	320	320	320	320	120
$t = 4s$	0	240	320,0008	320,0008	270,0008	120
$t = 8s$	0	200,0014	300,0016	307,5016	245,0014	120
$t = 12s$	0	171,0019	276,87	290,0024	229,37	120
$t = 16s$	0	156,82	254,69	271,56	217,18	120

### Question de cours (6 pt)

Donner la forme générale de l'équation de transport d'une quantité physique " $\phi$ " en précisant le nom de chaque terme

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi)}_1 + \underbrace{\text{div}(\rho \vec{V} \phi)}_2 = \underbrace{\text{div}[\Gamma_\phi (\text{grad}) \phi]}_3 + \underbrace{S_\phi}_4$$

- 1) Terme de stockage
- 2) Terme de convection
- 3) Terme de diffusion
- 4) Terme source



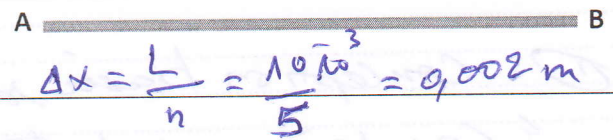
Examen	21-01-2020	Université CHAHIDE HAMMA LAKHDAR EL-Oued	Nom :
Module : Logiciel de Simulation		Faculté de technologie	Prénom :
2 <sup>ème</sup> Master EnRe		Département de génie mécanique	

**Ques1** (10 pt):

On considère une plaque d'épaisseur  $L=10$  mm, ayant la conductivité thermique constante  $\lambda=100$  W/mK, et un puits de chaleur  $S = -100$  kW/m<sup>3</sup>. Les faces A et B de la plaque se trouvent aux températures constantes de 100°C et 300°C respectivement. En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions y et z soient très grandes et le transfert de chaleur s'effectue dans la direction x seulement. En prenant  $n=5$  VC (le nombre de volume de contrôle).

1. Donner l'équation discrétisée pour les nœuds interne en utilisant la méthode de volume finis
2. Donner le système d'équations algébriques correspondant

L'équation gouvernante est  $\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$



**Solution**

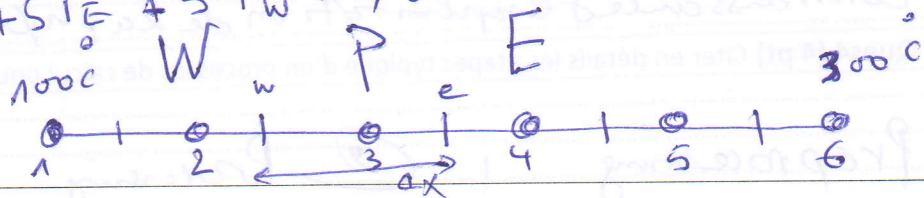
1

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \Rightarrow \left[ \lambda \frac{dT}{dx} \right]_w^e + \bar{S} [x]_w^e = 0$$

$$\Rightarrow \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta x = 0 \Rightarrow \lambda \left( \frac{T_e - T_w}{\Delta x} \right) - \lambda \left( \frac{T_w - T_{w-1}}{\Delta x} \right) + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-2 \frac{\lambda}{\Delta x} T_w + \frac{\lambda}{\Delta x} T_e + \frac{\lambda}{\Delta x} T_{w-1} + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-10 T_w + 5 T_e + 5 T_{w-1} - 0,2 = 0$$



2

$$\begin{bmatrix} -100 & 50 & 0 & 0 \\ 50 & -100 & 50 & 0 \\ 0 & 50 & -100 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -499,8 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ -1499,8 \end{bmatrix}$$

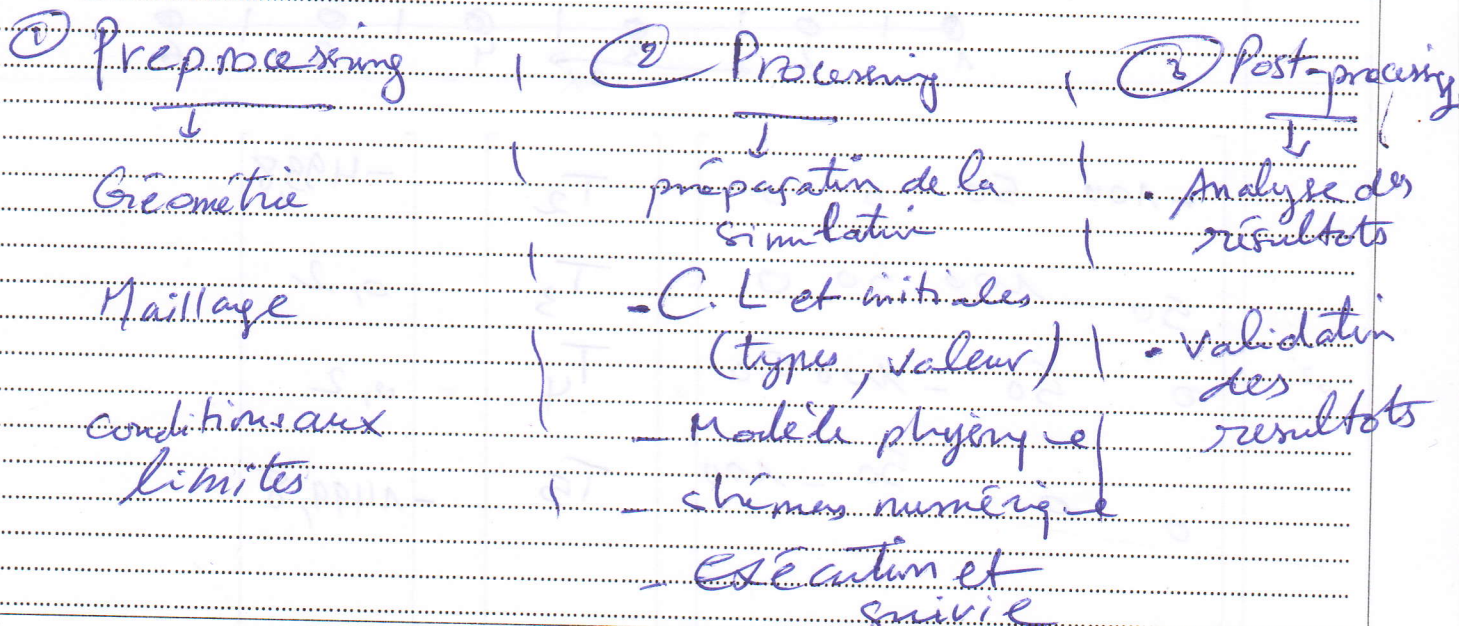
Ques2(3 pt) : Citer l'énoncé des 4 règles de Patankar pour l'application de la MVF?

- ① Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle  
L'expression du flux à travers l'interface doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins immédiats
- ② Tous les coefficients  $a_p$  et  $a_{vs}$  doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée
- ③ pente négative dans le terme source linéaire
- ④  $a_p = \sum a_{vs} \text{ si } S=0, a_p > 0, \sum a_{vs} \text{ si } S \neq 0$

Ques3 (3 pt) Expliquer Pourquoi en utilisant les Logiciels de CFD

- ① Conception basée sur la simulation au lieu de "construire et tester"
- ② plus rapide et plus précise que la CFD
- ③ CFD Fournit une base de donnée haute fidélité pour le diagnostic du champ d'écoulement
- ④ simulation de phénomènes d'écoulement physiques difficiles à expérimenter
- ⑤ simulation à grande échelle (ex, navires, avions)
- ⑥ connaissance et exploitation de la physique des écoulements

Ques4 (4 pt) Citer en détails les étapes typique d'un processus de calcul pour un logiciel de CFD



Examen	21-01-2020	Université CHAHIDE HAMMA LAKHDAR EL-Oued	Nom :
Module : Logiciel de Simulation		Faculté de technologie	Prénom :
2 <sup>ème</sup> Master EnRe		Département de génie mécanique	

**Ques1** (10 pt):

On considère une plaque d'épaisseur  $L=10$  mm, ayant la conductivité thermique constante  $\lambda=100$  W/mK, et un puits de chaleur  $S = -100$  kW/m<sup>3</sup>. Les faces A et B de la plaque se trouvent aux températures constantes de 100°C et 300°C respectivement. En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions y et z soient très grandes et le transfert de chaleur s'effectue dans la direction x seulement. En prenant  $n=5$  VC (le nombre de volume de contrôle).

1. Donner l'équation discrétisée pour les nœuds interne en utilisant la méthode de volume finis
2. Donner le système d'équations algébriques correspondant

L'équation gouvernante est  $\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$

A  B

$$\Delta x = \frac{L}{n} = \frac{10 \times 10^{-3}}{5} = 0,002 \text{ m}$$

**Solution**

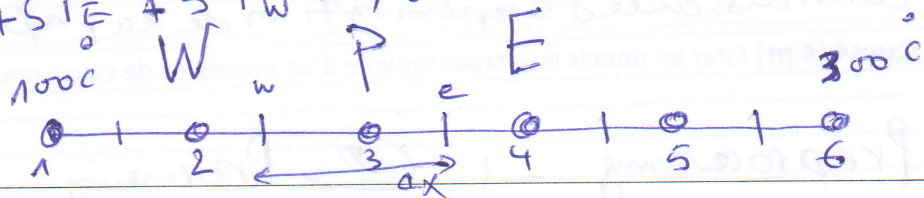
1

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \Rightarrow \left[ \lambda \frac{dT}{dx} \right]_w^e + \bar{S} [x]_w^e = 0$$

$$\Rightarrow \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta x = 0 \Rightarrow \lambda \left( \frac{T_e - T_P}{\Delta x} \right) - \lambda \left( \frac{T_P - T_w}{\Delta x} \right) + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-2 \frac{\lambda}{\Delta x} T_P + \frac{\lambda}{\Delta x} T_E + \frac{\lambda}{\Delta x} T_w + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-10 T_P + 5 T_E + 5 T_w - 0,2 = 0$$



2

$$\begin{bmatrix} -100 & 50 & 0 & 0 \\ 50 & -100 & 50 & 0 \\ 0 & 50 & -100 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -499,8 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ -1499,8 \end{bmatrix}$$

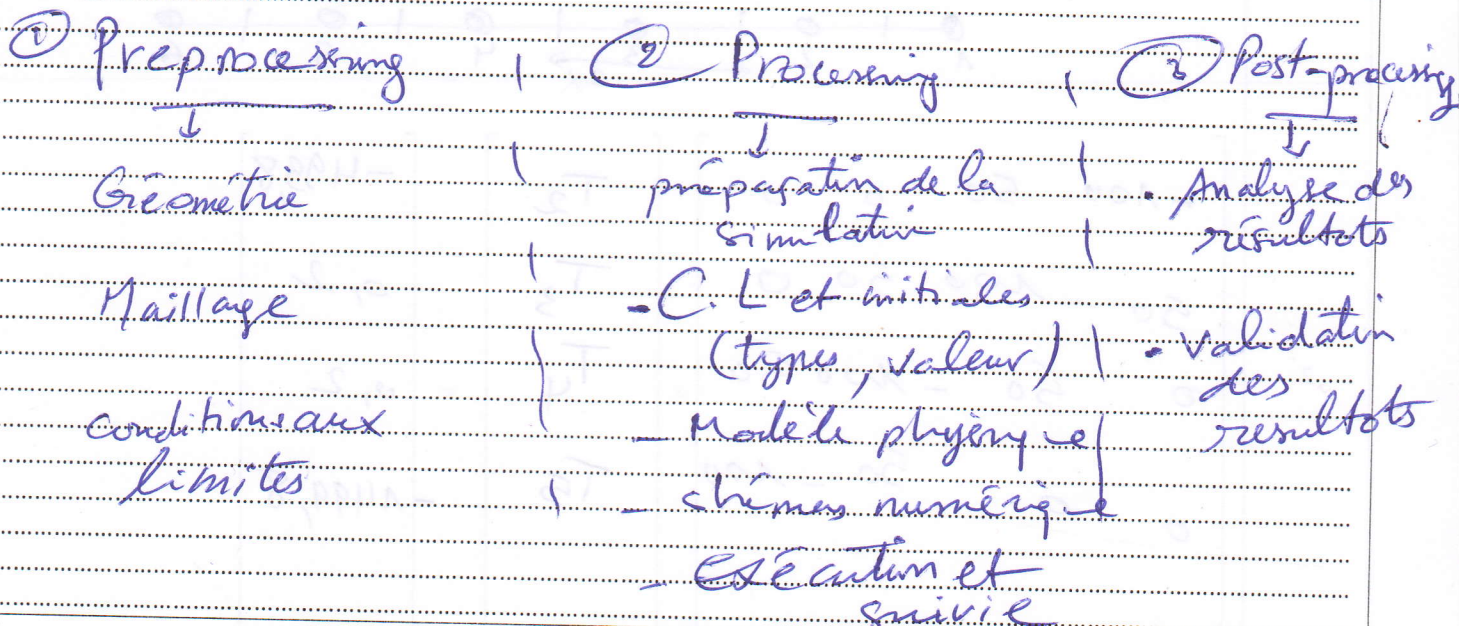
Ques2(3 pt) : Citer l'énoncé des 4 règles de Patankar pour l'application de la MVF?

- ① Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle  
L'expression du flux à travers l'interface doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins immédiats
- ② Tous les coefficients  $a_p$  et  $a_{vs}$  doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée
- ③ pente négative dans le terme source linéaire
- ④  $a_p = \sum a_{vs} \text{ si } S=0, a_p > 0, \sum a_{vs} \text{ si } S \neq 0$

Ques3 (3 pt) Expliquer Pourquoi en utilisant les Logiciels de CFD

- ① Conception basée sur la simulation au lieu de "construire et tester"
- ② plus rapide et plus précise que la CFD
- ③ CFD Fournit une base de donnée haute fidélité pour le diagnostic du champ d'écoulement
- ④ simulation de phénomènes d'écoulement physiques difficiles à expérimenter
- ⑤ simulation à grande échelle (ex, navires, avions)
- ⑥ connaissance et exploitation de la physique des écoulements

Ques4 (4 pt) Citer en détails les étapes typique d'un processus de calcul pour un logiciel de CFD





Rattrapage	2019/2020	Université CHAHIDE HAMMA LAKHDAR EL-Oued	Nom :
Module : Logiciel de Simulation		Faculté de technologie	Prénom :
2 <sup>ème</sup> Master EnRe		Département de génie mécanique	

**Ques1 (10 pt):**

Calculer la répartition de la température stationnaire à travers une barre de longueur de 2 cm de section A ; de conductivité thermique  $k=0.5 \text{ W/m.C}^\circ$  et soumise à ses extrémités aux températures  $T_A=50\text{C}^\circ$  et  $T_B=100 \text{C}^\circ$  et a une source de chaleur  $S=1000 \text{ W/m}^3$ . Le pas d'espace est  $dx=0.004 \text{ m}$

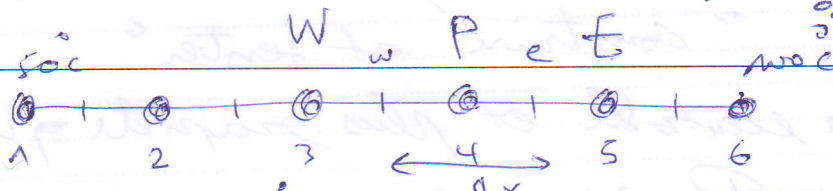
1. Donner l'équation discrétisée pour les nœuds interne en utilisant la méthode de volume finis
2. Donner le système d'équations algébriques correspondant

L'équation gouvernante est  $\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$



$$n = \frac{L}{\Delta x} = \frac{2 \times 10^{-2}}{0.004} = 5$$

**Solution**



1

$$A \int_w^e \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \Rightarrow \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-2 \frac{dT_P}{dx} + \frac{dT_E}{dx} + \frac{dT_W}{dx} + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-500 T_P + 250 T_E + 250 T_W + 4 = 0$$

2

$$\begin{bmatrix} -500 & 250 & 0 & 0 \\ 250 & -500 & 250 & 0 \\ 0 & 250 & -500 & 250 \\ 0 & 0 & 250 & -500 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12504 \\ -4 \\ -4 \\ -25004 \end{bmatrix}$$

Ques2(3 pt) : Donner la forme générale de l'équation de transport d'une quantité physique " $\phi$ " en précisant le nom de chaque terme

$$\underbrace{\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t}}_1 + \underbrace{\text{div}(\rho \vec{v} \phi)}_2 = \text{div} \left[ \underbrace{\rho (\Gamma_{\phi})}_{3} \nabla \phi \right] + \underbrace{S_{\phi}}_4$$

① Terme de stockage

④ Terme Source

② Terme de Convection

③ Terme de diffusion

Ques3 (3 pt) Expliquer Pourquoi en utilisant les Logiciels de CFD

- ① conception basée sur la simulation au lieu de "construire et tester"
- ② plus récente et plus rapide que le EFD
- ③ CFD fournit une base de donnée haute fidélité
- ④ simulation de phénomène d'écoulement physique difficile à exprimer etc
- ⑤ simulation à grand échelle (en, navire, avions)
- ⑥ connaissance et exploitation de la physique des écoulements

Ques4 (4 pt) Donner les avantages et les inconvénients d'un maillage non structurés

Avantage =

- ① leur génération est plus automatique
- ② ils sont adaptés aux formes complexes
- ③ ils nécessitent moins de points par rapport aux maillage structurés

Inconvénients =

- ① ils augmentent les erreurs
- ② le temps de calcul est en général plus long
- ③ il est difficile de contrôler localement la densité des mailles

Rattrapage	2019/2020	Université CHAHIDE HAMMA LAKHDAR EL-Oued	Nom :
Module : Logiciel de Simulation		Faculté de technologie	Prénom :
2 <sup>ème</sup> Master EnRe		Département de génie mécanique	

**Ques1 (10 pt):**

Calculer la répartition de la température stationnaire à travers une barre de longueur de 2 cm de section A ; de conductivité thermique  $k=0.5 \text{ W/m.C}^\circ$  et soumise à ses extrémités aux températures  $T_A=50\text{C}^\circ$  et  $T_B=100 \text{C}^\circ$  et a une source de chaleur  $S=1000 \text{ W/m}^3$ . Le pas d'espace est  $dx=0.004 \text{ m}$

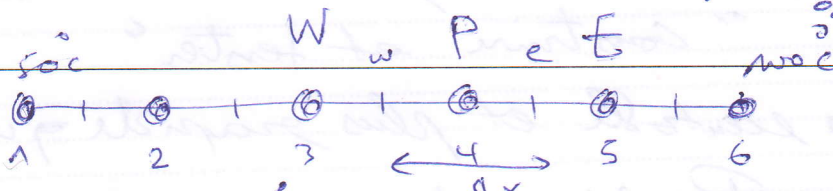
1. Donner l'équation discrétisée pour les nœuds interne en utilisant la méthode de volume finis
2. Donner le système d'équations algébriques correspondant

L'équation gouvernante est  $\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$



$$n = \frac{L}{\Delta x} = \frac{2 \times 10^{-2}}{0.004} = 5$$

**Solution**



1

$$A \int_w^e \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \Rightarrow \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-2 \frac{dT_P}{dx} + \frac{dT_E}{dx} + \frac{dT_W}{dx} + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$-500 T_P + 250 T_E + 250 T_W + 4 = 0$$

2

$$\begin{bmatrix} -500 & 250 & 0 & 0 \\ 250 & -500 & 250 & 0 \\ 0 & 250 & -500 & 250 \\ 0 & 0 & 250 & -500 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12504 \\ -4 \\ -4 \\ -25004 \end{bmatrix}$$

Ques2(3 pt) : Donner la forme générale de l'équation de transport d'une quantité physique " $\phi$ " en précisant le nom de chaque terme

$$\underbrace{\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t}}_1 + \underbrace{\text{div}(\rho \vec{v} \phi)}_2 = \text{div} \left[ \underbrace{\rho (\Gamma \text{grad}) \phi}_3 \right] + \underbrace{S_\phi}_4$$

① Terme de stockage

④ Terme Source

② Terme de Convection

③ Terme de diffusion

Ques3 (3 pt) Expliquer Pourquoi en utilisant les Logiciels de CFD

- ① conception basée sur la simulation au lieu de "construire et tester"
- ② plus exacte et plus rapide que le EFD
- ③ CFD fournit une base de donnée haute fidélité
- ④ simulation de phénomènes d'écoulement physique difficile à exprimer etc
- ⑤ simulation à grand échelle (en, navire, avions)
- ⑥ connaissance et exploitation de la physique des écoulements

Ques4 (4 pt) Donner les avantages et les inconvénients d'un maillage non structurés

Avantage =

- ① leur génération est plus automatique
- ② ils sont adaptés aux formes complexes
- ③ ils nécessitent moins de points par rapport aux maillage structurés

Inconvénients =

- ① ils augmentent les erreurs
- ② le temps de calcul est en général plus long
- ③ il est difficile de contrôler localement la densité des mailles

Examen	2020-2021	Université CHAHIDE HAMMA LAKHDAR EL-Oued	Nom :
Module :CFD/ Logiciel de Simulation		Faculté de technologie	Prénom :
2 <sup>ème</sup> Master En/En.Re		Département de génie mécanique	

**Ques1 (11 pt):**

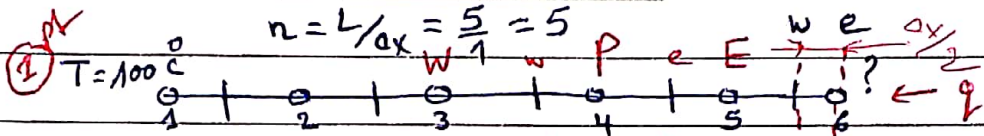
On considère une barre cylindrique de l'aire  $A$  avec une extrémité maintenue à la température constante de  $T = 100\text{ °C}$  et l'autre extrémité reçoit un flux de chaleur  $q$ . Trouver la solution de ce problème en utilisant la MVF pour discrétiser l'EDP en question  $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right\} - 15T = 0$ .

Les données du problème sont :  $L = 5\text{ cm}$ ,  $\lambda = 30\text{ W/mK}$ ,  $\Delta x = 1\text{ cm}$  et  $A = 2\text{ cm}^2$ .

1. Donner l'équation discrétisée pour les nœuds interne en utilisant la méthode de volume finis
2. Donner le système d'équations algébriques correspondant

$T = 100\text{ °C}$    $q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 1000\text{ W/m}^2$

$n = L/\Delta x = \frac{5}{1} = 5$



Solution

2pt

$$A \int_{w}^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx - A \int_w^e 15T dx = 0 \Rightarrow \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w - 15T_p \Delta x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta x} [T_E - T_P] - \frac{\lambda}{\Delta x} [T_P - T_W] - 15T_P \Delta x = 0 ; \quad \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{30}{10^{-2}} = 3000$$

2pt

$-T_P \left[ 2 \frac{\lambda}{\Delta x} + 15 \Delta x \right] + \frac{\lambda}{\Delta x} T_E + \frac{\lambda}{\Delta x} T_W = 0$  pour les nœuds 2, 3, 4, 5

Pour le nœud 6:

2pt

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w - 15T_6 \Delta x = 0 \Rightarrow -30,000 T_6 + 30 T_5 = \frac{10000}{10^{-2}} = 10$$

4pt

2

$$\begin{bmatrix} a_p & a_E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_w & a_p & a_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_w & a_p & a_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_w & a_p & a_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & -30,000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$a_p = -60,000$   
 $a_E = 30$   
 $a_w = 30$



Ques2(3 pt) : Expliquer la différence entre la méthode des différences finis et la méthode des volumes finis

Méthode DF (115) pt	Méthode VF (115) pt
<ul style="list-style-type: none"><li>• Mathématique</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• physique</li></ul>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Basée sur le développement de Taylor</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• intégration de l'équation de transport sur le volume de contrôle</li></ul>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Non adaptée pour le Maillage non structure</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• adaptée pour le maillage non structure</li></ul>
<ul style="list-style-type: none"><li>• La solution dans les nœuds de Maillage</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• La solution dans les domaines de Maillage</li></ul>

Ques3 (3 pt) Expliquer Pourquoi en utilisant le CFD

- ① Conception basée sur la simulation au lieu de "construire & tester"
- ② CFD fournit une base de données haute fidélité pour le diagnostic du champ d'écoulement.
- ③ simulation de phénomènes d'écoulement physique difficiles à expérimenter : Simulation à grande échelle, Effets environnementaux, Risques
- ④ Connaissance et exploration de la physique des écoulements.

Ques4 (3 pt) citer quelque termes sources qui peut introduire dans l'équation de transport

- ① gradient de pression pour les équation de quantité de mouvement
- ② forces centrifuges et de Coriolis pour les équations de eq. mouvement -
- ③ fonction de dissipation d'énergie mécanique en chaleur pour l'équation de l'énergie
- ④ Termes sources / puits pour l'équation de l'énergie

أقلب الصفحة



L'utilisation du téléphone portable est strictement interdite



**Exercice 1 (4 points)**

Soit l'équation de conduction 1D instationnaire  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

1. Discrétiser cette équation pour un nœud P en prenant un schéma implicite tel que :

$$\int_0^{\Delta t} T dt = \left( \frac{1}{3} T^0 + \frac{2}{3} T \right) \Delta t$$

2. Dédire le critère de stabilité de ce schéma.

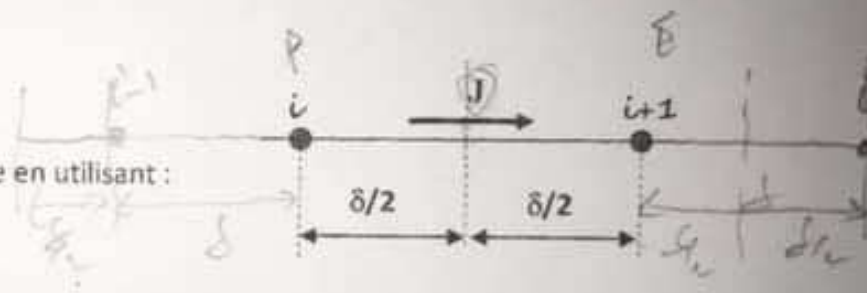
**Exercice 2 (8 points)**

Pour les conditions montrées sur la figure :

$\rho u = 5, \Gamma = 10, \delta = 2, \Phi_L = 200, \Phi_{i+1/2} = 5$

Trouver les valeurs de  $J_{conv}$  et  $J_{Diff}$  à l'interface en utilisant :

1. Le schéma exponentiel (EXP)
2. Le schéma upwind (UDS)
3. Le schéma centré (CDS)
4. En déduire de combien le schéma UDS surestime-t-il la diffusion



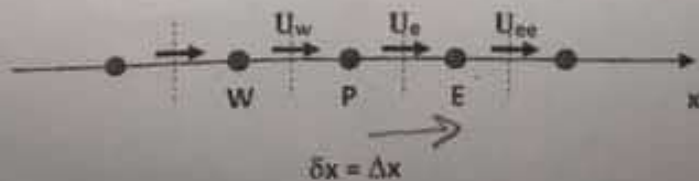
**Exercice 3 (8 points)**

Un écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible est régi par l'équation du mouvement suivante :

$$\rho U \frac{dU}{dx} = - \frac{dP}{dx} + \mu \frac{d^2 U}{dx^2}$$

et l'équation de continuité.

1. Écrire l'équation discrétisée de  $U_e$  avec un schéma CDS
2. Donner l'équation de correction de pression  $P'$  pour le nœud P en utilisant le schéma CDS avec l'algorithme SIMPLE.
3. Écrire l'équation discrétisée de  $U_e$  avec un schéma UDS
4. Dédire l'équation de correction de pression pour le nœud P en utilisant le schéma UDS avec l'algorithme SIMPLER.



Solution Examen MVF  
Mai 2018

Exercice 1

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

1/ Schéma implicite tq:  $\int T dt = \left( \frac{1}{3} T^o + \frac{2}{3} T \right) \Delta t$

$$(T_p - T_p^o) \Delta x = \frac{1}{3} \left[ \frac{T_E^o - T_p^o}{\Delta x_e} - \frac{T_p^o - T_w^o}{\Delta x_w} \right] \Delta t + \frac{2}{3} \left[ \frac{T_E - T_p}{\Delta x_e} - \frac{T_p - T_w}{\Delta x_w} \right] \Delta t$$

si  $\Delta x_e = \Delta x_w = \Delta x$

$$\Rightarrow (T_p - T_p^o) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \frac{2}{3} (T_E - 2T_p + T_w) + \frac{1}{3} (T_E^o - 2T_p^o + T_w^o) \quad (2)$$

$$\left( \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \frac{4}{3} \right) T_p = \frac{2}{3} T_w + \frac{2}{3} T_E + \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta t} - \frac{2}{3} \right) T_p^o + \frac{1}{3} T_E^o + \frac{1}{3} T_w^o$$

2/ Critère de stabilité

Coefficient de  $T_p^o$  positif  $\Rightarrow \frac{\Delta x^2}{\Delta t} - \frac{2}{3} \geq 0$

$$\Rightarrow \Delta t \leq \frac{3\Delta x^2}{2} \quad (2)$$

Exercice 2

$$J_{\text{conv}} = (\rho u) \Phi_{\text{interface}}$$

$$J_{\text{Diff}} = -\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{\text{interface}}$$

1/ Schéma Exponentiel (Exp)

$$\Phi(x) = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0) \frac{e^{Px} - 1}{e^P - 1}$$

avec  $\Phi_0 = \Phi_i$      $\Phi_L = \Phi_{i+1}$      $L = \delta = 2$

$$P = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta} = \frac{5}{10/2} = 1$$

$$\Phi_{\text{interface}} = \Phi_i + (\Phi_{i+1} - \Phi_i) \frac{e^{P/2} - 1}{e^P - 1} = \underline{\underline{126,38}}$$



$$(7/4) \quad \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\text{interface}} = \frac{P}{L} (\phi_L - \phi_0) \frac{e^{\frac{Px}{L}}}{e^P - 1} = \frac{1}{2} (5 - 200) \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e - 1}$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\text{interface}} = -93.55 \quad (1)$$

$$\text{Donc } J_{\text{conv}} = \rho u \cdot \phi_{\text{interface}} = 5 \times 126.38 = 632 \quad (1)$$

$$J_{\text{diff}} = -\Gamma \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\text{interface}} = (-10) \times (-93.55) = 935.5 \quad (1)$$

## 2/ Schéma Upwind (UDS)

$$\phi_{\text{int.}} = \phi_i = 200$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\text{int.}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\delta} = \frac{-195}{2} = -97.5 \quad (1)$$

$$\text{D'où } J_{\text{conv}} = \rho u \cdot \phi_{\text{int.}} = 5 \times 200 = 1000 \quad (1)$$

$$J_{\text{diff}} = -\Gamma \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\text{int.}} = (-10) \times (-97.5) = 975 \quad (1)$$

## 3/ Schéma Centre (CDS)

$$\phi_{\text{int.}} = \frac{\phi_i + \phi_{i+1}}{2} = \frac{205}{2} = 102.5$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\text{int.}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\delta} = -97.5 \quad (1)$$

$$\text{Donc, } J_{\text{conv}} = \rho u \cdot \phi_{\text{int.}} = 5 \times 102.5 = 512.5 \quad (1)$$

$$J_{\text{diff}} = -\Gamma \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\text{int.}} = (-10) \times (-97.5) = 975 \quad (1)$$

## 4/ Surestimation de la diffusion par UDS

$$\begin{aligned} \text{Surestimation} &= J_{\text{diff UDS}} - J_{\text{diff Exp}} \\ &= 975 - 935.5 = 39.5 \quad (2) \end{aligned}$$

(3/4) Exercice 3

$$\rho u \frac{du}{dx} = - \frac{dP}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dx^2}$$

1/ Equation de  $U_e$  avec un schéma CDS

$$(\rho u)_e (u_E - u_P) = (P_P - P_E) + \mu \left. \frac{du}{dx} \right|_E - \mu \left. \frac{du}{dx} \right|_P$$

avec un schéma CDS:

$$u_E = \frac{u_e + u_{ee}}{2}, \quad u_P = \frac{u_w + u_e}{2} \quad (1)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_E = \frac{u_{ee} - u_e}{\Delta x}, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_P = \frac{u_e - u_w}{\Delta x} \dots$$

On obtient:

$$(\rho u)_e \frac{u_{ee} - u_w}{2} = (P_P - P_E) + \frac{\mu}{\Delta x} u_{ee} - \frac{2\mu}{\Delta x} u_e + \frac{\mu}{\Delta x} u_w$$

$$\left( \frac{2\mu}{\Delta x} \right) u_e = \left\{ \frac{\mu}{\Delta x} + \frac{(\rho u)_e}{2} \right\} u_w + \left\{ \frac{\mu}{\Delta x} - \frac{(\rho u)_e}{2} \right\} u_{ee} + (P_P - P_E) \quad (1)$$

2/ Equation de correction de pression  $P'$

Continuité :  $\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u_e - u_w = 0$

$$u_e = u_e^* + (P'_P - P'_E) \quad (1)$$

$$u_w = u_w^* + (P'_W - P'_P)$$

$$d'où \quad u_e^* + (P'_P - P'_E) - u_w^* - (P'_W - P'_P) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ 2 P'_P = P'_W + P'_E + (u_w^* - u_e^*) \right\} \quad (1)$$

3/ Equation de  $U_e$  avec un schéma UDS

avec un schéma UDS:

$$u_E = \llbracket 0, u_e \rrbracket + \llbracket 0, -u_{ee} \rrbracket = \begin{cases} u_e & \text{si } u_e > 0 \\ u_{ee} & \text{si } u_{ee} < 0 \end{cases}$$

$$u_P = \llbracket 0, u_w \rrbracket + \llbracket 0, -u_e \rrbracket = \begin{cases} u_w & \text{si } u_w > 0 \\ -u_e & \text{si } -u_e > 0 \end{cases}$$

1/4) Donc l'équation discrétisée s'écrit :

$$(\rho U)_e \left\{ [0, u_e] + [0, -u_{ee}] - [0, u_w] - [0, -u_e] \right\} =$$

$$(P_P - P_E) + \frac{\mu}{\Delta x} u_{ee} - \frac{2\mu}{\Delta x} u_e + \frac{\mu}{\Delta x} u_w$$

si  $u > 0$

$$(\rho U)_e (u_e - u_w) = (P_P - P_E) + \frac{\mu}{\Delta x} u_{ee} - \frac{2\mu}{\Delta x} u_e + \frac{\mu}{\Delta x} u_w$$

$$\left( \frac{2\mu}{\Delta x} + (\rho U)_e \right) u_e = \left( \frac{\mu}{\Delta x} + (\rho U)_e \right) u_w + \left( \frac{\mu}{\Delta x} \right) u_{ee} + (P_P - P_E)$$

si  $u < 0$

$$(\rho U)_e (u_{ee} - u_e) = (P_P - P_E) + \frac{\mu}{\Delta x} u_{ee} - \frac{2\mu}{\Delta x} u_e + \frac{\mu}{\Delta x} u_w$$

$$\left( \frac{2\mu}{\Delta x} u_e - (\rho U)_e \right) u_e = \left( \frac{\mu}{\Delta x} \right) u_w + \left( \frac{\mu}{\Delta x} - (\rho U)_e \right) u_{ee} + (P_P - P_E)$$

#### 4/ Equation de correction de pression

Continuité :  $\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u_e - u_w = 0$

avec  $u_e = \hat{u}_e + (P_P - P_E)$  (1)

$u_w = \hat{u}_w + (P_W - P_P)$

$$\hat{u}_e + (P_P - P_E) - \hat{u}_w - (P_W - P_P) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ 2P_P = P_W + P_E + (\hat{u}_w - \hat{u}_e) = 0 \right\} \quad (1)$$

ou

$$\hat{u}_e = \left\{ \left( \frac{\mu}{\Delta x} + (\rho \hat{u}_e^*) \right) \hat{u}_w^* + \left( \frac{\mu}{\Delta x} \right) u_{ee}^* \right\} / \left( \frac{2\mu}{\Delta x} + \rho \hat{u}_e^* \right)$$

$$\hat{u}_w = \left\{ \left( \frac{\mu}{\Delta x} + (\rho \hat{u}_w^*) \right) \hat{u}_{ww}^* + \left( \frac{\mu}{\Delta x} \right) u_e^* \right\} / \left( \frac{2\mu}{\Delta x} + \rho \hat{u}_w^* \right)$$

Modélisation numérique

EXERCICE 1

1. Conduction stationnaire

- Eq<sup>o</sup> de conduct<sup>o</sup>:  $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$

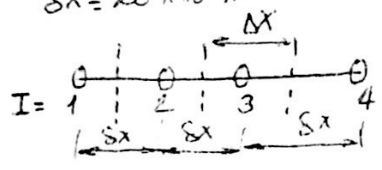
- Conditions aux limites:

$x=0 \quad T = T_0$

$x=e \quad -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=e} = -q$

- Maillage:

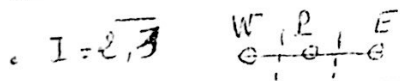
$\Delta x = 20 \times 10^{-3} \text{ m}$



$\Delta x = 20 \times 10^{-3} \text{ m}$

- Discrétisation

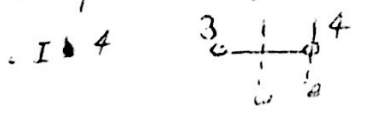
noeuds concernés:  $I = \overline{2, 4}$



$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w$

$a_e = a_w = \frac{1}{\Delta x} = 50$

$a_p = \sum a_{nb} = 100$



$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=e} = \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 0$

$\sum \frac{(T_4 - T_3)}{\Delta x} = 0$

$a_p T_4 = a_w T_3 + h$

$a_w = \frac{1}{\Delta x} = 50 = a_p$

$h = \frac{q}{k} = \frac{10^3}{20} = 5 \cdot 10^4$

- système d'eq<sup>o</sup>s à résoudre

$$\begin{cases} T_1 = 0T_2 + 325 \\ 100T_2 = 50T_3 + 50T_1 ; 100T_3 = 50T_4 + 50T_2 \\ 50T_4 = 50T_3 + 5 \cdot 10^4 \end{cases}$$

- Résolution par TDMA:

notons ces températures par:

$T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, T_3^{(0)}$  et  $T_4^{(0)}$

2. Conduction instationnaire

- Eq<sup>o</sup> de conduction

$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$

- Conditions aux limites et initiales

$t=0 \quad T_I = T_I^{(0)} \quad I = \overline{1, 4}$

$t > 0:$

$x=0 \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T_f - T_1)$

$x=e \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=e} = -q$

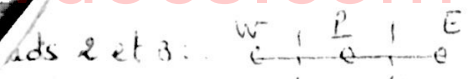
- Discrétisation  $I = \overline{1, 4}$

pour un schéma totalement implicite.

noeuds:  $\frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta x}$

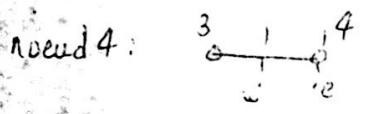
$a_p T_4 = a_e T_2 + h$

$$\begin{cases} a_e = \Delta t / \Delta x \\ h = h \Delta t \rho c_p / k + a_p T_1^{(0)} \\ a_p = \Delta x / \Delta x \end{cases}$$



$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b$$

$$\begin{cases} a_E = a_W = \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ b = a_p T_p^{(i)} \\ a_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ a_p = a_E + a_W + a_p \end{cases}$$



$$a_p T_4 = a_W T_3 + b$$

$$\begin{cases} a_W = \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ b = a_p T_4^{(i)} + \frac{2 \Delta t}{K} \\ a_p = \frac{\Delta x}{2 \Delta t} \\ a_p = a_E + a_p \end{cases}$$

Resolution

on veut connaître  $T_I$  à l'instant  $t_1$

on procède comme suit:

a. Calcul du nombre d'étapes:  $NE$

$$NE = \frac{t_1}{\Delta t}$$

b. Calcul de  $T_I$  avec  $T_I^{(i)}$  avec  $T_I^{(i)} = T_I^{(i-1)}$

c. Calcul de  $T_I$  avec  $T_I^{(i)} = T_I^{(i-1)}$

avec calcul de  $T_I^{(NE) \Delta t}$  avec  $T_I^{(i)} = T_I^{(i-1)}$

3 Pour un schéma explicite:

$$\left(\frac{\Delta x}{2 \Delta t}\right) T_1 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) T_2^{(i)} + \frac{h \Delta t}{K} T_f + \left(\frac{\Delta x}{2 \Delta t} - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{h \Delta t}{K}\right) T_1^{(i)}$$

$$\left(\frac{\Delta x}{2 \Delta t}\right) T_p = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) T_E^{(i)} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) T_W^{(i)} + \left(\frac{\Delta x}{2 \Delta t} - \frac{2 \Delta t}{\Delta x}\right) T_p^{(i)} \quad P \in \{2, 3\}$$

$$\left(\frac{\Delta x}{2 \Delta t}\right) T_4 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) T_3^{(i)} + \left(\frac{\Delta x}{2 \Delta t} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) T_4^{(i)} + \frac{2 \Delta t}{K}$$

Pour la stabilité du schéma explicite, il faut que:

$$\frac{\Delta x}{2 \Delta t} - \frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{h \Delta t}{K} > 0 \Rightarrow \Delta t < \frac{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{h}{K}\right)}$$

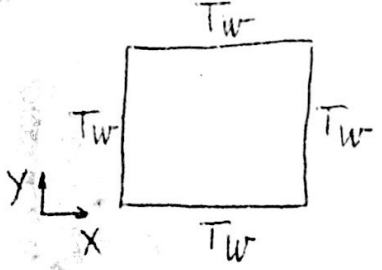
$$\frac{\Delta x}{2 \Delta t} - \frac{2 \Delta t}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \Delta t < \frac{\Delta x \Delta x}{2 \Delta t}$$

$$\frac{\Delta x}{2 \Delta t} - \frac{\Delta t}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \Delta t < \frac{\Delta x \Delta x}{2 \Delta t}$$

On prendra le  $\Delta t$  min

ACE 8 (échelle non respectée)

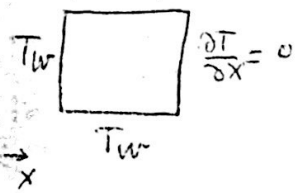
Domaine d'étude



Suite à la symétrie 1/4 du domaine

est considéré.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$



2. Eq<sup>ns</sup> de conduction

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S$$

3. Conditions initiales et aux limites

à  $t = 0$   $T = T_0$

à  $t > 0$

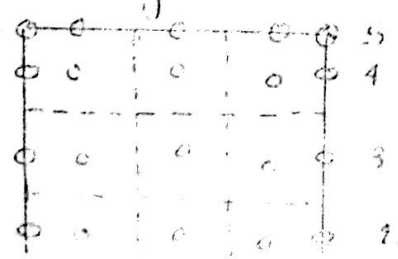
$x = a$   $\forall y$   $T = T_w$

$x = a/2$   $\forall y$   $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

$y = 0$   $\forall x$   $T = T_w$

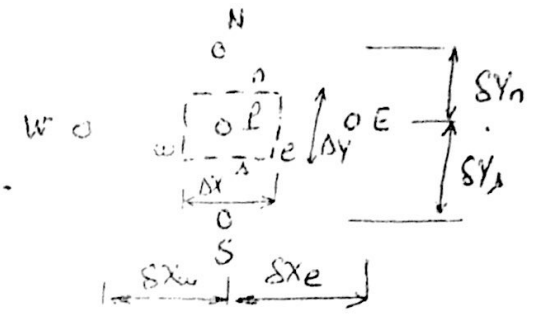
$y = a/2$   $\forall x$   $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

4. Maillage



5. Discrétisation  $I = 2,5$  et  $J = 2,5$

• needs internes  $I = 2,4$   $J = 2,4$



$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w + a_n T_n + a_s T_s + b$$

$$a_e = k \Delta y \Delta t / \Delta x_e$$

$$a_w = k \Delta y \Delta t / \Delta x_w$$

$$a_n = k \Delta x \Delta t / \Delta y_n$$

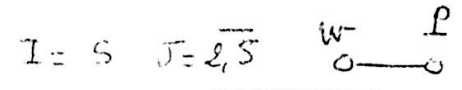
$$a_s = k \Delta x \Delta t / \Delta y_s$$

$$b = a_p^o T_p^{(o)} + S \Delta x \Delta y \Delta t$$

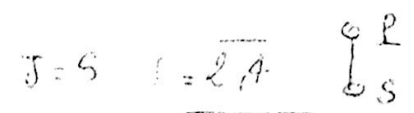
$$a_p^o = \rho c_p \Delta x \Delta y$$

$$a_p = \sum a_n + a_p^o$$

• needs externes



$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \rightarrow T_p = T_w$$



$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \rightarrow T_p = T_s$$

Département de Génie Mécanique – Université Badji Mokhtar  
Annaba

**TD Méthode des volumes finis** pour les étudiants de  
**Master I - Énergétique**

Responsable du module: Dr **F. MECHIGHEL**

## TD sur le Chapitre 4

### Résolution d'un problème de convection-diffusion par la méthode des volumes finis

#### Exercice 1 :

Une propriété  $\phi$  est transportée par convection et diffusion à travers le domaine unidimensionnel illustré à la figure 1 ci-dessous. Les conditions aux limites de ce problème physique sont données telles que :

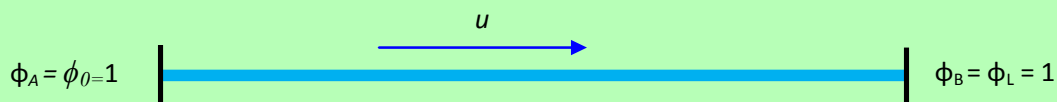
$$\text{À } x = 0 \quad \phi_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{à } x = L \quad \phi_L = 0$$

1- Écrire le modèle mathématique de ce problème physique

2- Calculer la distribution de  $\phi$  en fonction de  $x$  par la méthode des volumes finis pour le cas où la vitesse  $u = 0,1$  m/s,

**On donne :** la longueur  $L = 1$  m, la masse volumique  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup> et le coefficient de diffusion  $\Gamma = 0,1$  kg/m s.

**Remarque :** Il est demandé de choisir un maillage composé de **cinq** volumes de contrôle (cellules) espacés de façon identique (maillage uniforme) et utiliser le **schéma de différenciation centrale** pour la discrétisation des termes de flux convectif et de diffusif.



**Figure 1 :** Diffusion et convection de la quantité de transport  $\phi$  dans une barre 1D et conditions aux limites.



**Exercice 2 :**

Refaire l'exercice 1 pour les cas suivants :

(a) cas où la vitesse  $u = 0,1$  m/s et comparer les résultats avec la solution analytique

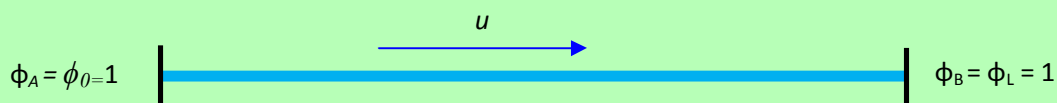
(b) cas où la vitesse  $u = 2,5$  m/s et comparer les résultats avec la solution analytique

$$\frac{\phi - \phi_A}{\phi_B - \phi_A} = \frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{(\rho u x / \Gamma)} - 1}{e^{(\rho u L / \Gamma)} - 1}$$

(c) Recalculer la solution pour le cas où la vitesse  $u = 2,5$  m/s en utilisant un maillage composé de 20 nœuds et comparer les résultats avec la solution analytique.

**On donne :** la longueur  $L = 1$  m, la masse volumique  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup> et le coefficient de diffusion  $\Gamma = 0,1$  kg/m s.

**Remarque :** Pour les cas (1) et (2) il est demandé de choisir un maillage composé de cinq volumes de contrôle (cellules) espacés de façon identique (maillage uniforme) et utiliser le schéma de différenciation centrale pour la discrétisation des termes de flux convectif et de diffusif.



**Figure 1 :** Diffusion et convection de la quantité de transport  $\phi$  dans une barre 1D et conditions aux limites.

***Solution de l'exercice 1 :******1)- Modèle mathématique***

-Nous voulons résoudre le problème de diffusion et convection de la quantité  $\phi$  en régime stationnaire dans la géométrie 1D (la barre AB montrée en Fig. 1). Ce problème est régi par les équations :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

***2)- Résolution du problème par la méthode des volumes finis***

Pour la résolution du problème actuel par la méthode des volumes finis en utilisant un maillage de 5 volumes de contrôle, nous réaliserons les **étapes suivantes** :

***Étape 1: Génération de maillage***

Nous divisons le domaine de calcul en **cinq** volumes de contrôle (Fig. 2). Cela donne  $\delta x = 1/5 = 0,2$  m.

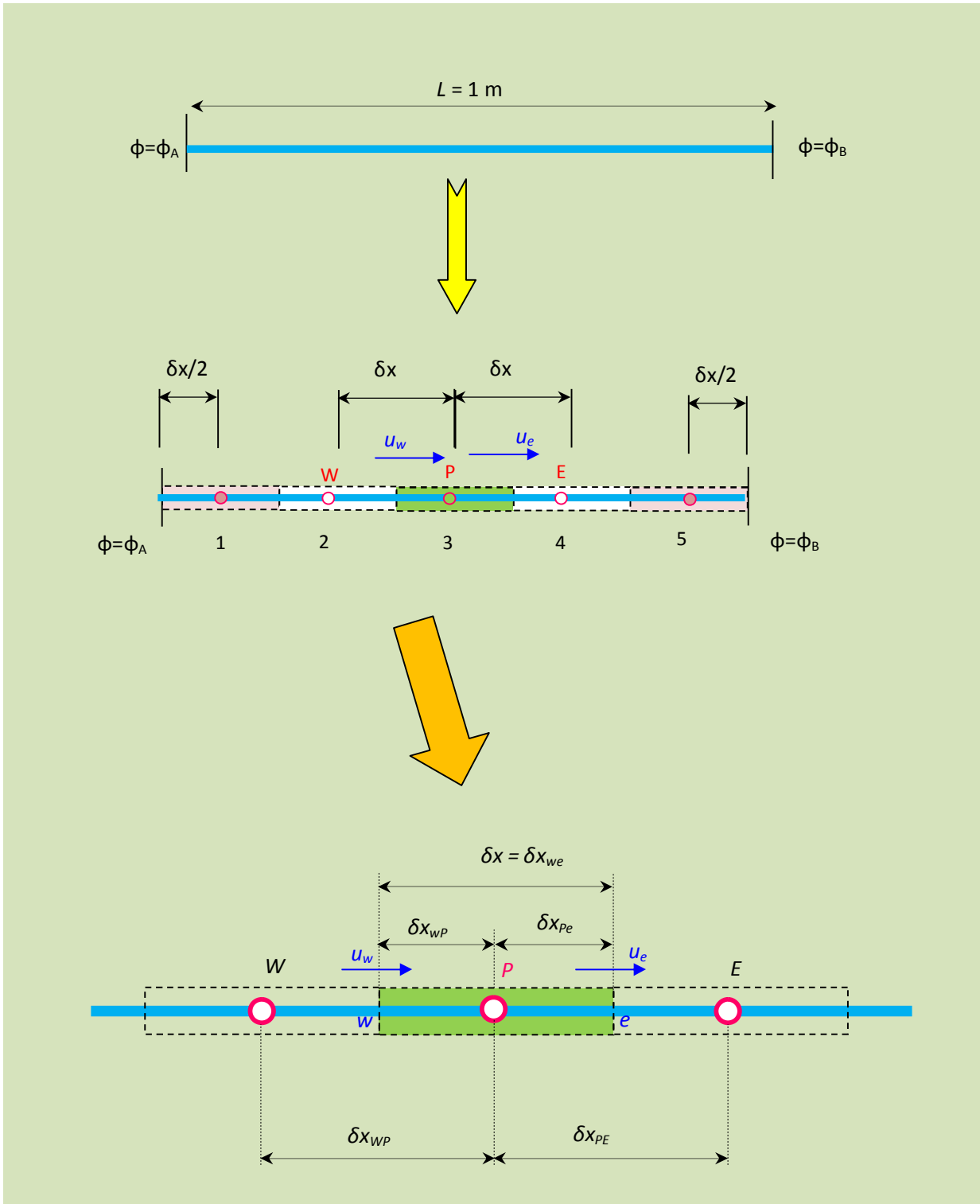
***Étape 2: Discrétisation******- Nœuds internes***

L'intégration des équations gouvernantes sur le volume de contrôle de la figure 2 donnent respectivement les équations suivantes :

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w \quad (1)$$

et

$$(\rho A \phi)_e - (\rho A \phi)_w = 0 \quad (2)$$



**Figure 2 :** Domaine de calcul et maillage utilisé pour la discrétisation. Cas de maillage constitué de 5 volumes de contrôle.

Si on désigne par :

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \Gamma / \delta x$$

Alors les valeurs des variables F et D sur les faces « e » et « w » des volumes de contrôle peuvent s'écrire

$$F_w = (\rho u)_w \quad \text{et} \quad F_e = (\rho u)_e$$

et

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \quad \text{et} \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

Pour simplifier, nous supposons que  $A_w = A_e = A$  et nous utilisons l'approche de différenciation centrale pour représenter la contribution des termes de diffusion sur le côté droit, l'équation intégrée (1) peut maintenant être écrite :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (3)$$

et l'équation de continuité intégrée (2) comme

$$F_e - F_w = 0$$

En utilisant l'approximation de différenciation centrale, on a

$$\phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \quad \text{et} \quad \phi_w = \frac{(\phi_W + \phi_P)}{2} \quad (4)$$

En remplaçant les expressions (4) dans les termes de convectifs (3), on a

$$\frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2} (\phi_W + \phi_P) = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

Nous pouvons réorganiser cette équation et la mettre sous la forme

$$\left( \left( D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right) \phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

qui peut s'écrire comme

$$\left( \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right) \phi_P = \left( D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left( D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

En identifiant les coefficients de  $\phi_W$  et  $\phi_E$  comme  $a_W$  et  $a_E$ , les expressions de **différenciation centrale** pour l'équation de convection-diffusion discrétisée sont :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \tag{5a}$$

avec

$$\begin{cases} a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \end{cases} \tag{5b}$$

L'équation de discrétisation (5a) et ses coefficients (5b) s'appliquent aux points nodaux internes 2, 3 et 4, mais les volumes de contrôle 1 et 5 nécessitent un traitement spécial car ils sont adjacents aux limites du domaine. Notons que  $F = \rho u$ ,  $D = \Gamma/\delta x$ ,  $F_e = F_w = F$  et  $D_e = D_w = D$  partout et les limites du domaine sont désignées par A et B. Alors, de l'équation (5b), on a

$$\begin{cases} a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = D + \frac{F}{2} \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = D - \frac{F}{2} \\ a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) = 2D \end{cases} \tag{5c}$$

- Traitement des nœuds aux limites

- **Point 1**

Nous intégrons les équations gouvernantes et nous utilisons une différenciation centrale pour les termes de flux diffusif et convectif à travers la face « e » du volume de contrôle 1. La valeur de  $\phi$  est donnée à la face « w » de ce volume de contrôle ( $\phi_w = \phi_A = 1$ ) donc nous n'avons pas besoin de faire toute approximation du terme de flux convectif à cette frontière. Cela donne l'équation suivante pour le nœud 1 :

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - F_A \phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A) \quad (6)$$

- **Point 5**

Pour le volume de contrôle 5, la valeur sur la face « e » est connue ( $\phi_e = \phi_B = 0$ ). On obtient

$$F_B \phi_B - \frac{F_w}{2}(\phi_P + \phi_W) = D_B(\phi_B - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (7)$$

En réarrangeant ces deux dernières équations et en notant que  $D_A = D_B = 2\Gamma / \delta x = 2D$  et  $F_A = F_B = F$ , nous obtenons les équations discrétisées aux nœuds limites 1 et 5 telles que :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (8a)$$

avec le coefficient central

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P \quad (8b)$$

et

$$\begin{cases} a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = 0 \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = D - \frac{F}{2} \\ S_p = -(2D + F) \\ S_u = (2D + F)\phi_A \end{cases} \quad (\text{pour le nœud 1})$$

$$\begin{cases} a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = D + \frac{F}{2} \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = 0 \\ S_p = -(2D - F) \\ S_u = (2D - F)\phi_B \end{cases} \quad (\text{pour le nœud 5})$$

Pour incorporer les conditions aux limites, nous avons donc supprimé le lien vers le côté limite et entré le flux limite à travers les termes sources.

Applications numériques :

Pour  $u = 0,1$  m/s : alors ( $F = \rho u = 0,1$ ,  $D = \Gamma/\delta x = 0,1/0,2 = 0,5$ ) et les coefficients sont donnés tels que :

Nœud / coefficients	$a_W$	$a_E$	$S_u$	$S_p$	$a_E = a_W + a_E - S_p$
1 :	0	0,45	$1,1 \phi_A$	-1,1	1,55
2, 3 et 4	0,55	0,45	0	0	1
5	0,55	0	$0,9 \phi_B$	-0,9	1,45

La forme matricielle de l'ensemble d'équations utilisant  $\phi_A = 1$  et  $\phi_B = 0$  est

$$\begin{pmatrix} 1,55 & -0,45 & 0 & 0 & 0 \\ -0,55 & 1 & -0,45 & 0 & 0 \\ 0 & -0,55 & 1 & -0,45 & 0 \\ 0 & 0 & -0,55 & 1 & -0,45 \\ 0 & 0 & 0 & -0,55 & 1,45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### *Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées*

La résolution de ce système par la méthode de **Gauss** donne :

$$\begin{cases} \phi_1 = 0,942 \text{ SI} \\ \phi_2 = 0,801 \text{ SI} \\ \phi_3 = 0,628 \text{ SI} \\ \phi_4 = 0,416 \text{ SI} \\ \phi_5 = 0,158 \text{ SI} \end{cases}$$



Contrôle N° 1 Volumes Finis Appliqués

Master 1/S2

**Exercice 01 :**

Soit un domaine d'analyse avec  $R = 0.008$  mm,  $\lambda = 20$  W/mK ,  $S = 2 \times 10^8$ W/m<sup>3</sup> et le maillage présenté à la figure 01. Les conditions aux limites sont de type Neumann au point 1 et Dirichlet au point 5 ( $T_5 = 400$  K).

Calculer la distribution de la température et comparer les résultats numériques avec la solution analytique.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \lambda(T) r \frac{dT}{dr} \right) + S(T) = 0$$

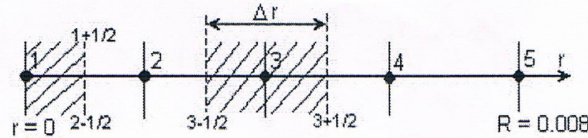


Figure 01

La formule analytique est donnée par la relation

$$T(r) = T_R + \frac{SR^2}{4\lambda} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

**Exercice 02 :**

Une propriété  $\Phi$  est transportée par convection et diffusion à travers un domaine unidimensionnel (figure 2). Les conditions aux limites sont  $\Phi_0 = 1$  à  $x = 0$ , et  $\Phi_L = 0$  à  $x = L$ . Utiliser six points équidistants et le schéma Hybride pour convection diffusion. Calculer la distribution  $\Phi$  est une fonction de  $x$  pour  $u = 2.5$  m/s, et comparer les résultats avec la solution analytique. On connaît :  $L = 1$  m,  $\rho = 1$  Kg/m<sup>3</sup>,  $\Gamma = 0.1$  Kg/m.s.

La formule analytique est donnée par la relation

$$\Phi = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0) \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1}$$

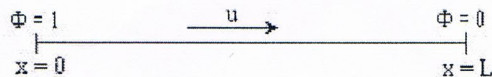


Figure 02

Corrigé type du contrôle

Exo 01:

10 pts

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \partial_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S(T) = 0$$

$$S(T) = \sigma(T) \varepsilon^2 - P_r(T)$$

$$\int_{r_c} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \partial_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr + \int_{r_c} S dr = 0$$

$$\int_{r_c} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \partial_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) 2\pi r dr + \int_{r_c} S \cdot 2\pi r dr = 0$$

$$\int_{r_c} \frac{d}{dr} \left( \partial_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) 2\pi r dr + \int_{r_c} S \cdot 2\pi r^2 dr = 0$$

$$-T_1 + T_2 = -10$$

$$T_1 + 4T_2 + 3T_3 = -80$$

$$3T_2 - 8T_3 + 5T_4 = -160$$

$$5T_3 - 12T_4 = -3040$$

on, sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -80 \\ -160 \\ -3040 \end{bmatrix}$$

forme matricielle du système à résoudre est

$$\begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 0 & 0 \\ -2,5 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & -2,5 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2,5 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la solution du système :

$$\begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0,999 \end{bmatrix}$$

Noeud	Distance	Numerique	Analytique	Erreur %
2	0,2	1,0	0,999	-0,1
3	0,4	1,0	0,999	-0,1
4	0,6	1,0	0,999	-0,1
5	0,8	0,999	0,993	-0,4



Département de Génie Mécanique – Université Badji Mokhtar  
Annaba

**Travaux dirigés** « Méthode des volumes finis » pour les  
étudiants de **Master I - Énergétique**

Responsable du module: Dr **F. MECHIGHEL**

## TD

*Résolution du problème de **conduction de la chaleur**  
unidimensionnelle stationnaire par la méthode des volumes finis*

**Exercice I**

Considérons le problème de la conduction de chaleur **sans source** dans une barre AB isolée dont les extrémités sont respectivement maintenues à des températures constantes de  $T_A = 100\text{ °C}$  et  $T_B = 500\text{ °C}$ .

- 1- Écrire l'équation qui régit le problème unidimensionnel en régime permanent
- 2- Calculer la distribution de température en régime permanent dans la barre par la méthode des volumes finis.

On donne :

La conductivité thermique  $k = 1000\text{ W/m K}$  et la surface (aire) de section transversale  $A = 0,01\text{ m}^2$ .

**Remarque :** Il est demandé de faire choisir deux cas de maillage composés de 5 et 7 volumes de contrôle.

**Solution**

Nous voulons résoudre le problème de conduction en régime stationnaire dans une géométrie 1D (la barre AB montrée en [Fig. I-1](#))

**1)- Modélisation du problème**

Le présent problème physique est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \tag{I-1}$$

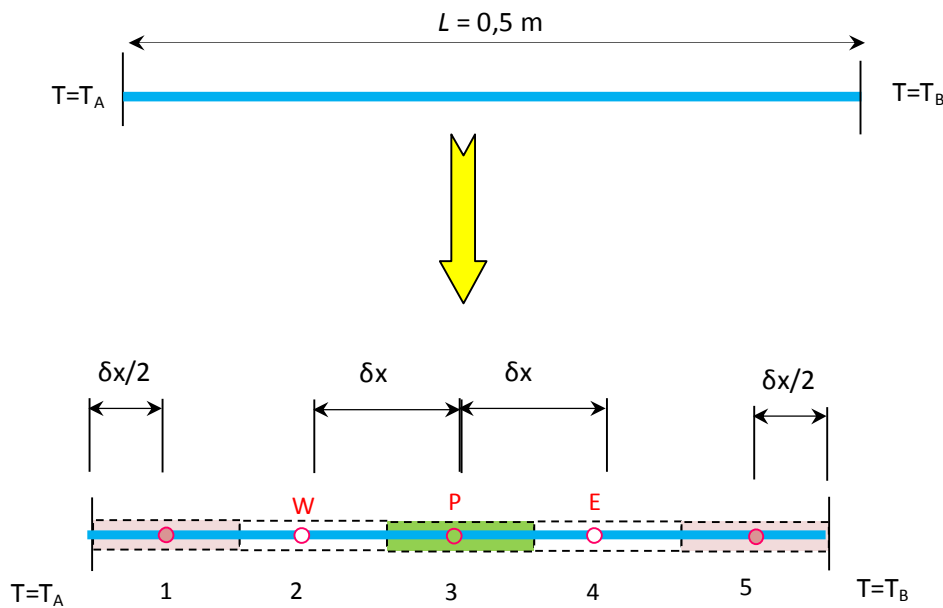
Noter que terme source dans cette équation est nul.

**2)- Résolution du problème par la méthode des volumes finis**

Pour la résolution du présent problème par la méthode nous allons entamer les étapes suivantes :

**Étape 1: Génération de maillage**

a)- Nous divisons la longueur de la barre en **cinq** volumes de contrôle égaux comme le montre la Fig. I-1. Cela donne  $\delta x=0,1$  m. Alors, le maillage se compose donc de **cinq** nœuds.



**Figure I-1 :** Problème de la conduction de la chaleur 1D en régime stationnaire : (a) Domaine et (b) maillage en volumes de contrôles. Cas de maillage constitué de 5 éléments (volumes de contrôle).

Étape 2: Discrétisation

- Nœuds internes

Pour chacun des nœuds 2, 3 et 4, des valeurs de température à l'est et à l'ouest sont disponibles en tant que valeurs nodales. Par conséquent, des équations discrétisées de la forme (3.10) (voir cours) peuvent être facilement écrites pour les volumes de contrôle entourant ces nœuds :

$$\left[ \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right] \phi_P = \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + S_u \quad (\text{voir cours}) \quad (3.10)$$

Mais ici  $\phi = T$  et  $\Gamma = k$  alors l'équation (3.10) prend la forme suivante :

$$\left[ \frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right] T_P = \left( \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) T_W + \left( \frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) T_E + S_u \quad (I-2)$$

Dans le présent modèle mathématique le terme source est nul. Alors en absence de source, on a  $S_u = 0$  et  $S_p = 0$ , l'équation précédente devient :

$$\left[ \frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right] T_P = \left( \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) T_W + \left( \frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) T_E \quad (I-3)$$

Les conductivités thermiques ( $k_e = k_w = k = 1000 \text{ W/m K}$ ), l'espacement des nœuds ( $\delta x = 0,1 \text{ m}$ ) et l'aire de la section transversale ( $A_e = A_w = A = 0,01 \text{ m}^2$ ) sont des constantes. Par conséquent, les équations **discrétisées** pour les points nodaux 2, 3 et 4 sont :

$$a_p T_P = a_w T_W + a_e T_E \quad (1-4)$$

où

$$\begin{cases} a_W = \left( \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_E = \left( \frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_P = \left[ \frac{k_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{k_w A_w}{\delta x_{WP}} \right] = 2 \left( \frac{k A}{\delta x} \right) = a_W + a_E \end{cases} \quad (1-5)$$

Noter que les termes source  $S_u$  et  $S_p$  sont nuls dans ce cas car aucune source n'est prise en compte dans le modèle mathématique (absence de source de chaleur).

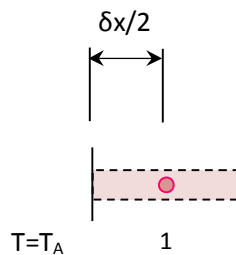
- Traitement des nœuds aux limites

Les nœuds 1 et 5 sont des nœuds limites (frontières) et nécessitent donc une **attention particulière**.

- **Point 1**

L'intégration de l'équation PDE qui régit la **conduction** sur le volume de contrôle entourant le point « 1 » (voir Fig. I-2) donne :

$$k A \left[ \frac{T_E - T_P}{\delta x} \right] - k A \left[ \frac{T_P - T_A}{\delta x/2} \right] = 0 \quad (I-6)$$



**Fig. I.2 :**



Cette expression montre que le flux passant par la limite de volume de contrôle  $A$  a été approximé en supposant une relation **linéaire** entre les températures au point limite  $A$  et le nœud  $P$ . Nous pouvons réorganiser l'équation précédente comme suit :

$$\left(\frac{kA}{\delta x} + 2\frac{kA}{\delta x}\right)T_P = 0 T_W + \left(\frac{kA}{\delta x}\right)T_E + \left(2\frac{kA}{\delta x}\right)T_A \quad (\text{I-7})$$

En comparant cette dernière équation à l'équation (I-2) ci-dessus, ou plus précisément à

$$\left[\frac{kA}{\delta x} + \frac{kA}{\delta x} - S_p\right]T_P = \left(\frac{kA}{\delta x}\right)T_W + \left(\frac{kA}{\delta x}\right)T_E + S_u \quad (\text{I-2b})$$

On peut facilement identifier que la **condition aux limites** de température spécifiée (fixe) « conditions de Dirichlet » entre dans le calcul en tant que terme source ( $S_u + S_p T_P$ ) avec  $S_u = (2kA/\delta x)T_A$ ,  $S_p = -2kA/\delta x$  et  $a_w = 0$  (c.-à-d. le lien vers le côté des limites (ouest) a été supprimé).

Finalement l'équation (I-7) peut être exprimée sous la même forme que (3.11) (voir cours) pour produire l'équation discrétisée pour le **nœud frontière 1** :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (3.11)$$

Dans notre cas  $\phi = T$  et  $\Gamma = k$ , alors l'équation (3.11) devient :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (\text{I-8})$$

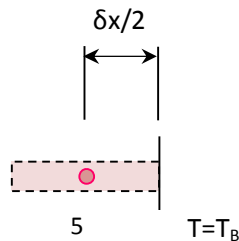
où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = 0 \\ a_E = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_P = a_w + a_E - S_p = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) + \left( \frac{2k A}{\delta x} \right) = \left( 3 \frac{k A}{\delta x} \right) \\ S_p = -\frac{2k A}{\delta x} \\ S_u = \frac{2k A}{\delta x} T_A \end{array} \right. \quad (I-9)$$

- **Point 5**

Le volume de contrôle entourant le nœud 5 peut être traité de manière similaire. Son équation discrétisée est obtenue par l'intégration de l'équation (I-1) sur le volume de contrôle entourant le point « 5 » (voir Fig. I-3) :

$$k A \left[ \frac{T_B - T_P}{\delta x/2} \right] - k A \left[ \frac{T_P - T_W}{\delta x} \right] = 0 \quad (I-10)$$



**Fig. I-3**

Comme précédemment, nous supposons une distribution de température **linéaire** entre le nœud P et le point limite B pour approximer le flux de chaleur à travers la face (limite) du volume de contrôle. L'équation précédente peut être réorganisée comme

$$\left( \frac{k A}{\delta x} + 2 \frac{k A}{\delta x} \right) T_P = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) T_W + 0 T_E + \left( 2 \frac{k A}{\delta x} \right) T_B \quad (I-11)$$

L'équation discrétisée pour le nœud frontière 5 est

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \quad (\text{I-12})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_w = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_e = 0 \\ a_p = a_w + a_e - S_p = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) + \left( \frac{2k A}{\delta x} \right) = \left( 3 \frac{k A}{\delta x} \right) \\ S_p = -\frac{2k A}{\delta x} \\ S_u = \frac{2k A}{\delta x} T_B \end{array} \right. \quad (\text{I-13})$$

- Application numérique

Le processus de discrétisation a donné une équation pour chacun des points nodaux 1 à 5. La substitution des valeurs numériques donne  $(k A/\delta x) = 100$  et les coefficients de chaque équation discrétisée peuvent facilement être déterminés. Leurs valeurs sont données telles que :

Nœud / coefficients	$a_w$	$a_e$	$S_u$	$S_p$	$a_e = a_w + a_e - S_p$
1 :	0	100	$200 T_A$	-200	300
2, 3 et 4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200 T_B$	-200	300

On peut écrire le système d'équations algébriques linéaires à partir de la discrétisation tel que :

$$\begin{cases} 300T_1 = 100T_2 + 200T_A \\ 200T_2 = 100T_1 + 100T_3 \\ 200T_3 = 100T_2 + 100T_4 \\ 300T_4 = 100T_3 + 200T_5 \\ 300T_5 = 100T_4 + 200T_B \end{cases} \quad (\text{I-14})$$

Sous une **forme matricielle** on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{pmatrix} \quad (\text{I-15})$$

### Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées

Ce dernier système linéaire peut se résoudre en utilisant la méthode d'élimination de **Gauss** ou l'algorithme de **Thomas** (voir **TP**) et la résolution donne :

$$\begin{cases} T_1 = 140^\circ\text{C} \\ T_2 = 220^\circ\text{C} \\ T_3 = 300^\circ\text{C} \\ T_4 = 380^\circ\text{C} \\ T_5 = 460^\circ\text{C} \end{cases} \quad (\text{I-16})$$

## Exercice II

Considérons le problème de conduction de la chaleur dans une grande plaque d'épaisseur  $L = 2$  cm avec la présence d'une source de chaleur  $q$  (voir Fig. II-1).

En supposant que les dimensions dans les directions  $y$  et  $z$  sont si grandes que les gradients de température ne sont significatifs que dans la direction  $x$ . De plus, les faces A et B sont maintenues respectivement à des températures de  $100\text{ °C}$  et  $200\text{ °C}$ .

- 1- Écrire l'équation qui régit le problème unidimensionnel en régime permanent
- 2- Calculer la distribution de température en régime permanent dans la barre par la méthode des volumes finis.

On donne :

La conductivité thermique  $k = 0,5\text{ W/m K}$  et la source de génération de chaleur « uniforme »  $q = 1000\text{ kW/m}^3$ .

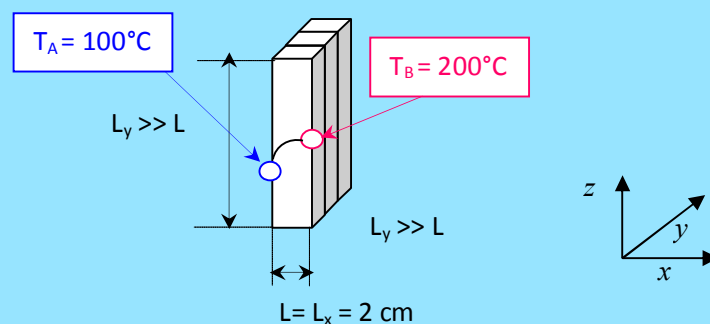


Figure II-1 : Problème de la conduction de la chaleur 1D en régime stationnaire.

## Solution

### 1)- Modélisation du problème

Le présent problème physique est régi par l'équation gouvernante suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + q = 0 \quad (\text{II-1})$$

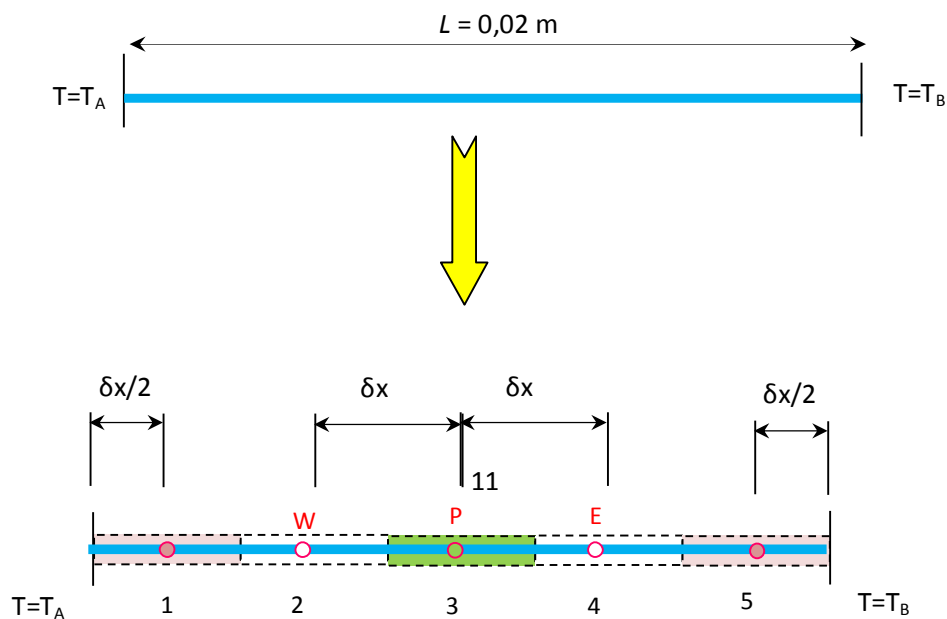
Noter que terme source dans cette équation n'est pas nul.

### 2)- Résolution du problème par la méthode des volumes finis

Pour la résolution du présent problème par la méthode nous allons entamer les étapes suivantes :

#### Étape 1: Génération de maillage

a)- Nous divisons la longueur de la barre en **cinq** volumes de contrôle égaux comme le montre la Fig. II-2. Cela donne  $\delta x = 0,004$  m. Alors, le maillage se compose donc de **cinq** nœuds. Une aire unitaire ( $A = 1 \text{ m}^2$ ) est considérée dans le plan  $y - z$ .



**Figure II-2** : Problème de la conduction de la chaleur 1D en régime stationnaire (présence de source de chaleur) : (a) Domaine et (b) maillage en volumes de contrôles. Cas de maillage constitué de 5 éléments (volumes de contrôle).

Étape 2: Discrétisation

- Nœuds internes

L'intégration de l'équation gouvernante (II-2) sur un volume de contrôle typique donne

$$\int_{V_{CV}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + q \right) dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] dV + \int_{\Delta V} q dV = 0 \quad (II-2)$$

Alors

$$\left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w + q \Delta V = 0 \quad (II-3)$$

avec  $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle :  $\Delta V = A \delta x$ .

Noter que dans la seconde intégrale dans l'équation (II-3), le terme source a été évalué en calculant la génération moyenne (c'est-à-dire  $\bar{S} \Delta V = q \Delta V$ ) dans chaque volume de contrôle.

En poursuivant la même démarche que celle dans l'exercice I, on a

$$\left( k_e A_e \frac{(T_E - T_P)}{\partial x_{EP}} \right) - \left( k_w A_w \frac{(T_P - T_W)}{\partial x_{PW}} \right) + q A \delta x = 0 \quad (II-4)$$

Cette dernière équation peut être réorganisée comme

$$\left( \frac{k_e A_e}{\partial x_{EP}} + \frac{k_w A_w}{\partial x_{PW}} \right) T_P = \frac{k_w A_w}{\partial x_{PW}} T_W + \frac{k_e A_e}{\partial x_{EP}} T_E + q A \delta x = 0 \quad (II-5a)$$

Mais  $A_e = A_w = A$  et ( $\delta x$  est fixe) alors :

$$\left( \frac{k_w A}{\delta x} + \frac{k_e A}{\delta x} \right) T_P = \left( \frac{k_w A}{\delta x} \right) T_W + \left( \frac{k_e A}{\delta x} \right) T_E + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-5b})$$

Cette équation est écrite sous la forme générale :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (\text{II-6})$$

D'autre part, puisque  $k_e = k_w = k$  alors nous avons les coefficients suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_W = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_E = \left( \frac{k A}{\delta x} \right) \\ a_P = a_W + a_E - S_p = 2 \left( \frac{k A}{\delta x} \right) \\ S_p = 0 \\ S_u = q A \delta x \end{array} \right. \quad (\text{II-7})$$

Les équations (II-6) et (II-7) sont valables pour les volumes de contrôle aux points nodaux **2, 3 et 4**.

**- Traitement des conditions aux limites**

Les nœuds 1 et 5 sont des nœuds limites et nécessitent donc une attention particulière.

**Point 1**

Pour incorporer les conditions aux limites aux nœuds 1 et 5, nous appliquons l'approximation linéaire des températures entre un point limite et le point nodal adjacent. Au nœud 1, la température à la limite ouest est connue. L'intégration de l'équation gouvernante au volume de contrôle entourant le nœud 1 donne



$$\left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w + q \Delta V = 0 \quad (\text{II-8})$$

L'introduction de l'approximation linéaire des températures entre les rendements A et P donne

$$\frac{k_e A}{\partial x} (T_E - T_P) - \left( \frac{k_A A}{\partial x / 2} \right) (T_P - T_A) + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-9})$$

L'équation ci-dessus peut être réarrangée, en utilisant  $k_e = k_A = k$ , pour produire l'équation discrétisée pour le **nœud frontière 1**:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u \quad (\text{II-10})$$

avec

$$\begin{cases} a_W = 0 \\ a_E = k A / \delta x \\ a_P = a_W + a_E - S_p = 3k A / \delta x \\ S_p = -2k A / \delta x \\ S_u = q A \delta x + 2(k A / \delta x) T_A \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

### **Point 5**

Le nœud est traité de la même manière que le nœud limite 1. Au point nodal 5, la température sur la face est du volume de contrôle est connue. Alors au point limite 5, nous avons

$$\left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right]_w + q \Delta V = 0 \quad (\text{II-12})$$

donc

$$\left( \frac{k_B A}{\partial x / 2} \right) (T_B - T_P) - \frac{k_w A}{\partial x} (T_P - T_W) + q A \delta x = 0 \quad (\text{II-13})$$

L'équation (II-13) peut être réorganisée, en notant que  $k_B = k_w = k$ , pour donner l'équation discrétisée pour le **nœud frontière 5**:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \tag{II-14}$$

avec

$$\begin{cases} a_w = k A / \delta x \\ a_e = 0 \\ a_p = a_w + a_e - S_p = 3k A / \delta x \\ S_p = -2k A / \delta x \\ S_u = q A \delta x + 2(k A / \delta x) T_B \end{cases} \tag{II-15}$$

- Application numérique

Le processus de discrétisation a donné une équation pour chacun des points nodaux 1 à 5. La substitution par les valeurs numériques  $A$  (unité),  $k = 0,5 \text{ W/m K}$  ;  $q = 1000 \text{ kW/m}^3$  et  $\delta x = 0,004 \text{ m}$  partout donne les coefficients des équations discrétisées. Leurs valeurs sont données telles que :

Nœud / coefficients	$a_w$	$a_e$	$S_u$	$S_p$	$a_e = a_w + a_e - S_p$
1 :	0	125	$4000 + 250 T_A$	-250	375
2, 3 et 4	125	125	4000	0	250
5	125	0	$4000 + 250 T_B$	-250	375

Sous une **forme matricielle** on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 + 250 T_A \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 + 250 T_B \end{pmatrix} \tag{II-16}$$

Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées

Ce dernier système linéaire peut se résoudre en utilisant la méthode d'élimination de **Gauss** ou l'algorithme de **Thomas** (voir **TP II**) et la résolution donne :

$$\begin{cases} T_1 = 150^\circ C \\ T_2 = 218^\circ C \\ T_3 = 254^\circ C \\ T_4 = 258^\circ C \\ T_5 = 230^\circ C \end{cases} \quad (\text{II-17})$$