سلسلة تمارين رقم 2

المصفوفات المحددات و الجمل الخطية

مقياس الجبر02

لطلبة السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي

التمرين 02:

حساب A^2 : $A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

$$A+2I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=A^2$$

نعلم أن المجموعة M_3 للمصفوفات المربعة من الرتبة 3 المزودة على الترتيب بعمليتي جمع وضرب المصفوفات الداخليتين لها بنية حلقة واحدية غير تبديلية ومنه

$$A^2=A+2I_3 \Leftrightarrow A^2-A=2I_3 \Leftrightarrow A\left(\frac{A-I_3}{2}\right)=\left(\frac{A-I_3}{2}\right)A=I_3$$

ومنه المصفوفة A قابلة للقلب ومقلوبها هو المصفوفة :

$$\frac{A-I_3}{2}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

التمرين 03:

1) لدينا

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$P^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$P^3=P^2\times P=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&3\\7&5&4\\4&3&2\end{pmatrix}$$

و منه

$$P^3-3P^2+2P=\begin{pmatrix}5&4&3\\7&5&4\\4&3&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5&4&3\\7&5&4\\4&3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&6&3\\9&6&6\\6&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&2\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

اذا : $P\left(P^2-3P+2I_3\right)=I_3$

وبماان ألضرب في مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 توزيعي على الجمع فإن

$P\left(P^2-3P+2I_3\right)=\left(P^2-3P+2I_3\right)P=I_3$ ومنه فإن المصفوفة P قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة

$$P^{-1}=P^2-3P+2I_3$$
$$=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

2) لدينا $PD=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ وبما أن ضرب المصفوفات المربعة تجميعي اذا

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}=A.$$

بما أن ضرب المصفوفات المربعة تجميعي و I_3 هو العنصر الحيادي بالنسبة للضرب و P^{-1} هي مقلوب P فإن

$$A^2=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)=PD\left(P^{-1}P\right)DP^{-1}=PDI_3DP^{-1}=PDDP^{-1}=PD^2P^{-1}.$$

يمكن أن نثبت بالتراجع أن الخاصية $A^n=PD^nP^{-1}$ تبقى صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

من جهة أخرى D مصفوفة قطرية وبالتالي فهي تحقق $D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}$

وبما أن : $(-1)^n$ تساوي 1 اذا كان n زوجيا و -1 اذا كان n فرديا . فيكون $D^n=I_3$ اذا كان n زوجيا و $D^n=D$ اذا كان n فرديا أي أن

$A^n=I_3$ اذا كان n زوجيا و $A^n=A$ اذا كان n فرديا.

التمرين 04:

حساب المحددات للمصفوفات التالية بطرق مختلفة

a) محدد المصفوفة (-5) هو -5.

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\times(-3)-(-2)\times(-1) = -6-2 = -8$ (استخدمنا تعريف محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 2)

c) نستخدم قاعدة ساريس وهي طريقة تعطينا محدد مصفوفة مربعة من الرتبة 3(نعيد كتابة العمودين الأول والثاني أمام المصفوفة)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$= 1\times1\times1 + 0\times1\times0 + 2\times1\times(-1) - 0\times1\times2 - (-1)\times1\times1 - 1\times1\times0 = 1+0-2-0+1-0 = 0$$

ويمكن حسابه بالنشر وفق أحد الأسطر الأعمدة (غالبا ما نستخدم السطر أو العمود الذي يشمل أكثر أصفار) ننشر مثلا وفق السطر الأول فنجد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1\times1-(-1)\times1) - 0(1\times1-0\times1) + 2(1\times(-1)-1\times0) = 0$$

d) مصفوفة مثلثية عليا محددها يساوي جداء عناصر قطرها أي $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times2\times1 = 2$

e) مصفوفة قطرية محددها يساوي جداء عناصر قطرها أي $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(-3)\times1 = -3$

التمرين 5:

لا يتغير محدد مصفوفة إذا أضفنا لأحد الصفوف (على التوالي الأعمدة) عبارة خطية للصفوف الأخرى(الأعمدة الأخرى).

إذا وجد في مصفوفة سطران أو عمودان مرتبطان خطيا فمحددها معدوم.

(a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$$

(استبدلنا العمود الثاني ونشرنا وفق العمود الثاني الجديد).

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ يكفي ملاحظة تشمل عمودين متساويين

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\times 0 = 0$

d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_4 \to L_4 + 2L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_4 \to C_4 - 7C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -16 \\ -2 & -3 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_4 \to L_4 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -16 \\ -2 & -3 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$4\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4(-1)\left(5\times 2 - (-3)\times(-3)\right) = -4$$

التمرين 06:

1) $\omega_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2;\ \omega_2 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2;\ \omega_3 = 2\varepsilon_3.$ ومنه $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2;\ f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2;\ f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$.

نعبر عن ذلك بالشكل التالي

$$\begin{bmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_2) & \\ 1 & -1 & 0 & \varepsilon_1 \\ -2 & 2 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

ومنه المصفوفة المرفقة بالتطبيق الخطي f هي . $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) بما أن f تطبيق خطي فإن

$$f(\omega) = f(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) = xf(\varepsilon_1) + yf(\varepsilon_2) + zf(\varepsilon_3)$$
$$= x(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2) + y(-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) + z(2\varepsilon_3) = (x-y)\varepsilon_1 + (-2x+2y)\varepsilon_2 + 2z\varepsilon_3$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\omega$$

اذا $f(\omega) = A\omega$.

3) لدينا

$$\ker f = \{\omega \in \mathbb{R}^3;\ f(\omega) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y = 0 \wedge z = 0\} = \{(x,x,0);\ x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,0)\rangle$$

وبما أن $v \neq 0$ فإن $\{v = (1,1,0)\}$ هو أساس لنواة f .

يما أن : $-2x + 2y = -2(x-y)$ فإن $\operatorname{Im} f \subset \{(x,-2x,z);\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

بالمقابل كل عنصر $(x,-2x,z)$ من هذه المجموعة هو صورة العنصر $(2x,x,z)\in\mathbb{R}^3$ اذا

$\operatorname{Im} f=\{(x,-2x,z);\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\}$. من جهة أخرى يمكن أن نكتب

$(x,-2x,z)=x(1,-2,0)+z(0,0,1)$ ومنه $\operatorname{Im} f=\langle u,w\rangle;\ u=(1,-2,0), w=(0,0,1)$

وبما أن الشعاعين u,w مستقلين خطيا فإن $\{u,w\}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$.

التمرين 07

نحسب محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\2&0&1\end{pmatrix}$ فنجد

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\2&0&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}-1&3\\0&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix}=1-0\times(-2)-0+2(2-3)=-1\neq 0$$

اذا فهي قابلة للقلب لأن المحدد يختلف عن 0 .لنحسب مقلوبها بطريقتين

1) نعلم أن $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}(cofA)^t$ حيث $cofA$ هي مصفوفة أصغريات A

$$cofA=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-2\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&3\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\0&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&-2\\1&-5&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

اذا

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-4&-5&2\\-2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\4&5&-2\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

2) نستخدم طريقة غوس لحساب مقلوب المصفوفة وذلك باجراء التغييرات البسيطة على أسطر المصفوفة المضخمة

$$[A/I_3]=\begin{bmatrix}1&-1&3&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3\longleftarrow L_3-2L_1}\begin{bmatrix}1&-1&3&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&2&-5&-2&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\longleftarrow L_3-2L_2}\begin{bmatrix}1&-1&3&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&-1&-2&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\longleftarrow L_1+L_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&-1&-2&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\longleftarrow L_1+L_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&1\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&-1&-2&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3\longleftarrow -L_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&1\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&1&2&2&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\longleftarrow L_2+2L_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&1\\0&1&0&4&5&-2\\0&0&1&2&2&-1\end{bmatrix}\longrightarrow[I_3/\mathrm{A}^{-1}].$$

التمرين 08

حسب تعريف المصفوفة المرفقة بتطبيق خطي نجد المصفوفات المرفقة بالتطبيقات في الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ هي كالتالي

$$M_f=\begin{pmatrix}5&1&2\\-1&1&-1\\1&2&0\end{pmatrix};\ M_g=\begin{pmatrix}1&1&3\\-1&0&-2\\-1&1&1\end{pmatrix};\ M_{f+g}=\begin{pmatrix}6&2&5\\-2&1&-3\\0&3&1\end{pmatrix}=M_f+M_g$$

وبما أن :

$$(f\circ g)(e_1)=f[g(e_1)]=f(e_1-e_2-e_3)=f(e_1)-f(e_2)-f(e_3)=2e_1-e_2-e_3.$$
$$(f\circ g)(e_2)=f[g(e_2)]=f(e_1)+f(e_3)=7e_1-2e_2+e_3$$
$$(f\circ g)(e_3)=f[g(e_3)]=3f(e_1)-2f(e_2)+f(e_3)=15e_1-6e_2-e_3$$

اذا

$M_{f\circ g}=\begin{pmatrix}2&7&15\\-1&-2&-6\\-1&1&-1\end{pmatrix}$. (نلاحظ أن $M_{f\circ g}=M_f.M_g$)

وباستخدام نفس الطريقة السابقة نجد $M_{g\circ f}=\begin{pmatrix}7&8&1\\-7&-5&-2\\-5&2&-3\end{pmatrix}$.

التمرين 09 :

1) لإثبات أن $B^*=\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ يكفي اثبات الأشعة الثلاثة مستقلة خطيا أي محدد مصفوفتها غير معدوم . لدينا

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1 = 1 \neq 0$ ومنه B^* أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

2) مصفوفة العبور من الأساس B الى الأساس B^* . هي $P_{BB^*} = \underset{B}{Mat}\left(B^*\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ بعبارة أخرى هي

المصفوفة المرفقة بالتطبيق المطابق $Id_{\left(\mathbb{R}^3, B^*\right)\to\left(\mathbb{R}^3, B\right)}$

اذا كان $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ هي مركبات شعاع u في الأساسين B^* ، B على الترتيب فإن

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

من جهة أخرى بحسابات بسيطة نجد $e_1 = e_1^*;\ e_2 = e_2^* - e_1^*;\ e_3 = e_3^* - (e_1 + e_2) = e_3^* - e_2^*$. ومنه

مصفوفة العبور من الأساس B^* الى الأساس. B هي

$P_{B^*B} = \underset{B^*}{Mat}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. لاحظ أن $P_{B^*B}{}^{-1} = P_{BB^*}$ ..

3) اذا كان $v = (a,b,c)_B ; v = (x,y,z)_{B^*}$ فإن

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_{B^*B} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}.$$

4) <u>الطريقة الأولى</u> نستخدم تعريف التطبيق لحساب صور عناصر الأساس B^*

لدينا

$$f\left(e_1^*\right) = -e_1 + e_2 + e_3 = -e_1^* + e_2^* - e_1^* + e_3^* - e_2^* = -2e_1^* + e_3^*$$

$$f\left(e_2^*\right) = 2e_3 = 2e_3^* - 2e_2^*$$

$$f\left(e_3^*\right) = e_1 + e_2 + e_3 = e_3^*$$

ومنه المصفوفة المرفقة بالتطبيق f في الأساس B^* هي

$$M_f\left(B^*\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

.

<u>الطريقة الثانية</u> : من تعريف التطبيق f نجد $f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B ; f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B ; f(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ ومنه

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وحسب المخطط
$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^3,B^*) & \xrightarrow{f_{B^*}} & (\mathbb{R}^3,B^*)\\ \downarrow & & \uparrow\\ (\mathbb{R}^3,B) & \xrightarrow{f_B} & (\mathbb{R}^3,B)\end{array}$$
فإن $f_{B^*}=Id_{(\mathbb{R}^3,B)\to(\mathbb{R}^3,B^*)}\circ f_B\circ Id_{(\mathbb{R}^3,B^*)\to(\mathbb{R}^3,B)}$ وبالتالي

$$M_f\left(B^*\right)=P_{B^*B}.M_f\left(B\right).P_{BB^*}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2&2&0\\0&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$$

التمرين 10

1) $\begin{cases}x-y=1\\y-z=0\\x+2y+z=3\end{cases}$ نستخدم طريقة كرامر لحل الجملة و نبدأ بحساب محددها فنجد

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1&0\\1&-1\end{vmatrix}=1\times\left(1\times1-2\left(-1\right)\right)+1\times\left(\left(-1\right)\left(-1\right)-1\times0\right)=4\neq0$$

ومنه للجملة حل وحيد $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$ حيث

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}}{4}=\frac{1\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-1&0\\1&-1\end{vmatrix}}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&-1\\1&3&1\end{vmatrix}}{4}=\frac{-\left(-1\right)\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\1&2&3\end{vmatrix}}{4}=\frac{1\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$$

2) $\begin{cases}x+y+z=-1\\x+y-z=2\\x-y-z=-3\end{cases}$ نستخدم طريقة كرامر كذلك . لدينا المجدد

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&0&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=2\left(-1-1\right)=-4\neq0$$ ومنه للجملة كذلك حل وحيد $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$

حيث:

$$x=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&1&-1\\-3&-1&-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&1&-1\\-4&0&0\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}(-4)\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2$$

$$y=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&-1\\1&-3&-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&-2\\0&-2&-2\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}3&-2\\-2&-2\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}(-6-4)=\frac{5}{2}$$

$$z=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&1&2\\1&-1&-3\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&0&-3\\1&1&2\\1&-1&-3\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&0&-3\\0&2&5\\1&-1&-3\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\times 6=-\frac{3}{2}$$

3) $\begin{cases}2x-y+z=0\\2x+y-2z=0\\2x+y-2z=0\end{cases}$ نجد محدد ها $\begin{vmatrix}2&-1&1\\2&1&-2\\2&1&-2\end{vmatrix}=0$ لأن السطرين الثاني والثالث متساويين..

بوضع $x=t;\ (t\in\mathbb{R})$ بجمع المعادلتين الأولى والثانية نجد $z=4x=4t$ ومنه $y=2x+z=2t+4t=6t$

و منه فالجملة في هذه الحالة لها عدد غير منته من الحلول كلها من الشكل $(t,6t,4t)$ حيث $(t\in\mathbb{R})$.

4) $\begin{cases}x-2y+z-t=1\\-y+z+2t=3\\-2x+y-z+t=0\\-x-y+3z+2t=4\end{cases}$ يمكن استخدام طريقة كرامر كذلك . نحسب أولا محددها

$$\begin{vmatrix}1&-2&1&-1\\0&-1&1&2\\-2&1&-1&1\\-1&-1&3&2\end{vmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&1&2\\-2&0&-1&1\\-1&2&3&2\end{vmatrix}\underset{L_4\leftarrow L_4+2L_1}{=}\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&1&2\\-2&0&-1&1\\1&0&5&0\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)\begin{vmatrix}0&1&2\\-2&-1&1\\1&5&0\end{vmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+2L_3}{=}\begin{vmatrix}0&1&2\\0&9&1\\1&5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\9&1\end{vmatrix}=1-18=-17\neq 0$$

ومنه للجملة حل وحيد $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ استخدم نفس طريقة حل الجملتين 1) و2). لحسابه.

يمكن استخدام طريقة أخرى لحساب الحل كما يلي

هذه الجملة تكافئ المعادلة $AX=B$ حيث $A=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&-1&1&2\\-2&1&-1&1\\-1&-1&3&2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\4\end{pmatrix}$

بما أن المحدد غير معدوم فالمصفوفة A قابلة للقلب نبحث عن مقلوب المصفوفة A أي المصفوفة A^{-1}

فيكون لدينا

$AX=B\Leftrightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B\Leftrightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B\Leftrightarrow I_4X=A^{-1}B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$.