II.1 Introduction

La méthode des différences finis est l'un des méthodes numériques utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle permet, en utilisant des schémas des différences finis, de transformer l'écriture différentielle des équations gouvernant les phénomènes de transport, en écriture algébrique pour les résoudre par la suite à l'aide des outils de l'analyse numérique.

Dans cette méthode on remplace le domaine continu du calcul par un ensemble de points (*Maillage*), et cherche une solution approchée sur ces points. Pour cette raison, on approxime les équations aux dérivées partielles par des développements limitées de Taylor au voisinage des points de maillage. La solution du système d'équations algébriques, linéaires ou non linéaires, ainsi obtenu fournit donc la solution approchée du problème posé.

II.2 Schémas numériques

La transformation des dérivées partielles en expressions algébriques est basée principalement sur les développements limités de Taylor. C'est-à-dire, des développements tronqués à un certain ordre qui dépend de la précision souhaité.

II.2.1 Erreur de troncature

L'erreur de troncature désigne la partie tronquée de la formule de Taylor. Pour quantifier cette erreur, en considère le développement en série de Taylor de la fonction *f* au voisinage du point $x=x_0$, on écrit donc :

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0}+\frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0}+\ldots+\frac{\Delta x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_{x_0}+R_{n+1} \qquad \text{(II.1)}$$

avec $x= x_0+\Delta x$, et Δx le pas de discrétisation (*distance entre deux points de maillage*).

Le dernier terme de l'équation R_{n+1}est nommé erreur de troncature, elle donnée par la formule de Lagrange par :

$$R_{n+1}=\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{\partial^{n+1} f(\xi)}{\partial x^{n+1}}\right) \qquad \text{(II.2)}$$

Avec : $x_0 \leq \xi \leq x_0+\Delta x$.

II.2.2 Schémas numériques pour les dérivées premières

Comme nous avons signalés dans l'introduction de ce chapitre, en ce basant sur le développement limité de Taylor pour transformer l'écriture différentielle des dérivées premières en écriture algébrique.

Dans le tableau (II.1) nous donnons la l'écriture indicielle équivalente des différentes opérateurs et fonctions utilisées dans cette partie.

Tableau II.1 *: Représentation indicielle des fonctions utilisées dans les développements limités de Taylor*

Représentation ordinaire	*Représentation indicielle*
$f\left(x_i\right)$	f_i
$f\left(x_i,y_j,z_k\right)$	$f_{i,j,k}$
x,y et z aux nœuds i,j et k respectivement	x_i,y_j,z_k

II.2.2.1 Schéma décentré amont

Soit le développement limité de la fonction f au voisinage du point x_i *(voir figure II.3)*.

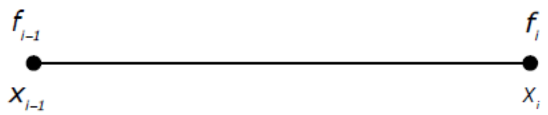

Figure II.3 : *Segment appartient à la courbe $f(x)$ limité par les points x_{i-1} et x_i*

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \tag{II.4}$$

avec : $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$.

De cette dernière équation on constate :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \tag{II.5}$$

L'éq. (II.5) représente un schéma décentré amont, ce dernier utilisé pour exprimer la dérivée première de la fonction f au voisinage du point x_i.

II.2.2.2 Schéma décentré aval

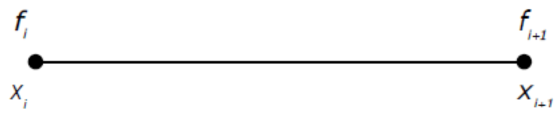

Figure II.4 : *Segment appartient à la courbe $f(x)$ limité par les points x_i et x_{i+1}*

On a le développement limité de Taylor suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \tag{II.6}$$

avec : $x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$.

De l'éq. (II.6), on peut mettre :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} \right) \tag{II.7}$$

On dit qu'on a approché la dérivée première de la fonction f par un schéma décentré aval, il est d'ordre 2.

II.2.2.3 Schéma centré

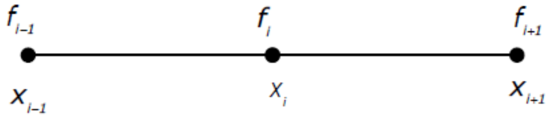

Figure II.5 *: Segment appartient à la courbe $f(x)$ limité par les points x_{i-1} et x_{i+1}*

L'utilisant des développements limités de Taylor suivants :

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) , \quad x_{i-1} \le \xi \le x_i \qquad \text{(II.8)}$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) , \quad x_i \le \xi \le x_{i+1} \qquad \text{(II.9)}$$

Nous permet, en soustrayant l'éq. (II.8) de l'éq. (II.9), de calculer le schéma centré des différences finis. On écrit donc :

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{2\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right)$$

donc :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) , \qquad x_{i-1} \le \xi \le x_{i+1} \qquad \text{(II.10)}$$

L'éq. (II.10) représente un schéma centré aux différences finis, il est d'ordre 1.

On peut avoir des schémas d'ordre supérieur, associes aux dérivées premières, en augmentant le nombre de points de discrétisation. Autrement dit, on utilise plus de termes dans le développement limité de Taylor.

II.2.3 Schémas numériques pour les dérivées secondes

De la même manière que pour les dérivées première de la fonction f, on peut utiliser un schéma décentré amont, décentré aval ou centré pour évaluer la dérivée deuxième de la fonction f au voisinage de l'abscisse x_i. Il on est de même pour la précision, on peut aller à n'importe quel ordre.

II.2.3.1 Schéma décentré amont

Pour évaluer le schéma décentré amont, associé à la dérivée deuxième de la fonction au voisinage de x_i, on utilise les développements limités de Taylor des fonctions f_{i-1} et f_{i-2}. On écrit donc

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) , \quad x_{i-1} \le \xi \le x_i \qquad \text{(II.11)}$$

$$f_{i-2} = f_i - (2\Delta x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) \quad , \quad x_{i-2} \le \xi \le x_i \qquad \text{(II.12)}$$

En multipliant l'éq. (II.11) par 2, on obtient :

$$2f_{i-1} = 2f_i - 2\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{2\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \frac{2\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) \quad , \quad x_{i-1} \le \xi \le x_i \qquad \text{(II.13)}$$

En soustrayant l'éq. (II.13) de l'éq. (II.12), on trouve :

$$f_{i-2} - 2f_{i-1} = -f_i + \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \Delta x^3\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right)$$

Finalement :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2} + \Delta x\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) \quad , \quad x_{i-2} \le \xi \le x_i \qquad \text{(II.13)}$$

L'éq. (II.13) désigne un schéma décentré amont pour la dérivée deuxième de f au voisinage de x_i, dont l'erreur de troncature est d'ordre un.

II.2.3.2 Schéma décentré aval

Soit les deux développements suivant :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) \quad , \quad x_i \le \xi \le x_{i+1} \qquad \text{(II.14)}$$

$$f_{i+2} = f_i + (2\Delta x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) \quad , \quad x_i \le \xi \le x_{i+2} \qquad \text{(II.15)}$$

(II.15) -2x(II.14) $\Rightarrow \quad f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \Delta x^3\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right)$

donc :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta x^2} - \Delta x\left(\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3}\right) \quad , \quad x_i \le \xi \le x_{i+2} \qquad \text{(II.16)}$$

L'éq. (II.16) représente un schéma décentré aval, qui peut être utilisé pour évaluer la dérivée $2^{ème}$ de la fonction f au voisinage de x_i. La précision de ce schéma est d'ordre 1.

II.2.3.3 Schéma centré

L'évaluation du schéma centré nécessite l'utilisation des deux développements suivants tronqués au quatrième ordre.

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4}\right) \;,\; x_{i-1} \le \xi \le x_i \qquad \text{(II.17)}$$

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4}\right) \;,\; x_i \le \xi \le x_{i+1} \qquad \text{(II.18)}$$

En sommant l'éq. (II.17) et l'éq. (II.18) on trouve :

$$f_{i-1} + f_{i+1} = 2f_i + \Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^4}{12}\left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4}\right)$$

ou bien :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\left(\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial x^4}\right) \;,\; x_{i-1} \le \xi \le x_{i+1} \qquad \text{(II.19)}$$

L'éq. (II.19) représente un schéma aux différences finis centré d'ordre deux. Ce schéma est utilisé généralement pour évaluer les termes de diffusion dans les équations de conservation. Il peut être utilisé, dans le cas des écoulements à vitesse modérée, pour évaluer les termes d'advection (*schéma plus précis que les schémas décentrés*).

II.2.4 Schémas numériques pour les fonctions à plusieurs variables

Soit f une fonction qui dépend de plusieurs variables, par exemple (x,y) . En se basant sur les schémas déjà cités auparavant, les dérivées de cette fonction par rapport à ces variables on notation indicielle peuvent s'écrire comme suit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right) \qquad \text{(II.25)}$$

l'éq. (II.25) indique le schéma centré, en différences finis, de la dérivée première de la fonction f par rapport à la variable x, elle est d'ordre deux.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O\left(\Delta y^2\right) \qquad \text{(II.26)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta y^2} + O\left(\Delta y^2\right) \qquad \text{(II.27)}$$

l'éq. (II.27) représente le schéma centré, en différences finis, de la dérivée deuxième de la fonction f par rapport à la variable x, elle est d'ordre deux.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\Delta y^2} + O\left(\Delta y^2\right) \qquad \text{(II.28)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} + O\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right) \qquad \text{(II.29)}$$