جامعة حمه لخضر بالوادي

معهد العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات --- أولى MI   مقياس : جبر 2

سلسلة المصفوفات, المحددات و الجمل الخطية

<u>التمرين الاول :</u> أحسب ان أمكن :

أ) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ه) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ و) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ي) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

<u>التمرين الثاني :</u> نعتبر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, أحسب A^2 ثم تحقق أن $A^2 = A + 2I_3$

حيث I_3 هي مصفوفة الوحدة. استنتج أن A قابلة للقلب و احسب مقلوبها.

<u>التمرين الثالث :</u> نعتبر المصفوفات :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) أحسب $P^3 - 3P^2 + 2P$, استنتج أن P تقبل مقلوب P^{-1} يطلب تعيينه.

(2) تحقق أن $A = PDP^{-1}$ ثم أحسب A^n بدلالة n .

<u>التمرين الرابع :</u> أحسب قيم محددات المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A = (-5)$$

<u>التمرين الخامس :</u> أحسب باستعمال التطبيقات الخطية قيم محددات التالية:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & a & a \\ b+c & b+c & b+c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>التمرين السادس :</u> ليكن $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ و الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ على $\mathbb{R}$ و ليكن

$\omega_3 = (0,0,2)$, $\omega_2 = (-1,2,0)$, $\omega_1 = (1,-2,0)$ و f تطبيق داخلي معرف على $\mathbb{R}^3$ حيث

$f(\epsilon_i) = \omega_i$ من أجل $i = 1,2,3$.

1) عبر عن $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ بدلالة $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$. استنتج مصفوفة التطبيق f في الأساس القانوني.

2) ليكن $\omega = (x, y, z)$ أحسب $f(\omega)$.

3) أوجد أساس لكل من $Kerf$ و Imf .

التمرين السابع : هل المصفوفة التالية قابلة للقلب $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ اذا كان كذلك أوجد معكوسها بطريقتين.

التمرين الثامن : ليكن V فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ بعده يساوي 3 أساسه القانوني $\{e_1, e_2, e_3\}$. نعرف التطبيقين f و g كمايلي :

$$f(e_1) = 5e_1 - e_2 + e_3,\ f(e_2) = e_1 + e_2 + 2e_3\ ,\ f(e_{31}) = 2e_1 - e_2$$
$$g(e_1) = e_1 - e_2 - e_3,\ g(e_2) = e_1 + e_3\ ,\ g(e_3) = 3e_1 - 2e_2 + e_3$$

أوجد المصفوفة المرافقة في الأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ لكل من التطبيقات :

f ,g , $f \circ g$, $f + g$, $f \circ g$ و $g \circ f$.

التمرين التاسع : ليكن $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني للفضاء شعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. و لتكن المجموعة $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ حيث :

$$e_1^* = e_1 \quad , \quad e_2^* = e_1 + e_2 \quad , \quad e_3^* = e_1 + e_2 + e_3$$

(1) بين أن B^* أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.
(2) أوجد مصفوفة العبور P من الأساس B الى الأساس B^* ثم مصفوفة العبور Q من الأساس B^* الى الأساس B.
(3) اذا كان v شعاع من $\mathbb{R}^3$ حيث $v = (a, b, c)_B$ ما هي احداثيات v في B^*.
(4) ليكن f التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$ المعرف ب:

$$(x, y, z) \to (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$

أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f وفق الأساس B^* بطريقتين.

التمرين العاشر : أوجد حلول المعادلات الخطية التالية :

$$(1)\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ x - y - z = -3 \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ -y + z + 2t = 3 \\ -2x + y - z + t = 0 \\ -x - y + 3z + 2t = 4 \end{cases}$$