وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة الأخضر بالوادي
كلية التكنولوجيا
جذع مشترك علوم وتقنيات

مقياس: رياضيات 2
المحور الثالث
المصفوفات

مسؤول المقياس
فرحات محمد السعيد

I - عموميات:

1- تعريف المصفوفة:

ليكن $\mathbb{K}$ حقلا تبديليا ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$). n و p من $\mathbb{N}^*$
نسمي مصفوفة A ذات سلميات في $\mathbb{K}$ من النمط $(n \times p)$، الجدول التالي

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$1 \leq i \leq n$
$1 \leq j \leq p$

- السلميات التي لها نفس الدليل الأول i تسمى السطر رقم i
- السلميات التي لها نفس الدليل الثاني j تسمى العمود رقم j
- نرمز لمجموعة المصفوفات من النمط $n \times p$ سلمياتها في $\mathbb{K}$ بالرمز $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3i & -2 \\ 4 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

A مصفوفة تنتمي إلى $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$

$a_{12} = 3i$ ، $a_{21} = 4$ ، $a_{23} = -10$

2- المصفوفة المعدومة من النمط $n \times p$:

هي المصفوفة (f_{ij}) من $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ حيث كل السلميات f_{ij} معدومة.
و يرمز لها بالرمز: $O_{n \times p}(\mathbb{K})$

3- تساوي مصفوفتين:

لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ ، $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$

$$A = B \Leftrightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq p : a_{ij} = b_{ij}$$

4 - منقول مصفوفة:

ليكن المصفوفة $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

منقول المصفوفة A هي المصفوفة التي يرمز لها بالرمز A^t والتي تنتمي إلى $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ الناتجة بتغيير أسطر A إلى أعمدة.

$$A=(a_{ij}) \Rightarrow A^t=(a_{ji}).$$

$1\leq i\leq n.$ $\quad$ $1\leq j\leq p.$

$1\leq j\leq p$ $\quad$ $1\leq i\leq n.$

5 - أنواع المصفوفات:

- المصفوفة المربعة هي مصفوفة A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ حيث: $n=p$

يُرمز لمجموعة المصفوفات المربعة بالرمز: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A=(a_{ij}) \ ; \ 1\leq i\leq n \ ; \ 1\leq j\leq n$$

- القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ هي السلميات a_{ii} حيث: $1\leq i\leq n$

- المصفوفة المثلثية العلوية هي مصفوفة A مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ حيث

$$\forall\ 1\leq i,j\leq n:(j<n\Rightarrow(a_{ij})=0)$$

- المصفوفة المثلثية السفلية هي مصفوفة A مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ حيث،

$$\forall\ 1\leq i,j\leq n:(j>n\Rightarrow a_{ij}=0).$$

- المصفوفة القطرية هي مصفوفة A مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ حيث،

$$\forall\ 1\leq i,j\leq n:(j\neq n\Rightarrow a_{ij}=0).$$

- المصفوفة الحيادية هي مصفوفة قطرية حيث كل عنصر a_{ii} من القطر الرئيسي يساوي 1 ويرمز لها بالرمز I_n .

أمثلة:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

مثلثية سفلية — مثلثية علوية — مربعة

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

قطرية — حيادية

II - العمليات على المصفوفات:

1 - جمع المصفوفات:

A و B مصفوفتان من نفس المجموعة $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ ، $A=(a_{ij})$; $B=(b_{ij})$

مجموع المصفوفتين A و B هو المصفوفة C من نفس النمط: $(n\times p)$.

$$C = A+B = (c_{ij}) \; ; \; c_{ij} = a_{ij}+b_{ij} \; , \; \forall\; 1\le i\le n \; , \; \forall\; 1\le j\le p.$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} , \; B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2 - ضرب مصفوفة في سلمية:

لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و α من $\mathbb{K}$. نعرّف المصفوفة $\alpha\cdot A$ بـ:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; -2A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -10 \end{pmatrix}$$

<u>خواص</u>: ليكن A، B و C من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و α، β من $\mathbb{K}$. لدينا الخواص التالية

- $A+B=B+A$.
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $A+O_{n\times p}=A$.
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
- $1_{\mathbb{K}}\cdot A=A$

3- <u>الجداء المصفوفي</u>:

ليكن المصفوفتان: $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $B\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

ضرب المصفوفتين A و B، هو المصفوفة C من $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$

حيث، $A\times B=C=(C_{ij})$ $\quad 1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq p$.

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

<u>مثال</u>:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&5&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&-2\\2&4\\3&1\end{pmatrix}$$

الجداء $C=A\times B$ معرّف لأنّ: $A\in\mathcal{M}_{\underline{\underline{2\times 3}}}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{\underline{\underline{3\times 2}}}(\mathbb{R})$

$C=(C_{ij})$ تنتمي الى المجموعة $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l}C_{11}=3(0)+1(2)+0(3)=2.\\C_{12}=3(-2)+1(4)+0(1)=-2.\\C_{21}=2(0)+5(2)+4(3)=22\\C_{22}=2(-2)+5(4)+4(1)=20\end{array}\right.\Rightarrow C=\begin{pmatrix}2&-2\\22&20\end{pmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عين $A \times B$ و $B \times A$.

الحل:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظات: من المثال السابق نلاحظ:

- الجداء المصفوفي ليس تبديليا: $A \times B \neq B \times A$
- قد يكون الجداء $A \times B = 0$ من غير أن يكون $A = 0$ أو $B = 0$

خواص الجداء المصفوفي:

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

  $(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$.
- $\alpha (A \times B) = (\alpha A) \times B = A \times (\alpha B)$
- $A \times I_n = A$ و $I_m \times A = A$; $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

4 - **قوة مصفوفة:**

ليكن A مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و p عدد طبيعي.

نصطلح أن $A^0 = I_n$ ولدينا $A^1 = A$ ، $A^2 = A \times A$

ونعرف: $A^p = A \times A \times \dots \times A$ (p مرة)

تطبيق: لتكن المصفوفة A التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1- احسب A^2 ، A^3 ، A^4

2- استنتج A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

الحل :
$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0&7\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}1&0&15\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}$$

مما سبق نستنتج أن :
$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&2^n-1\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$$

ويمكن أن نبرهن على صحتها بالتراجع .

ملاحظة : من أجل A , B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$
$$(A+B)^3\neq A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2\neq A^2-B^2$$

III - المحددات : Determinants

① تعريف : لتكن المصفوفة المربعة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

محدد المصفوفة A (التي نرمز له بالرمز $\det(A)$ أو $|A|$) هو السلمية من $\mathbb{K}$ المعرف كمايلي :

- اذا كان : $n=1$ فان $A=(a_{11})$ $\det(A)=a_{11}$
- اذا كان : $n>1$ فان :
$$\boxed{\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}}\quad\dots(*)$$

حيث Δ_{ij} هو المحدد للمصفوفة من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ الناتجة عن A بنزع السطر i والعمود j

ملاحظة : يمكن حساب المحدد للمصفوفة A بتثبيت أي سطر نختاره وفق العلاقة $(*)$ ، ويمكن حسابه بتثبيت أي عمود نختاره .

مثال 1 : (حساب المحدد من أجل $n=2$)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

لنستخدم العلاقة (*) ونثبت السطر الأول

$$\det A=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{1+j}a_{1j}\Delta_{1j}=(-1)^{1+1}a_{11}\Delta_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}\Delta_{12}.$$

$$=a_{11}\det(a_{22})+(-1)a_{12}\det(a_{21})$$

$$\boxed{\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

مثال 2 : احسب محدد المصفوفة B حيث :

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

لنستخدم العلاقة (*) ونثبت العمود الأول .

$$\det(B)=+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0-2(3-4)+1(0-2)$$

$$=0-2(-1)+1(-2)=0$$

2- نتائج :

- إذا كانت المصفوفة مثلثية أو قطرية فإن محددها يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي
- إذا انعدم سطر أو عمود في المصفوفة المربعة فإن محددها معدوم .
- إذا تناسب عناصر سطرين (أو عمودين) فإن المحدد معدوم .

أمثلة :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

A مثلثية علوية ومنه محددها : $\det A=1(-3)(2)=-6$

B قطرية ومنه محددها : $\det B=2(1)(-1)=-2$

السطر الأول لـ C معدوم ومنه : $\det C=0$

العمود 1 والعمود 3 لـ D متناسبان : $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$

ومنه محدد المصفوفة D هو $\det D=0$

3. **خواص :** A و B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و λ من $\mathbb{K}$.

- $\det(A \times B) = \det A \times \det B$.
- $\det(A^t) = \det A$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

4. **قاعدة ساروس** Sarros لحساب محدد مصفوفة من $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

لتكن المصفوفة المربعة A من $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. $A=(a_{ij})$.

تعتمد هذه القاعدة على إعادة ~~الصحر~~ كتابة السطرين الأولين في الأسفل أو اعادة كتابة العمودين الأولين على يمين المصفوفة وحساب المحدد يكون كالآتي

$$\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}$$
$$- a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}.$$

مثال : احسب بطريقتين محدد المصفوفة A حيث :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\det A = 1(3)(1) + 0(4)(0) + 2(2)(1) - 0(3)(1) - 0(2)(1) - 2(4)(1) = \boxed{-1}$
- $\det A = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 8 + 4 - 0 = \boxed{-1}$

IV - مقلوب مصفوفة مربعة

① **تعريف :** لتكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. نقول أن A قابلة القلب أو عكوسة إذا وجدت مصفوفة وحيدة B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تحقق :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

نرمز لمقلوب المصفوفة A بالرمز A^{-1}.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

نلاحظ أن : $A \times B = B \times A = I_2$ ومنه $A^{-1} = B$

ترميز : نرمز لمجموعة المصفوفات من $M_n(\mathbb{K})$ المعكوسة بالرمز $GL_n(\mathbb{K})$

نظرية : (وجود مقلوب مصفوفة)

لتكن المصفوفة A من $M_n(\mathbb{K})$.

A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A قابلة للقلب لأن $\det A = -2$ و $-2 \neq 0$

بينما B ليس قابل للقلب لأن $\det B = 0$

2 - تعيين مقلوب مصفوفة مربعة

لتكن المصفوفة A من $M_n(\mathbb{K})$ حيث $\det A \neq 0$

مقلوب المصفوفة A هو A^{-1} ويعين بهذا القانون :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C_{ij})$$

$$(C_{ij}) = (adj(A))^t \quad ; \; adj(A) = (\delta_{ij}) \; ; \; \delta_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

Δ_{ij} هو محدد المصفوفة من الرتبة $(n-1)$ الناتجة عن A بحذف السطر i والعمود j

مثال 1: ليكن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مع $\det A \neq 0$

• لابد أولا من تعيين $adj(A) = (\delta_{ij})$

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} = (1) \cdot d \cdot = d.$$

$$\delta_{12} = (-1)^{1+2} \Delta_{12} = (-1) \cdot c = -c.$$

$$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \Delta_{21} = (-1) \cdot b = -b.$$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+2} \Delta_{22} = (1) \cdot a = a.$$

$$\Rightarrow adj(A) = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (C_{ij}) = (adj(A))^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

أخيرا مقلوب A هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (C_{ij})$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

تطبيق عددي مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

مثال 2: لتكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ التالية:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

عين مقلوب المصفوفة A

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & -4 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 0 - 8 + 6 - 0 - (-4) - 0 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(adj(A)\right)^t.$$

$$\delta_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1) = -1$$

$$\delta_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2.$$

$$\delta_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(3) = 3.$$

$$\Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2.$$

$$\delta_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4.$$

$$\delta_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(4) = -4.$$

$$C = \left(adj(A)\right)^t$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4$$

$$\delta_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-10) = 10.$$

$$\delta_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(12) = 12.$$

أخيرا .

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot C.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1{,}5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

3 - خواص: لتكن A و B مصفوفتين من $M_n(\mathbb{R})$ ومن $GL_n(\mathbb{R})$

$$1/ \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$2/ \quad (A\times B)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$$

$$3/ \quad \forall p\in\mathbb{N}: A^{-p} = (A^{-1})^{p} = \underbrace{A^{-1}\times A^{-1}\times\cdots\times A^{-1}}_{p \text{ مرة}}.$$

البرهان عن الخاصية 2:

لدينا:
$$(A\times B)\times(B^{-1}\times A^{-1}) = A\times(\underbrace{B\times B^{-1}})\times A^{-1}$$
$$= A\times I_n\times A^{-1}$$
$$= A\times A^{-1} = I_n.$$

ومنه مقلوب $A\times B$ هو $B^{-1}\times A^{-1}$ وهو المطلوب.

تطبيق:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$

احسب A^{-1} ، B^{-1} ، $(A\times B)^{-1}$ و A^{-3}

2) لتكن المصفوفة المربعة A التالية $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

أ) تأكد أن $A^2 - A = 2I_3$ واستنتج A^{-1}

ب) عين من جديد A^{-1} مستخدما القانون.

الحل : 1) من أجل مصفوفة $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ فإن مقلوبها هو

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$ (أنظر ص 10)

ومنه

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

2) أ)

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\ ;\ A^2=A\times A.$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^2-A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2I_3.$$

استنتاج A^{-1} : لدينا،

$$A^2-A=2I_3.$$

$$\Rightarrow A(A-I_3)=2I_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(A)(A-I_3)=I_3.$$

$$\Rightarrow A\cdot\left[\frac{1}{2}(A-I_3)\right]=I_3$$

نستنتج من التعريف ص 8 أن $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I_3).$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$