الفصل الثاني:
دساتير تايلور
و النشور المحدودة

I – عموميات:

1. الدّوال من الصنف C^n:

تعاريف: لتكن الدّالة $f: I \to \mathbb{R}$ معرّفة على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ و ليكن $n \in \mathbb{N}$.

– نقول أنّ الدّالة f قابلة للاشتقاق باستمرار على المجال I (أو من الصنف C^1 على I) إذا كانت قابلة للاشتقاق على I و f' دالة مستمرّة على I .

– نقول أنّ الدّالة f قابلة للاشتقاق باستمرار n مرّة على المجال I (أو من الصنف C^n على I) إذا كانت قابلة للاشتقاق n مرّة على I و $f', f'', ..., f^{(n)}$ دوال مستمرّة على I .

نرمز لمجموعة الدوال من الصنف C^n على بالرمز $C^n(I)$.

– إذا كان من أجل $n \in \mathbb{N}$ الدّالة f قابلة للاشتقاق باستمرار n مرّة على المجال I قلنا أنّ f من الصنف C^∞ على I .

اصطلاح: الدوال من الصنف C^0 على I هي الدوال المستمرة على I .

نتائج:

1– $C^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(I)$.

2– $C^\infty(I) \subset \cdots\cdots\cdots \subset C^1(I) \subset C^0(I)$.

أمثلة:

1) الدوال كثيرات الحدود هي دوال من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}$.

2) الدّالّتان $\sin x$ و $\cos x$ من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}$ لأنّه:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

3) نعرّف الدّالّة f على بـ
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

الدّالة f مستمرة على لأنّ: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f(0)$ فهي من الصنف $C^0(\mathbb{R})$.

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

الدّالة f' ليست مستمرة عند 0 لأنّ: $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ غير موجودة و عليه $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

2 .المقارنة المحلّية للدّوال في جوار نقطة:

تعريف: الجوارات

1ـ نقول أنّ V جواراً لـ $a \in \mathbb{R}$ إذا وُجد $\varepsilon > 0$ حيث: $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$.

2ـ نقول أنّ V جواراً لـ $+\infty$ إذا وُجد $b \in \mathbb{R}$ **حيث:** $]b, +\infty[\subset V$.

3ـ نقول أنّ V جواراً لـ $-\infty$ إذا وُجد $b \in \mathbb{R}$ **حيث:** $]-\infty, b[\subset V$.

2 . 1 هيمنة وإهمال دالة أمام أخرى في جوار نقطة:

تعريف:(علاقة الهيمنة)

f و g دالتّان معرّفتان في جوار $a \in \overline{\mathbb{R}}$، نقول أنّ الدّالة g **مهيمنة** على الدّالة f في جوار a إذا و فقط إذا وُجدت دالة B معرّفة في جوار a تحقق:

1ـ $f(x) = B(x)g(x)$ في جوار a .

2ـ B محدودة في جوار a .

ونكتب $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$.

تعريف:(دالة مهملة أمام أخرى)

f و g دالتّان معرّفتان في جوار $a \in \overline{\mathbb{R}}$، نقول أنّ الدّالة f **مهملة** امام الدّالة g في جوار a إذا و فقط إذا وُجدت دالة ε معرّفة في جوار a تحقق:

1ـ $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ في جوار a .

2- $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

ونكتب $f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))$.

ملاحظة: إذا كانت f معرّفة في جوار a لدينا :

1- $f(x)=\underset{x\to a}{O}(1) \Leftrightarrow$ f محدودة في جوار a .

2- $f(x)=\underset{x\to a}{o}(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=0$.

قضيّة:

f و g دالتان معرّفتان في جوار V لـ $a\in\overline{\mathbb{R}}$ ، نفرض أنّ g لا تنعدم على $V-\{a\}$ ، لدينا:

1- $f=\underset{x\to a}{O}(g) \Leftrightarrow$ $\frac{f}{g}$ محدودة في جوار a .

2- $f=\underset{x\to a}{o}(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

خواص:(العمليات الجبرية)

لتكن f,f_2,f_1,g_2,g_1 و g دوال معرّفة في جوار $a\in\overline{\mathbb{R}}$ ، لدينا:

1- $f_1=\underset{x\to a}{o}(g)$ et $f_2=\underset{x\to a}{o}(g)\Rightarrow f_1+f_2=\underset{x\to a}{o}(g)$

2- $f_1=\underset{x\to a}{O}(g)$ et $f_2=\underset{x\to a}{O}(g)\Rightarrow f_1+f_2=\underset{x\to a}{O}(g)$

3- $f_1=\underset{x\to a}{o}(g)$ et $f_2=\underset{x\to a}{o}(g)\Rightarrow f_1.f_2=\underset{x\to a}{o}(g)$

4- $f_1=\underset{x\to a}{O}(g)$ et $f_2=\underset{x\to a}{O}(g)\Rightarrow f_1.f_2=\underset{x\to a}{O}(g)$

5- $f_1=\underset{x\to a}{o}(g)$ et f_2 محدودة في جوار a $\Rightarrow f_1.f_2=\underset{x\to a}{o}(g)$

أمثلة: من أجل α,β عددين حقيقين موجبين تماماً، لدينا:

1- $(\ln x)^{\beta}=\underset{x\to+\infty}{o}(x^{\alpha})$ 2- $x^{\alpha}=\underset{x\to+\infty}{o}(e^{\beta x})$

3- $(\ln x)^{\beta}=\underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)$ 4- $e^{\beta x}=\underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)$

2 . 1 الدّوال المتّكافئة في جوار نقطة:

تعريف:

f و g دالتان معرّفتان في جوار $a\in\overline{\mathbb{R}}$، نقول أنّ f و g **متكافئتين** في جوار a إذا و فقط إذا كان:

$(f-g)=\underset{x\to a}{o}(g)$ في جوار a، ونكتب: .

قضيّة:(تمييز الدوال المتّكافئة)

f و g دالتان معرّفتان في جوار V لـ $a\in\overline{\mathbb{R}}$ ، لدينا:

1- $f\underset{x\to a}{\sim}g \Leftrightarrow$ توجد دالة ε معرّفة في جوار a تحقق $f(x)=(1+\varepsilon(x))g(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$

2- $f\underset{x\to a}{\sim}g \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ (حيث g لا تنعدم على $V-\{a\}$).

قضيّة:(بعض خواص الدوال المتّكافئة)

f و g دالتان معرّفتان في جوار $a\in\overline{\mathbb{R}}$، لدينا عندئذٍ:

1- يوجد جوار لـ a على هذا الجوار f و g من نفس الإشارة $\Rightarrow f\underset{x\to a}{\sim}g$.

2- $f\underset{x\to a}{\sim}l \Leftarrow \left[\lim\limits_{x\to a}f(x)=l \quad\wedge\quad l\neq 0\right]$.

3- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l \Leftarrow \left[f\underset{x\to a}{\sim}g \quad\wedge\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=l\right]$.

خواص:(العمليات الجبرية)

f,g,f_1,g_1 دوال معرّفة في جوار $a\in\overline{\mathbb{R}}$ حيث $f\underset{x\to a}{\sim}g$ و $f_1\underset{x\to a}{\sim}g_1$ لدينا عندئذٍ:

1- $f.f_1\underset{x\to a}{\sim}g.g_1$.

2- $\dfrac{f}{f_1}\underset{x\to a}{\sim}\dfrac{g}{g_1}$. (حيث f_1,g_1 لا تنعدمان في جوار a).

ملاحظة: عموماً مجموع دالتين لا يكافئ مجموع المكافئات.

بعض المكافئات المألوفة:

1- $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x$ 2- $e^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$ 3- $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$

4- $\tan x\underset{x\to 0}{\sim}x$ 5- $\arcsin(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$ 6- $\arctan(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$

7- $(1+x)^\alpha-1\underset{x\to 0}{\sim}\alpha x$

8- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a فإنّ $f(x)\underset{x\to a}{\sim}f(a)+f'(a)(x-a)$

II. دساتير تايلور:

1. دستور تايلور بباقي لاغرانج:

نظرية: إذا كانت f دالة عددية من الصنف C^n على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 بحيث تقبل $f^{(n)}$ الاشتقاق على I ، فإنّه من أجل كل عدد x من I يوجد عدد c محصورا تماما بين x_0 و x بحيث:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+.........+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.............................(I)$$

برهان:

نفترض أنّ $x>x_0$. نعتبر $g:[x_0,x]\to\mathbb{R}$ الدالة المعرّفة كما يلي:

$$g(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(x-t)^{n+1}$$

حيث: $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

الدالة g مستمرة على المجال $[x_0,x]$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]x_0,x[$ ، و تحقق:

$$g(x_0)=g(x)=0$$

حسب نظرية رول يوجد c عددا محصورا تماما بين x_0 و x أي $c\in]x_0,x[$ بحيث: $g'(c)=0$

لدينا:

$$g'(t)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}+(n+1)\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(x-t)^n$$
$$=-\left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$$
$$+(n+1)\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(x-t)^n$$
$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^k+(n+1)\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(x-t)^n$$

وبالتالي يكون: $g'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^{k}+(n+1)\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(x-c)^{n}=0$ و منه:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

و هذا يستلزم: $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}$

من أجل $x<x_0$ نبرهن بطريقة مماثلة لنجد:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

تعريف: العلاقة (I) تسمّى نشر أو دستور تايلور بباقي لاغرانج من الرتبة n للدالة f بين x و x_0 .

ونكتب : $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

كثير الحدود: $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}$ يسمى الجزء النظامي أو الجزء العادي للنشر

و يسمّى $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ بباقي النشر.

حالة خاصة: دستور ماك لوران– لاغرانج

في الحالة الخاصة: $x_0=0$ ، تسمّى العلاقة (I) بدستور ماك لوران– لاغرانج من الرتبة n للدالة f :

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ملاحظات:

1. دستور تايلور للدالة f بين x و x_0 هو تعميم لنظرية التزايدات المنتهية، نلاحظ ذلك بأخذ $n=0$ في دستور تايلور فنجد : $f(x)=f(x_0)+f'(c)\frac{(x-x_0)}{1!}$ وبالتالي: $\exists c\in]x_0,x[$ يحقق: $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(c)$.

2. إذا كانت f دالة كثير حدود من الدرجة n فإنّ الباقي $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ معدوما

ونكتب:

$$f(x)=P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}$$

3. يستعمل دستور ماك لوران– لاغرانج في أغلب الأحيان في حساب القيم التقريبية

أمثلة:

1) لتكن f الدالة الأسية $f(x)=e^x$ لننشر الدالة f حسب دستور تايلور من الرتبة 4 بجوار $x_0=1$ وبالتالي: يوجد عدد حقيقي c بحيث:

$$e^x=e+e(x-1)+e\frac{(x-1)^2}{2!}+e\frac{(x-1)^3}{3!}+e\frac{(x-1)^4}{4!}+\frac{e^c}{5!}(x-1)^5$$

2) لتكن g الدالة على المعرفة $]-1,+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(1+x)$ لننشر الدالة g حسب دستور ماك لوران–لاغرانج من الرتبة n.

لدينا: $g'(x)=\frac{1}{1+x}$ ، $g''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$ ، $g'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$

يمكن أن نبرهن بالتراجع أنّه من أجل $n\geq 1$: $g^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي c من $]-1,+\infty[$ يحقق:

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+g''(0)\frac{x^2}{2!}+...+g^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+g^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

لنجد:

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(1+c)^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

متباينة تايلور–لاغرانج: إذا كانت $|f^{(n+1)}|$ محدودة على I بالعدد M فإنّه من أجل كل x و x_0 من I لدينا:

$$|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|\leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ملاحظة:

المتباينة السابقة تعطي حداً أعلى لخطأ التقريب للدّالة f بكثير الحدود P_n، كما تفيد في دراسة تقارب و حساب نهايات بعض المتتاليات.

أمثلة:

1) لنحسب قيمة تقريبية للعدد $\cos(1.5)$، لتكن $f(x)=\cos x$ لدينا

$$f^{(4)}(x)=\cos x,\ f'''(x)=\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'(x)=-\sin x$$

وبالتالي نحصل على: $f'''(0)=1,\ f''(\frac{\pi}{2})=0,\ f'(\frac{\pi}{2})=-1,\ f(\frac{\pi}{2})=0$

باستعمال دستور تايلور–لاغرانج لـ f من الرتبة 3 بين x و $\frac{\pi}{2}$ نحصل على:

$$\cos x=-(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3+\frac{\cos(c)}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4$$

أي: $|\cos x+(x-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3|=|\frac{\cos(c)}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4|\le(x-\frac{\pi}{2})^4$. لنأخذ $x=1.5rad$

نحصل على:

$$|\cos(1.5)+(1.5-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{6}(1.5-\frac{\pi}{2})^3|\le(1.5-\frac{\pi}{2})^4\approx 1.0004\times10^{-6}$$

ومنه نستنتج أنّ:

$$\cos(1.5)\approx-(1.5-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{6}(1.5-\frac{\pi}{2})^3\approx 6.9943\times10^{-2}$$

هي قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-6} للعدد $\cos(1.5)$.

2) لنحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

بتطبيق دستور ماك لوران لاغرانج على الدّالة $f(x)=e^x$ من الرتبة n

نعلم أنّه من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $(e^x)^{(n)}=e^x$ و عليه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $(e^x)^{(n)}(0)=e^0=1$

و بالتّالي من أجل $x\in\mathbb{R}$ يوجد c محصور تماما بين 0 و x يحقق:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+.........+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

أي أنّ:

$$\left|e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+.........+\frac{x^n}{n!}\right)\right|=\frac{e^c}{(n+1)!}|x^{n+1}|..................(*)$$

بأخذ $x=1$ في $(*)$ نجد:

$$0<\left|e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}$$ لأنّ c محصور تماما بين 0 و 1

و بملاحظة أنّ: $\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{(n+1)!}=0$ ، نظرية الحصر تبرر أنّ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.

2. دستور تايلور بباقي يونغ:

نظرية: إذا كانت $f:I\to\mathbb{R}$ دالة من الصنف C^n على المجال المفتوح I يشمل x_0 من I (f معرفة في جوار x_0) فإنه من أجل كل x من I توجد دالة $\varepsilon:I\to\mathbb{R}$ حيث $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ تحقق:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+(x-x_0)^n\varepsilon(x)................................(II)$$

تسمى العلاقة (II) دستور تايلور بباقي يونغ من الرتبة n للدالة f في جوار x_0 .

برهان:

الدالة f دالة من الصنف C^n على I نطبق دستور تايلور – لاغرانج من الرتبة $n-1$ في جوار x_0

وبالتالي من أجل كل x من I يوجد عدد $c=c(x)$ محصورا بين x_0 و x بحيث:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$
$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

يمكن أن نكتب :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+.........+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

نضع: $\varepsilon(x)=\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(x_0)}{n!}$ بما أنّ $f^{(n)}$ مستمرة I و لدينا $c(x)\underset{x\to x_0}{\to}x_0$ فإنّ:

$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ وهو المطلوب.

ملاحظات:

1 . يمكن صياغة دستور تايلور بباقي يونغ على الشكل التالي:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\circ((x-x_0)^n).....(II)$$

2 . يستعمل دستور تايلور بباقي يونغ في أغلب الأحيان في حساب النهايات.

أمثلة:

1) لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\cos x$ لننشر الدالة f حسب دستور تايلور بباقي يونغ من الرتبة 4 بجوار $x_0=\pi$، توجد دالة ε حيث $\lim\limits_{x\to\pi}\varepsilon(x)=0$ تحقق:

$$\cos x=-1+0.(x-\pi)+1.\frac{(x-\pi)^2}{2!}+0.\frac{(x-\pi)^3}{3!}-1\frac{(x-\pi)^4}{4!}+(x-\pi)^4\varepsilon(x)$$ ومنه يكون:

$$\cos x=-1+\frac{(x-\pi)^2}{2}-\frac{(x-\pi)^4}{24}+(x-\pi)^4\varepsilon(x)$$

2) لتكن g الدالة المعرفة على $I=]-1,+1[$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$، لننشر الدالة g حسب دستور ماك لوران من الرتبة n .

لدينا من أجل x من $]-1,1[$ لدينا $g'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ ، $g''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}$ ، $g'''(x)=\dfrac{6}{(1-x)^2}$ يمكن أن نبرهن بالتراجع أنه من أجل $n\geq 1$ و x من $]-1,+1[$ يكون:

$$g^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

و منه الدالة g من الصنف C^n على $]-1,1[$ وبالتالي توجد دالة $\varepsilon:I\to\mathbb{R}$ حيث $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ تحقق:

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+...+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$ بعد التعويض نجد:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+x^n\varepsilon(x)\ ,\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

أي أنّ:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+........x^n+\circ\left(x^n\right)$$

3 . دستور تايلور بالباقي التكاملي:

نظرية: إذا كانت f دالة عددية من الصنف C^{n+1} على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 فإنّه من أجل كل عدد x من I يكون:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

تسمى العلاقة (III) دستور تايلور بالباقي التكاملي من الرتبة n للدالة f في جوار x_0 .

برهان: لنبرهن بالتراجع على n

تحقق من صحة (I) من أجل $n=0$: لدينا f دالة من الصنف C^1 لنثبت أنّ:

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

محققة لأنّ f هي دالة أصلية للدالة المشتقة f' أي:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt=[f(x)]_{x_0}^{x}=f(x)-f(x_0)$$

نفرض أنّ العلاقة (III) صحيحة من أجل n كيفي ونثبت صحتها من أجل $n+1$

لنثبت أنّ:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt$$

لنحسب التكامل : $\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$ الوارد في (III)، نضع بالتجزئة :

$$\begin{cases} u(t)=f^{(n+1)}(t) \\ v'(t)=\dfrac{(x-t)^n}{n!}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t)=f^{(n+2)}(t) \\ v(t)=-\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\end{cases}$$

ومنه يكون:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt=\left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}$$

4 . دستور تايلور والقيم الحدية لدالة:

نظرية: لتكن f دالة عددية من الصنف C^n على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 و $n\geq 1$ وتحقق:

$f'(x_0)=f''(x_0)=....=f^{(n-1)}(x_0)=0$ و $f^{(n)}(x_0)\neq 0$

1) إذا كان n زوجيا فإن:

أ- إذا كان $f^{(n)}(x_0)<0$ فإنّ $f(x_0)$ قيمة عظمى محلية.

ب- إذا كان $f^{(n)}(x_0)>0$ فإنّ $f(x_0)$ قيمة صغرى محلية.

2) إذا كان n فرديا فإن $M(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحني الدالة f.

برهان: لدينا

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

و حسب المعطيات نجد:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)=(x-x_0)^n(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\varepsilon(x))$$

1) إذا كان n زوجيا و $f^{(n)}(x_0)<0$ فإنّ : $(x-x_0)^n>0$ و

$$\lim_{x\to x_0}(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\varepsilon(x))=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}<0$$

وهذا يعني أنّ الدالة: $x\mapsto (x-x_0)^n(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\varepsilon(x))$ سالبة في جوار العدد x_0 وبالتالي فإنّ:

$$f(x)-f(x_0)\leq 0$$

أيّ أنّ الدالة تقبل قيمة عظمى محلية عند x_0 .

بنفس الطريقة نثبت أنّ: إذا كان $f^{(n)}(x_0)>0$ فإنّ $f(x_0)$ قيمة صغرى محلية.

2) إذا كان n فرديا فإن: $(x-x_0)^n$ يغيّر اشارته عند x_0 و بما أنّ $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ فإنّ

$f(x)-f(x_0)$ يغيّر اشارته عند x_0 و تكون $M(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحني الدالة f .

حالة خاصة: (الحالة الأكثر تطبيقا)

لتكن f دالة عددية من الصنف C^2 على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 وتحقق: $f'(x_0)=0$ (أي x_0 نقطة حرجة) و $f''(x_0)\neq 0$

1- إذا كان $f''(x_0)<0$ فإنّ $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى محلية.

2- إذا كان $f''(x_0)>0$ فإنّ $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى محلية.

أمثلة:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ الدالة f من الصنف $C^2(\mathbb{R}^*)$ و

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}, f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

لدينا $f'(-1)=0$ و $f''(-1)=-2<0$ و بالتالي $f(-1)=-2$ قيمة حدية عظمى محلية.

كذلك $f'(1)=0$ و $f''(1)=2>0$ و بالتالي $f(1)=2$ قيمة حدية صغرى محلية.

2) $f(x)=x^4-x^3$ الدالة f من الصنف $C^n(\mathbb{R})$ و $n\geq 1$ لدينا $f'(0)=f''(0)=0$ كذلك $f'''(0)=-6\neq 0$ و بالتالي النقطة $O(0,0)$ هي نقطة انعطاف لمنحني الدالة f

III. النشر المحدود:

1. النشر المحدود في جوار عدد حقيقي:

تعريف: f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 أو (معرّفة على $I-\{x_0\}$) و n عدد طبيعي. نقول أن الدالة f تقبل نشرا محدودا من الرتبة n عند x_0 أو في جوار x_0 إذا وجدت أعدادا حقيقية $a_0, a_1, ..., a_n$ و دالة عددية ε معرفة على I تحقق $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من I أو $(I-\{x_0\})$ لدينا:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x).....(DL)$$

كثير الحدود $P(x)=\sum_{k=0}^{k=n}a_k(x-x_0)^k$ درجته أصغر أو تساوي n ويُسمى بالجزء الأساسي أو النظامي للنشر المحدود.

و يُسمى $R(x)=(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ بباقي النشر أو الجزء المتّمم.

ملاحظات:

1- يمكن صياغة العلاقة (DL) بالشكل:

$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+\circ((x-x_0)^n)$ حيث:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\circ((x-x)^n)}{(x-x)^n}=0$$

2- يمكن تحويل النشر المحدود لدالة f في جوار $x_0\neq 0$ إلى نشر محدود لدالة g في جوار 0

باستعمال المتغير $t=x-x_0$ و نكتب:

$$g(t)=f(t+x_0)=a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n+\circ\left(t^n\right).$$

3- إذا كانت f دالة من الصنف C^n على جوار لـ x_0 فإن دستور تايلور بباقي يونغ من الرتبة n

لدالة f في جوار x_0 هو نشر محدود من الرتبة n للدالة f عند x_0 حيث: $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

و $k=0,...n$

أمثلة:

1) لدينا $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ نضع $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ لدينا $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ ومنه

$\cos x=1+0.x-\dfrac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$ وهو نشر محدود من الرتبة الثانية للدالة cos في جوار 0 .

2) النشر المحدود الدالة sin من الرتبة الثالثة في جوار $x_0=\pi$ هو نشر تايلور- يونغ للدالة

$g:t\mapsto\sin(t+\pi)$ من الرتبة الثالثة في جوار 0 ومنه $\sin(t+\pi)=0-t+0t^2-\dfrac{1}{6}t^3+t^3\varepsilon(t)$ و بالتالي

النشر المحدود بعد التعويض $x=t+\pi$

نجد $\sin x=0-(x-\pi)+0.(x-\pi)^2-\dfrac{1}{6}(x-\pi)^3+\circ\left((x-\pi)^3\right)$

2 . خواص النشور المحدودة:

قضيّة 1 (الشرط اللازم):

إذا قبلت f نشرا محدودا من الرتبة $n \geq 1$ في جوار x_0 $\Leftarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0$

برهان: واضح باستعمال تعريف النشر المحدود .

ملاحظة1: تفيد القضيّة السابقة في حساب النهايات باستعمال النشور، كما تبيّن عدم وجود النشر المحدود انطلاقا من عدم وجود النهاية.

أمثلة:

1) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ فإنّ $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$ و بالتالي f لا تقبل نشراً محدوداً عند $x_0 = 1$.

2) $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim_{x \to 0} g(x)$ غير موجوده و بالتالي g لا تقبل نشراً محدوداً عند $x_0 = 0$.

نتيجة: إذا قبلت f نشرا محدودا من الرتبة $n \geq 1$ في جوار x_0 و كانت مستمرّة عند x_0 أي أنّ:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

و $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = a_0$ فإنّ f قابلة للاشتقاق عند x_0 و لدينا: $f'(x_0) = a_1$ لأنّ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-1} + (x - x_0)^{n-1}\varepsilon(x)\right] = a_1$$

ملاحظة2: النتيجة السابقة لا يمكن تعميمها (أي وجود النشر المحدود من الرتبة $n \geq 2$ لا يستلزم قابليّة للاشتقاق من الرتبة n) .

مثال: $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ نلاحظ أنّ f تقبل نشراً محدوداً من الرتبة الثانية لأنّ:

$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^2\left(x \sin\frac{1}{x}\right)$ و $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

ولكن $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

وعليه $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجودة أي أنّ $f''(0)$ غير موجودة.

قضيّة 2: إذا كانت f دالة تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 من الشكل:

حيث $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x).$

$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ فإنّ هذا النشر وحيد .

برهان: لنفرض أنّ f تقبل نشرين محدودين مختلفين في جوار x_0 هما :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon_1(x)..........(1)$$

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+...+b_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon_2(x)........(2)$$

بطرح (1) و (2) طرفاً لطرف نجد :

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)(x-x_0)+(a_2-b_2)(x-x_0)^2+...+(a_n-b_n)(x-x_0)^n$$
$$+(x-x_0)^n(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))=0.............(*)$$

بأخذ $x=x_0$ في $(*)$ نجد أنّ: $a_0-b_0=0$ أي أنّ: $a_0=b_0$.

نقسم طرفي $(*)$ على $(x-x_0)$ نجد :

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)(x-x_0)+...+(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-1}+(x-x_0)^{n-1}(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))=0$$

بأخذ $x=x_0$ في العلاقة الأخيرة نجد أنّ: $a_1=b_1$

نواصل بنفس الطريقة لنصل إلى أنّ كلّ معاملات النشرين متساويين و $\varepsilon_1(x)=\varepsilon_2(x)$ ، معناه أنّ النشر

و حيد .

نتيجة:

إذا كانت f دالة من الصنف C^n في جوار لـ x_0 فإن دستور تايلور بباقي يونغ من الرتبة n لدالة f في

جوار x_0 هو النشر المحدود من الرتبة n للدالة f عند x_0 حيث: $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ و $k=0,...n$

مثال: لنعيّن النشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة n للدّالة: $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

في جوار الصفر الدّالة $f\in C^n$ من أجل $n\in\mathbb{N}$ و لدينا :

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ ، $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ ، $f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ ، . . . . . .

بالتراجع يمكن إثبات أنّه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).......(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

و عليه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).......(\alpha-n+1)$ ، بالتعويض في دستور تايلور يونغ نجد النشر المطلوب:

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

قضيّة3: إذا كانت f دالة تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 فإنّ f تقبل نشرا محدودا من الرتبة p (من أجل $p\leq n$) في جوار x_0 .

برهان: لنفرض أنّ تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار x_0 أي أنّ:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x).$$ مع $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

من أجل $p\leq n$ لدينا:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_p(x-x_0)^p$$
$$+(x-x_0)^p\left(a_{p+1}(x-x_0)+...+(x-x_0)^{n-p}\varepsilon(x)\right).$$

بوضع $h(x)=a_{p+1}(x-x_0)+...+(x-x_0)^{n-p}\varepsilon(x)$ نجد:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_p(x-x_0)^p+(x-x_0)^p h(x).$$

مع $\lim_{x\to x_0}h(x)=0$ وهو المطلوب.

قضيّة4: إذا كانت f دالة تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار الصفر لدينا:

1- إذا كانت f دالة زوجية فإن الجزء النظامي لنشر f كثير حدود زوجي.

2- إذا كانت f دالة فردية فإن الجزء النظامي لنشر f كثير حدود فردي.

برهان: لنفرض أن f دالة زوجيّة تقبل نشراً محدوداً في جوار الصفر من الرتبة n و ليكن:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+x^n\varepsilon(x).$$

و بماأنّ f زوجيّة فإنّه من أجل x $f(-x)=f(x)$

أي أنّ: $a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+......=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+........$

و بالتالي: $a_1=-a_1$ ، $a_3=-a_3$ ، . . . . ، $a_{2k+1}=-a_{2k+1}$

و عليه: $a_1=a_3=a_5=......=a_{2k+1}=0$ أي أنّ الجزء النظامي للنشر هو كثير حدود زوجي.

وبطريقة مماثلة نبرهن حالة f دالة فردية.

3. النشر المحدود في جوار ∞:

تعريف: لتكن f دالة عددية معرّفة على مجال I من الشكل $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,a[$ و n عدد طبيعي. نقول أن الدالة f تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار $+\infty$ أو (في جوار $-\infty$) إذا قبلت الدالة: $g:t\mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ حيث: $t=\frac{1}{x}$ نشرا محدودا من الرتبة n في جوار 0 .

مثال: لنشر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}$ من الرتبة الثالثة في جوار $+\infty$ ننشر الدالة:

$g:t\mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ أي: $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\frac{1-t}{t}}=\frac{1}{1-t}$ من الرتبة n في جوار 0 .

لدينا $f\left(\frac{1}{t}\right)=g(t)=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+t^3\varepsilon(t)$

ومنه النشر المحدد من الرتبة الثالثة في جوار $+\infty$ للدالة f هو: $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{h(x)}{x^3}$

حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

4. النشور المحدودة للدوال المألوفة في جوار الصفر:

لاحظنا سابقا أنّه لنشر دالة في جوار $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ بتغيير متغيّر مناسب يمكن ارجاع هذا النشر في جوار الصفر، لذلك أصبح من الضروري معرفة نشور بعض الدوال المألوفة في جوار الصفر، من وحدانيّة النشور المحدودة و دستور ما ك لوران–يونغ يمكن استنتاج الدساتير التالية:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

5 . العمليات على النشور المحدودة:

f و g دالتان عدديتان كل منهما تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار عدد x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \circ_1\left((x-x_0)^n\right) = P(x) + \circ_1\left((x-x_0)^n\right)$$

$$g(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ldots + b_n(x-x_0)^n + \circ_2\left((x-x_0)^n\right) = Q(x) + \circ_2\left((x-x_0)^n\right)$$

5 . 1 . المجموع و الجداء:

- الدالة $\alpha f+\beta g$ (حيث $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$) تقبل نشراً محدوداً من الرتبة n في جوار العدد x_0 من الشكل: $(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha P(x)+\beta Q(x)+\circ\left((x-x_0)^n\right)$

- الدالة $f\times g$ تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار العدد x_0 من الشكل $(f\times g)(x)=K(x)+\circ\left((x-x_0)^n\right)$

حيث $K(x)$ كثير الحدود من الدرجة n الناتج من الجداء $P(x)\times Q(x)$ محتفظين فقط بالحدود التي درجتها أصغر أو يساوي n .

أمثلة:

1) النشران المحدودان لكل من الدالتين $x\mapsto e^x$ و $x\mapsto e^{-x}$ من الرتبة الرابعة في جوار 0 هما:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\circ_1\left(x^4\right) \text{ و } e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\circ_2\left(x^4\right)$$

و عليه النشرين المحدودين لكل من الدالتين $x\mapsto \operatorname{sh}x$ و $x\mapsto \operatorname{ch}x$ من الرتبة الرابعة في جوار 0 هما:

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{x^3}{3!}+\circ\left(x^4\right)$$
$$\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\circ\left(x^4\right)$$

2) لدينا $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\circ_1\left(x^2\right)$ و $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\circ_2\left(x^2\right)$ و بالتالي النشر المحدود للدالة $x\mapsto(\cos x)\sqrt{1+x}$ من الرتبة الثانية في جوار 0 هو:

$$(\cos x).\sqrt{1+x}=\left(1-\frac{x^2}{2}+\circ_1\left(x^2\right)\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\circ_2\left(x^2\right)\right)=1+\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}+\circ\left(x^2\right)$$

5 . 2 . حاصل القسمة:

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ فإنّ:

الدالة $\frac{f}{g}$ تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار العدد x_0 من الشكل $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=K(x)+\circ(x-x_0)^n$

حيث هو $K(x)$ حاصل القسمة الاقليدية حسب القوى المتزايدة لكثير الحدود $P(x)$ على كثير الحدود $Q(x)$.

مثال:

نعلم أنّ النشرين المحدودين لكل من الدالتين $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ من الرتبة الثالثة في جوار 0 هما:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ_1(x^3)$ و $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ_2(x^3)$ للحصول على النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار 0 للدالة $x \mapsto \tan x$ نقسم $P(x) = x - \frac{x^3}{6}$ على $Q(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ لنجد:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$.

5 . 3 . التركيب:

f دالة عددية تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار عدد x_0 من الشكل:

$f(x) = P(x) + \circ_1((x - x_0)^n)$ حيث $P(x)$ كثير الحدود درجته أصغر أو تساوي n

و g دالة عددية تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_1 من الشكل:

$g(x) = Q(x) + \circ_2((x - x_1)^n)$ حيث $Q(x)$ كثير الحدود درجته أصغر أو يساوي n

عندئذ الدالة $g \circ f$ تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار العدد x_0 من الشكل:

$$(g \circ f)(x) = K(x) + \circ((x - x_0)^n)$$

حيث $K(x)$ كثير الحدود من الدرجة n الناتج من التركيب $Q(P(x))$ محتفظين فقط بالحدود التي درجتها أصغر أو يساوي n.

حالة خاصة: إذا كان $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = P(x) + \circ_1(x^n)$ حيث

$$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0 = 0$$

و $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \circ_2(x^n)$ عندئذ

$$(g \circ f)(x) = b_0 + b_1 P(x) + b_2 (P(x))^2 + \ldots + b_n (P(x))^n + \circ(x^n)$$

مثال:

لنعين النشر المحدود من الرتبة الثالثة في جوار 0 للدالة $x \mapsto \sin(\ln(x+1))$

نضع $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(t)=\sin t$ لدينا $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\ln(x+1))=0$ ومنه:

$g(t)=\sin t=t-\frac{t^3}{6}+\circ(t^3)$ و $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ وبالتالي:

$$g(f(x))=\sin(\ln(1+x))=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3+\circ(x^3)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^3+\circ(x^3)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3+\circ(x^3)$$

5 . 4 . مكاملة النشور المحدودة:

قضيّة: لتكن f تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

و لتكن F دالة أصليّة لـ f في جوار x_0، عندئذٍ F تقبل نشراً محدوداً من الرتبة من الرتبة $n+1$ في جوار x_0 يُكتب على الشّكل:

$$F(x)=F(x_0)+a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\frac{a_2}{3}(x-x_0)^3+...+\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+(x-x_0)^{n+1}\eta(x)$$

حيث $\lim_{x\to x_0}\eta(x)=0$.

برهان: بمكاملة طرفي نشر f على المجال $[x_0,x]$ نحصل على

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\int_{x_0}^{x} a_0dt+\int_{x_0}^{x} a_1(t-x_0)dt+\int_{x_0}^{x} a_2(t-x_0)^2dt+......+\int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n dt+\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt$$

أي أنّ:

$$F(x)-F(x_0)=a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\frac{a_2}{3}(x-x_0)^3+...+\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt$$

لإتمام البرهان يكفي إثبات أنّ: $\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt=\circ\left((x-x_0)^{n+1}\right)$

$$\left|\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt\right|\le\int_{x_0}^{x}|(t-x_0)|^n|\varepsilon(t)|dt\le Sup_{x\in[x_0,x]}|\varepsilon(x)|\int_{x_0}^{x}|(t-x_0)|^n dt=Sup_{x\in[x_0,x]}|\varepsilon(x)|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

و بما أنّ : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Sup_{x\in[x_0,x]}|\varepsilon(x)|}{n+1}=0$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Sup_{x\in[x_0,x]}|\varepsilon(x)|\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}$ ينتج المطلوب.

مثال: لننشر الدّالة $\arctan(x)$ في جوار الصفر من الرتبة الخامسة.

لدينا: $\dfrac{1}{1+X}=\dfrac{1}{1-(-X)}=1-X+X^2-X^3+X^4+o(X^4)$

و منه: $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4)$

و بالتالي: $\arctan(x)=\arctan(0)+x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+o(x^5)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+o(x^5)$

5. 5. اشتقاق النشور المحدودة:

قضيّة: إذا كانت f دالة من الصنف C^{n+1} $(n\geq 1)$ في جوار x_0 فإنّ الدالة f' تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 نحصل على جزئه العادي باشتقاق الجزء العادي لنشر f.

برهان: يكفي تطبيق خاصيّة المكاملة على f'.

مثال: نعلم أنّ: $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+............+x^{n+1}+\circ(x^{n+1})$

الدالة $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ من الصنف C^{n+1} على المجال $]-\infty,-1[$ باستعمال الاشتقاق نجد النشر المحدود من الرتبة n في جوار 0 للدالة $x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^2}$ كما يلي:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+..............+(n+1)x^n+\circ(x^n)$$

6. تطبيقات النشور المحدودة :

6. 1. تعيين الدالة المكافئة:

قضية: إذا كانت f دالة تقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 و ليكن p أصغر عدد بحيث $a_p\neq 0$ أي : $f(x)=a_p(x-x_0)^p+a_{p+1}(x-x_0)^{p+1}+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ فإنّ:

$$f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}a_p(x-x_0)^p$$

و نقول أنّ الدالة f مكافئة للجزء الرئيسي $a_p(x-x_0)^p$ في نشرها المحدود في جوار x_0.

مثال: لنبحث عن دالة مكافئة للدالة $x \mapsto 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ في جوار 0

لدينا في جوار الصفر

$$\begin{aligned}2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} &= 2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-(1+4x)^{\frac{1}{2}}-\left(1+6x^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=2+2x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\left(1+\frac{1}{2}(4x)-\frac{1}{8}(4x)^2+\frac{1}{16}(4x)^3+o(x^3)\right)\\ &-\left(1+\frac{1}{2}\left(6x^2\right)+o(x^3)\right)\\ &=-\frac{11}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

وعليه: $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{11}{3}x^3$

6 .2 .حساب النهايات:

النشور المحدودة من الطرق الفعّالة لإزالة حالات عدم التعيين في حساب النهايات بملاحظة أنه:

إذا كان $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+\circ(x-x_0)^n$ فإن

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0$$

مثال: لنحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\sin^2 x}{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}$

لننشر كلاًّ من البسط و المقام من درجة تسمح برفع حالة عدم التعيين، لدينا

$$3x^2\sin^2 x = 3x^2\left(x+\circ(x)\right)^2 = 3x^4+\circ\left(x^4\right)$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\circ\left(x^4\right)\\ &-\left(x+\frac{x^3}{3}+\circ\left(x^4\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\circ\left(x^3\right)\right)^2\\ &=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}+\circ\left(x^4\right)\\ &=-\frac{5}{12}x^4+\circ\left(x^4\right)\end{aligned}$$

و بالتالي في جوار 0 لدينا:

$$\frac{3x^2\sin^2 x}{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}=\frac{3x^4+\circ\left(x^4\right)}{-\frac{5}{12}x^4+\circ\left(x^4\right)}=\frac{3+\circ(1)}{-\frac{5}{12}+\circ(1)}$$

و عليه:
$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin^2 x}{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\circ(1)}{-\frac{5}{12}+\circ(1)}=-\frac{36}{5}$$

6 . 3 . وضعية منحنى بالنسبة للمماس:

إذا كانت $f:I\to\mathbb{R}$ دالة تقبل نشرا محدودا عند $x_0\in I$ من الشكل:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_k(x-x_0)^k+(x-x_0)^k\varepsilon(x)$$

حيث: $k\geq 2$ أصغر عدد بحيث $a_k\neq 0$ فإنّ معادلة المماس لمنحنى f عند x_0 هي:

$$y=a_0+a_1(x-x_0)$$

و لتحديد وضعية المنحنى بالنسبة للمماس في جوار x_0، ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$

$f(x)-y\underset{x\to x_0}{\sim}a_k(x-x_0)^k$ أي يكفي دراسة إشارة $a_k(x-x_0)^k$

مثال: لندرس وضعية منحنى الدالة f حيث : $f(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$ بالنسبة للمماس عند $x_0=1$.

لدينا $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{x-1}{\sqrt{e}}+\frac{(x-1)^3}{3\sqrt{e}}+\circ\left((x-1)^3\right)$ نستنتج أنّ معادلة المماس $x_0=1$

هي: $y=-\frac{x}{\sqrt{e}}$

وبما أنّ: $f(x)-y\underset{x\to x_0}{\sim}\frac{(x-1)^3}{3\sqrt{e}}$ فإنّ: المنحنى يقبل نقطة انعطاف $M(1,\frac{1}{\sqrt{e}})$

6 . 4 . تعيين المستقيمات المقاربة المائلة:

إذا كانت الدالة $x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ دالة تقبل نشرا محدودا عند $+\infty$ أو (عند $-\infty$) من الشكل:

$$\frac{f(x)}{x}=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_k}{x^k}+\frac{1}{x^k}\varepsilon(\tfrac{1}{x})$$

حيث: $k\geq 2$ أصغر عدد بحيث $a_k\neq 0$ فإنّ: $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(a_0x+a_1)]=0$ أي أنّ المستقيم الذي معادلته: $y=a_0x+a_1$ هو مقارب مائل لمنحنى f عند $+\infty$ أو (عند $-\infty$) ووضعية المنحنى بالنسبة للمقارب المائل تُعرف بإشارة الفرق $f(x)-y$ أي حسب اشارة: $\frac{a_k}{x^{k-1}}$.

مثال: لنعيّن المقارب المائل لمنحنى الدالة f المعرّفة بـ: $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2+x^3}$ عند $+\infty$.

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[3]{1+x^2+x^3}}{x}=\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=1+\frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})+\circ\left(\frac{1}{x^3}\right)=1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^3}+\circ\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]=0$ ومنه المستقيم الذي معادلته $y=x+\frac{1}{3}$ هو مقارب مائل لمنحنى f عند $+\infty$.

وبما أنّ: $f(x)-\left(x+\frac{1}{3}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3x^2}$ فإنّ: المنحنى فوق مقاربه المائل .