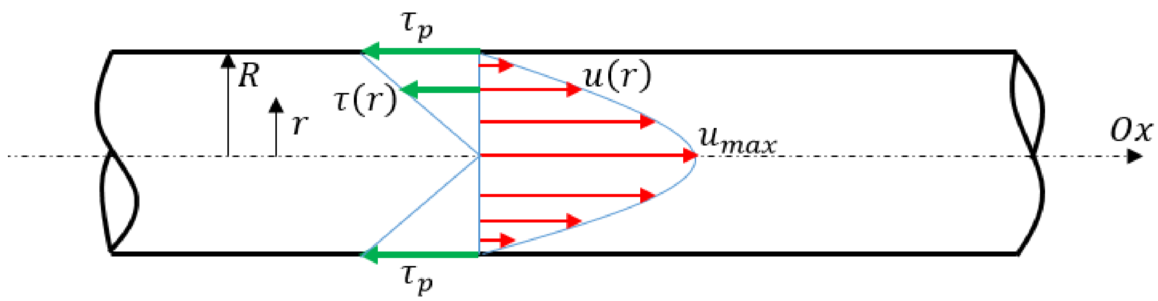
بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَانِ الرَّحِيمِ

دروس في ميكانيك الموائع

جريان الموائع



اللبي عبد القادر

النُّسخة الأولى: 02 جويلية 2018

جَامِعة الشَّهيد حَمَّه لخضر – الوادي

ولاية الوادي 39000 – الجزائر

المحتويات

المقدّمة.......... 3

1- الفصل الأوّل: تذكير و تَتِمَّات 4

1.1. تعريف المائع.......... 4

2.1. خصائص الموائع و المقادير الأساسية المتعلّقة بها 4

3.1. معامِلي اللّزوجة الدِّيناميكية و الحركية – قانون نيوتن.......... 5

4.1. الإجهادات 7

5.1. قوى السّطح و قوى الحجم.......... 8

أ. تنسور الإجهادات.......... 8

ب. قِوى السّطح 10

ج. قِوى الحجم.......... 11

6.1. العبارة الأساسية للموائع السّاكنة.......... 11

2- الفصل الثّاني: سينماتيك الموائع 16

1.2. وصف حركة الموائع.......... 16

أ. طريقة لاغرانج.......... 16

ب. طريقة أولر 16

2.2. خطوط و أنابيب التيار 18

أ. خط التيار 18

ب. أنبوب التيار.......... 19

ج. خطوط التيار و المسارات.......... 19

3.2. التدفّقات 20

أ. التدفّق الحجمي.......... 21

ب. التدفّق الكتلي 21

4.2. الاشتقاق الكلِّي 21

5.2. معادلة انحفاظ الكتلة (معادلة الاستمرارية).......... 23

6.2. دراسة سينماتيكية للجريانات الغير دورانية 26

أ. مقدّمة 26
ب. الجريان الكموني 27
ج. دراسة تحليلية للجريانات المستوية الغير دورانية 29

3- الفصل الثّالث: ديناميك الموائع 36

1.3. مقدّمة 36
2.3. نظرية انحفاظ كمّية الحركة 37
3.3. من نظرية انحفاظ كمّية الحركة إلى معادلتي أولر و برنولي 40
أ. معادلة أولر 40
ب. معادلة برنولي 41
4.3. من نظرية انحفاظ كمّية الحركة إلى معادلة نافيير و ستوكس 45

4- الفصل الرّابع: الجريان الرقائقي و الجريان المضطرب 48

1.4. تجربة رينولدز 48
2.4. الجريان الرّقائقي 51
أ. الجريان الرّقائقي أحادي الاتّجاه 51
ب. حالة الجريان الرّقائقي داخل أنبوب أسطواني 54
ج. حالة الجريان الرّقائقي بين صفيحتين مستويتين و متوازيتين 60
ج.1. جريان بوازاي المستوي 60
ج.2. جريان كويت 65
3.4. الجريان المضطرب 69
أ. تفكيك رينولدز 69
ب. معادلة الاستمرارية بالقيمة المتوسّطة 71
ج. معادلة نافيير و ستوكس بالقيمة المتوسّطة 72
د. مسألة الغلق 75

5- الفصل الخامس: فواقد الشحنة 76

1.5. تعميم معادلة برنولي 76
2.5. فاقد الشّحنة الخطي 77
3.5. فاقد الشّحنة الثانوي 82
المراجع 87

المـقــدّمـــة

بادئ ذي بدء، أشكر الله عَزَّ و جَل على إتمام و إنجاز هذه الدّروس المندرِجة ضِمن علم ميكانيك الموائع. هذا العلم الذي يعتبر فرعاً من الميكانيك و بالضّبط من ميكانيك الأوساط المستمِرّة، و بالتّالي هو يعد من أهم فروع الفيزياء. إنّ دِراسة هذا العلم من الأهمّية بما كان حيث نتعامل مع الموائع في كلّ وقت في حياتنا اليومية كاستنشاق الهواء مثلاً و كجريان الماء عبر الأنابيب ليصل إلى المكان الذي نريده و كحركة السّفن التي تجري في البحار و كتحليق الطّائرات ... إلخ.

إنّ الدّروس المقّدمة في هذه المطبوعة يمكن اعتبارها كمدخل إلى ميكانيك الموائع و التي محتواها يتوافق مع البرامج المدرّسة في الجامعات و هي موجّهة بدرجة أولى لطلبة السّنة ثانية ماستر فيزياء تخصّص فيزياء تطبيقية اشعاع و طاقة بجامعة الشّهيد حمّه لخضر–الوادي و كذلك هي مفيدة أيضا لطلبة بقية التخصّصات التي يُدرَّس فيها هذا الفرع.

قسّمت هذه الدّروس إلى خمسة فصول أساسية. حيث يعتبر الفصل الأول مدخل لبقية الفصول من خلال ذكر بعض التعاريف و كذلك الخصائص و المقادير التي تميّز الموائع. أمّا الفصل الثاني فيهتمّ بالدّراسة السّينماتيكية للموائع من خلال ذِكر بعض التعاريف الخاصّة بحركة الموائع و من خلال الدِّراسة التحليلية لبعض الجريانات و كذلك من خلال التطرّق لمعادلة انحفاظ الكتلة التي سيعتمد عليها في بقية الفصول. في الفصل الثّالث تمّ التطرق إلى نظرية انحفاظ كمّية الحركة و معادلات الحركة المستمدّة منها، مثل معادلة أولر و معادلة نافيير و ستوكس. أنواع و مميّزات الجريانات و خصائصها تمّ التطرّق له في الفصل الرّابع. أمّا الفصل الخامس، بالإضافة إلى معادلة برنولي المعمّمة فيشمل أيضا طرق حساب فواقد الشّحنة الخطّية منها و الثّانوية.

و أخيراً، فإنّني أحترم و أُرحّب باستلام أي إضافات أو أي ملاحظات حول المحتوى من شأنها أن تساهم في تحسين هذه المطبوعة.

اللبي عبد القادر

الفصل الأوّل – تذكير و تَتِمّات

1.1. تعريف المائع

المائع هو عبارة عن مجموعة كبيرة من الجسيمات المادّية الصّغيرة جدّا و الحرّة و التي يمكنها الانتقال حول بعضها البعض. المائع إذن هو عبارة عن وسط مادّي مستمر قابل للتشوّه و يمكنه الجريان. كما أنّ الموائع تنقسم إلى سوائل و غازات، فالسّوائل هي موائع غير قابلة للانضغاط أي أن كثافتها لا تتغير بتغير الضّغط المطبّق عليها أمّا الغازات فهي موائع قابلة للانضغاط أي أن كثافتها تتغير بتغير الضغط المطبّق عليها.

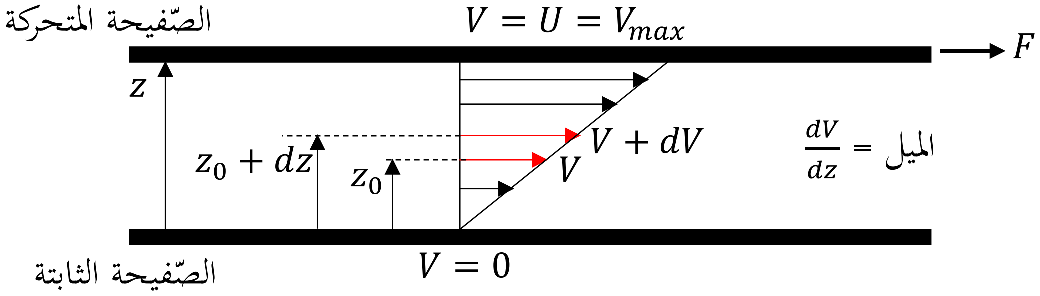
2.1. خصائص الموائع و المقادير الأساسية المتعلقة بها

- الكتلة الحجمية: تعرف الكتلة الحجمية ρ للمائع على أنها كتلة المائع في وحدة الحجم و يعبّر عنها بـ kg/m^3.
- الكثافة: تعرف كثافة المائع d على أنها النّسبة بين الكتلة الحجمية للسائل و الكتلة الحجمية للماء و هذا بالنّسبة للسوائل، و على أنها النّسبة بين الكتلة الحجمية للغاز و الكتلة الحجمية للهواء و هذا بالنّسبة للغازات، و ذلك عند الشّروط المثالية (الضّغط الجوّي يساوي $1\ atm$، درجة الحرارة بالنّسبة للماء تساوي $3.98\ C°$، درجة الحرارة بالنّسبة للهواء تساوي $0\ C°$). مع العلم أنّ الكثافة هي مقدار لا بعدي (أي بدون وحدة).
- الضّغط: و يعبّر عنه بالباسكال (Pa).
- السّرعة: و يعبّر عنها بـ (m/s).
- التّسارع: و يعبّر عنه بـ (m/s^2).

- اللّزوجة: يمكن تعريف اللّزوجة على أنّها مقدار فيزيائي و معيار يوصف به قابلية المائع للجريان، و مقدار مقاومته لضغط يجبره على التحرّك و الجريان. و كلّما قلّت اللّزوجة زادت قابلية المائع للجريان، و كلّما زادت لزوج المائع قلّت قابليته للجريان. كما يمكن وصف اللّزوجة على أنّها احتكاك داخلي بين جسيمات المائع. هناك معاملين للّزوجة و هما معامل اللّزوجة التّحريكية (أو الدّيناميكية) و معامل اللّزوجة الحركية و للتّفصيل أكثر سنتطرّق لهذا في الفقرة الموالية.

3.1. معامِلي اللّزوجة الدّيناميكية و الحركية – قانون نيوتن

نعتبر صفيحتين متوازيتين أفقيتين كبيرتين كفاية البعد بينهما z، و ليكن مساحة سطح كل صفيحة هو S، كما نعتبر أن الفراغ المحصور بين الصفيحتين يشغله مائع لزج. نقوم بتحريك الصفيحة العلوية بشكل أفقي بقوّة F بحيث تكتسب سرعة ثابتة U بينما نبقي الصّفيحة السفلية ثابتة كما هو موضح في الشكل (1.1). إن جسيمات المائع الملتصقة بالصفيحة المتحركة ستكتسب إذن السرعة V_{max} و هي السرعة المساوية لسرعة الصّفيحة U، أما جسيمات المائع الملتصقة بالصّفيحة الثّابتة ستبقى معدومة السرعة $V = 0$. إذا اعتبرنا أن البعد z بين الصّفيحتين صغير كفاية و كذلك السرعة U فإنّ المنحني الممثل لتوزيع السُّرعات للمائع اللّزج بين الصفيحتين كما هو موضح في الشكل يكون على شكل خط مستقيم.



شكل (1.1) توزيع السّرعات لمائع لزج موجود بين صفيحتين.

حسب نيوتن القوّة F تكون متناسبة طرديا مع تدرّج السّرعة $\frac{dV}{dz}$ حيث يمكن كتابة:

$$F = \mu\, S\, \frac{dV}{dz}$$

حيث معامـل التناسـب μ يمثّل معامل اللّزوجـة الديناميكية و يعبّر عنه في جملـة الوحـدات الدّوليـة بـ $kg\, m^{-1}\, s^{-1}$.

إنّ المقدار $\frac{F}{S}$ يدعى إجهاد القص و يرمز له بـ τ، و منه:

$$\tau = \mu\ \frac{dV}{dz}$$

إنّ الموائع التي تخضع لهذا القانون تسمى بالموائع النيوتونية، هذه الموائع يكون معامل لزوجتها مستقل عن تدرّج السّرعة، على سبيل المثال نذكر منها الغازات و الماء ... إلخ. أمّا الموائع الأخرى فتسمّى بالموائع الغير النيوتونية و على سبيل المثال نذكر منها حبر الكتابة، الدّم ... إلخ.

يوجد معامل آخر للّزوجة يدعى معامل اللّزوجة الحركية و هو يتعلّق بمعامل اللّزوجة الدّيناميكية μ و العلاقة التي تربطهما هي كالآتي:

$$\mu = \rho\, \nu$$

حيث:

ρ تمثّل الكتلة الحجمية للمائع (kg/m^3).

ν يمثّل معامل اللّزوجة الحركية و يعبّر عنه في جملة الوحدات الدّولية بـ m^2/s.

ملاحظة: إذا كان $\mu = 0$ فإنّ المائع مثالي أو في حالة سكون (غير متحرّك).

4.1. الإجهادات

يُعرّف الإجهاد على أنّه القوّة المؤثرة على وحدة المساحة، وحدة قياس الإجهاد هي N/m^2 أو الباسكال Pa.

إنّ شعاع الإجهاد $(\vec{T})$ يعرف على أنّه الإجهاد الذي يؤثّر على السّطح في نقطة معيّنة و يكون ذو مقدار كمّي معيّن حيث:

$$\vec{T} = \lim_{dS\to 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$$

إذا كان شعاع القوّة مائلا على السّطح فإنّ الإجهاد سوف يتحلّل الى مركّبتين إحداهما عمودية تمثّل الإجهاد العمودي (تسمّى الضّغط p) و الأخرى مماسية تمثّل إجهاد القص τ.

مثال:

نفرض أنّ عبارة توزيع السرعة لجريان مستوٍ لمائع لزج تعطى كالآتي:

$$V(z) = 3\,z^3 + 2\,z^2$$

إذا كان معامل اللزوجة الديناميكية للمائع هو $\mu = 0.035\ N\,s\,m^{-2}$، أحسب عندئذ قيمة إجهاد القص على بعد $30cm$ من الجدار.

الحل:

لدينا:

$$\tau = \mu\ \frac{dV}{dz} = \mu(9z^2 + 4z)$$

و منه فإنّ قيمة إجهاد القص على بعد $30cm$ من الجدار هي:

$$\tau_{z=0.3m} = 0.035[9(0.3)^2 + 4(0.3)]$$

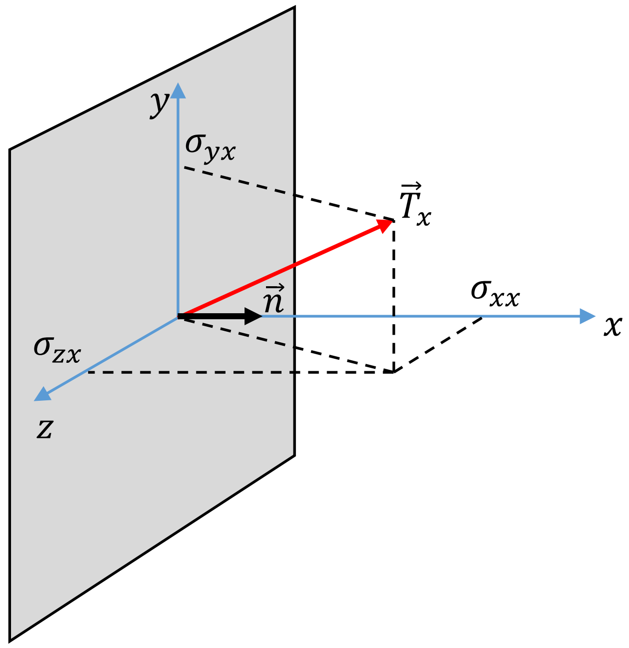
إذن: $$\tau_{z=0.3m} = 7.035\cdot 10^{-2} N\,m^{-2}$$

5.1. قوى السّطح و قوى الحجم

تنقسم القوى الخارجية المؤثّرة على جسيمات المائع إلى قسمين و هما قوى السّطح و قوى الحجم. لكن قبل أن نعرِّف ذلك يجب أن نتطرّق أوّلاً إلى مفهوم تنسور الإجهادات.

أ. تنسور الإجهادات:

نريد هنا أوّلا إيجاد عبارة الإجهاد $\vec{T}$ المطبّق على سطح اتّجاهه كيفي ذو ناظم $\vec{n}$. لذلك بادئ ذي بدء نعتبر سطح عمودي على المحور x و ليكن شعاع الوحدة النّاظم على هذا السطح هو $\vec{n} = \vec{e}_x$ كما هو موضح في الشكل (2.1).



شكل (2.1)

إنّ الإجهاد المطبق على هذا السّطح هو $\vec{T}_x$ حيث يمكن تفكيكه على الشّكل الآتي:

$$\vec{T}_x = \sigma_{xx}\,\vec{e}_x + \sigma_{yx}\,\vec{e}_y + \sigma_{zx}\,\vec{e}_z$$

نلاحظ أنّ σ_{yx} و σ_{zx} هما مركبتان مماسيتان ناتجتان عن اللّزوجة بينما σ_{xx} هي مركبة عمودية ناتجة عن الضّغط.

بنفس الطّريقة السّابقة و باعتبار أنّ السّطح عمودي على المحور y ثم على المحور z نجد:

$$\vec{T}_y = \sigma_{xy}\,\vec{e}_x + \sigma_{yy}\,\vec{e}_y + \sigma_{zy}\,\vec{e}_z$$
$$\vec{T}_z = \sigma_{xz}\,\vec{e}_x + \sigma_{yz}\,\vec{e}_y + \sigma_{zz}\,\vec{e}_z$$

نعتبر الآن سطح اتّجاهه كيفي، يمكن تفكيك عبارة الشّعاع الناظم على هذا السّطح في المعلم الكارتيزي على الشّكل:

$$\vec{n} = n_x\,\vec{e}_x + n_y\,\vec{e}_y + n_z\,\vec{e}_z$$

في هذه الحالة يمكن كتابة عبارة الإجهاد المطبّق على هذا السّطح كالآتي:

$$\vec{T} = n_x\,\vec{T}_x + n_y\,\vec{T}_y + n_z\,\vec{T}_z$$

بتعويض عبارات $\vec{T}_x$، $\vec{T}_y$ و $\vec{T}_z$ نجد:

$$\vec{T} = n_x\left(\sigma_{xx}\,\vec{e}_x + \sigma_{yx}\,\vec{e}_y + \sigma_{zx}\,\vec{e}_z\right) + n_y\left(\sigma_{xy}\,\vec{e}_x + \sigma_{yy}\,\vec{e}_y + \sigma_{zy}\,\vec{e}_z\right) + n_z\left(\sigma_{xz}\,\vec{e}_x + \sigma_{yz}\,\vec{e}_y + \sigma_{zz}\,\vec{e}_z\right)$$

أي أنّ:

$$\vec{T} = \left(n_x\,\sigma_{xx} + n_y\,\sigma_{xy} + n_z\,\sigma_{xz}\right)\vec{e}_x + \left(n_x\,\sigma_{yx} + n_y\,\sigma_{yy} + n_z\,\sigma_{yz}\right)\vec{e}_y + \left(n_x\,\sigma_{zx} + n_y\,\sigma_{zy} + n_z\,\sigma_{zz}\right)\vec{e}_z$$

و منه يكون:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

إذن يمكن أن نكتب:

$$\vec{T} = \bar{\bar{T}} \cdot \vec{n}$$

حيث $\bar{\bar{T}}$ يسمّى تنسور الإجهادات، أو بشكل آخر يمكن أن نكتب (ترميز أينشتاين):

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

حيث σ_{ij} تمثّل الإجهادات الوحدوية.

ملاحظة:

يمكن تفكيك كذلك عبارة الإجهاد الكلّي $\vec{T}$ كالآتي:

$$\vec{T} = -p \cdot \vec{n} + \vec{\tau}$$

حيث:

$\vec{\tau}$ تمثل الإجهاد المماسي الناتج عن اللّزوجة (إجهاد القص).

$(-p\cdot\vec{n})$ يمثل الإجهاد العمودي (الضّغط).

و منه، إذا كان المائع مثالي أو في حالة سكون، بالتّالي لا و جود لإجهاد القص، فإنّه في هذه الحالة تكون عبارة الإجهاد الكلّي $\vec{T}$ كالآتي:

$$\vec{T} = -p\cdot\vec{n}$$

ب. قوى السّطح:

نعتبر مائع حقيقي (لزج) في حالة حركة، ففي هذه الحالة قوى السّطح ليست فقط عمودية على السّطح بل توجد إجهادات مماسية ناشئة عن اللّزوجة (الاحتكاكات). ففي نقطة M من سطح dS، قوّة السّطح يعبّر عنها كالآتي:

$$d\vec{F} = \vec{T}\,dS$$

حيث $\vec{T}$ يمثّل الإجهاد المطبّق على السّطح ذو النّاظم $\vec{n}$ كما هو موضّح في الشكل (3.1). أو نكتب بشكل آخر (ترميز أينشتاين):

$$dF_i = T_i\,dS$$

كما رأينا سابقا يمكن أن نعبّر عن الإجهاد T_i بدلالة الإجهادات الوحدوية σ_{ij}، و بالتّالي تكون عبارة قوى السّطح كالآتي:

$$dF_i = \sigma_{ij}\cdot n_j\,dS$$

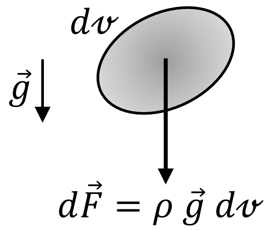
حالات خاصة: إذا كان المائع مثالي أو في حالة سكون و بالتالي لا و جود لإجهاد القص، فإنّه في هذه الحالة قوى السّطح تكتب مباشرةً كالآتي:

$$d\vec{F} = -p\,\vec{n}\,dS$$

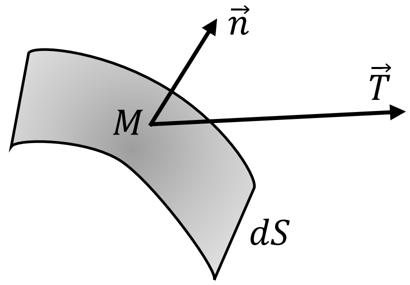
حيث p يمثل الضّغط السّاكن أو الستاتيكي و الذي هو مستقل عن الاتّجاه في النّقطة المعطاة.

ج. قوى الحجم:

إنّ حقول القوّة (سَواءً كانت ثقالية، كهربائية، مغناطيسية ... إلخ) تطبّق على جسيمات المائع تأثيرات عن بعد تكون متناسبة مع أحجام الجسيمات و تسمّى بقوى الحجم و التي تكون على الشّكل $\rho\,\vec{F}\,dv$ بالنسبة لعنصر الحجم dv. ففي حالة وجود حقل الجاذبية الأرضية $(\vec{g})$ فقط يكون $\vec{F}=\vec{g}$ و بالتالي فإنّ قوى الحجم تكتب على الشّكل $\rho\,\vec{g}\,dv$ كما هو موضح في الشكل (4.1).



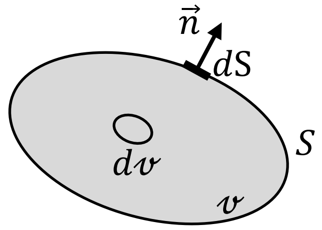
شكل (4.1)



شكل (3.1)

6.1. العبارة الأساسية للموائع السّاكنة

نعتبر جزء معيّن من مائع في حالة سكون حجمه v، إنّ مجموع قوى الحجم المطبّقة على المائع الموجود داخل الحجم v هي من الشّكل $\iiint_v \rho\,\vec{g}\,dv$ و مجموع قوى السّطح المطبّقة على السّطح S المحيط بالحجم v هي من الشكل $\iint_S -p\,\vec{n}\,dS$ حيث $\vec{n}$ هو شعاع الوحدة النّاظم على السّطح و هو شعاع موجّه خارج هذا السّطح المغلق كما هو موضّح في الشّكل (4.1) (لا وجود لإجهاد القص في هذه الحالة).



شكل (4.1)

إنّ المجموع الكلّي للقوى المطبّقة على الحجم $\mathcal{v}$ (و التي هي تمثّل قوى الحجم و السّطح) يكون معدوم و ذلك راجع لأن المائع في حالة سكون و منه:

$$\iiint_{\mathcal{v}} \rho\,\vec{g}\,d\mathcal{v} + \iint_S -p\,\vec{n}\,dS = \vec{0}$$

و باستعمال نظرية أوستروغرادسكي نجد:

$$\iiint_{\mathcal{v}} \rho\,\vec{g}\,d\mathcal{v} + \iiint_{\mathcal{v}} -\overrightarrow{grad}\,p\,d\mathcal{v} = \vec{0}$$

و منه:

$$\iiint_{\mathcal{v}} \left(\rho\,\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,p\right) d\mathcal{v} = \vec{0}$$

و هذا يعني أنّ:

$$\rho\,\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,p = \vec{0}$$

أي أنّ:

$$\overrightarrow{grad}\,p = \rho\,\vec{g}$$

أو نكتب بشكل آخر:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = -\rho\,g\,\vec{k}$$

بالمطابقة بين طرفي المعادلة نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن الضّغط p مستقل عن x، و من المعادلة (2) نستنتج كذلك أن الضّغط p مستقل عن y. و منه فإن الضّغط p لا يتعلّق إلا بـ z أي أنّ $p = p(z)$. و حسب المعادلة (3) نجد إذن:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g$$

و هي تمثل العبارة الأساسية للموائع السّاكنة على شكلها التفاضلي.

تطبيق (1): حالة الموائع الغير قابلة للانضغاط

كما رأينا سابقا أنّه في حالة الموائع السّاكنة الضّغط p لا يتعلّق إلا بـ z أي أن $p = p(z)$، و منه يكون:

$$dp = \frac{dp}{dz} dz$$

أي أنّ:

$$p = \int \frac{dp}{dz} dz + cste$$

و منه يكون حسب العبارة الأساسية للموائع السّاكنة (على شكلها التّفاضلي):

$$p = \int -\rho\, g\, dz + cste$$

كما أنّنا نعلم أنّه في حالة الموائع الغير قابلة للانضغاط تكون الكتلة الحجمية ثابتة و منه نجد:

$$p = -\rho\, g\, z + cste$$

أي أنّ:

$$p + \rho\, g\, z = cste$$

تطبيق (2): حالة الموائع القابلة للانضغاط

في حالة الموائع القابلة للانضغاط تكون الكتلة الحجمية للمائع غير ثابتة و تتعلق مباشرة بالضغط و هذا الأخير يتعلّق بالارتفاع z. ففي حالة غاز مثالي تكون معادلة الحالة من الشكل:

$$p\, v = n\, R\, T$$

حيث R يمثل ثابت الغازات المثالية، n يمثل عدد المولات في الغاز و T تمثل درجة الحرارة المطلقة للغاز.

و لدينا: $n = \frac{m}{M} = \frac{\rho\, v}{M}$

حيث m تمثّل الكتلة، M تمثّل الكتلة المولية و ρ تمثّل الكتلة الحجمية.

و منه تكون عبارة الكتلة الحجمية للغاز المثالي كالآتي:

$$\rho = p\frac{M}{R\, T}$$

بالتعويض في العبارة الأساسية للموائع الساكنة (على شكلها التفاضلي) نجد:

$$\frac{dp}{dz} = -(p\frac{M}{R\, T})\, g$$

أي أنّ:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M\, g}{R\, T}\, dz$$

و باعتبار أنّ درجة الحرارة ثابتة يكون :

$$\ln p = -\frac{M\, g}{R\, T} z + cste$$

إذن تكون عبارة الضّغط للغاز المثالي بدلالة الارتفاع z كالآتي:

$$p = p_0\, exp\left(-\frac{M\, g}{R\, T}\, z\right)$$

حيث p_0 يمثل الضغط عند الارتفاع $z = 0$.

الفصل الثّاني – سينماتيك الموائع

إنّ علم سينماتيك الموائع يهتم بالوصف التّحليلي لجملة في حالة حركة. و فيما يلي سنهتم بدراسة حركة الموائع و ذلك بدون الأخذ بعين الاعتبار بمسبِّبات هذه الحركة.

1.2. وصف حركة الموائع

سنتطرّق هنا إلى طريقة لاغرانج و طريقة أولر.

أ. طريقة لاغرانج:

ترتكز طريقة لاغرانج في دراسة حركة المائع على تتبّع حركة جسيم المائع بشكل فردي، بحيث إذا كانت إحداثيات جسيم من المائع عند اللحظة $t = 0$ هي (a, b, c) فإنّه عند أيّ لحظة زمنية t ستكون إحداثيات هذا الجسيم (x, y, z) تابِعاً لـ (a, b, c) و للزّمن t. و تسمّى هذه المتغيّرات الأربعة (a, b, c, t) بمتغيّرات لاغرانج. مع العلم أنّ وصف لاغرانج هو ذلك الوصف المستعمل في ميكانيك النّقطة المادّية.

ب. طريقة أولر:

خلافا لطريقة لاغرانج فإنّ طريقة أولر لا ترتكز على دراسة حركة المائع بحدّ ذاته بل تكمن في دراسة الفراغ المشغول بالمائع المتحرك، حيث أنّ هذه الطريقة هي الأنسب في دراسة حركة الموائع. على سبيل المثال نختار نقطة ما في الفراغ لها إحداثيات (x, y, z) و ندرس التغيّرات التي تحدث للمقادير المميّزة للمائع عند هذه النقطة مع مرور الزمن t أو بالانتقال من نقطة في الفراغ إلى أخرى. إنّ هذه المتغيرات الأربعة (x, y, z, t) تسمّى بمتغيّرات أولر. مع العلم أنّ وصف أولر هو الوصف المستعمل لكل الحقول في الفيزياء.

مثال: نفرض أنه يوجد جريان معرّف بدلالة متغيرات لاغرانج (a,b,c,t) كما يلي:

$$(*)\begin{cases} x = a + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 + \beta\, a\, t \\ y = b + \beta\, t^2 + 3\,\gamma\, t \\ z = c + b\,\gamma\, t \end{cases}$$

في هذه الحالة أوجد مركّبات السّرعة u، v و w لهذا الجريان بدلالة متغيّرات أولر.

الحل:

لدينا من جملة المعادلات $(*)$:

$$(**)\begin{cases} u = \dfrac{dx}{dt} = \alpha\, t + \beta\, a \\ v = \dfrac{dy}{dt} = 2\beta\, t + 3\,\gamma \\ w = \dfrac{dz}{dt} = b\,\gamma \end{cases}$$

و كذلك لدينا من جملة المعادلات $(*)$:

$$\begin{cases} a = \dfrac{x - \frac{1}{2}\alpha\, t^2}{1 + \beta\, t} \\ b = y - \beta\, t^2 - 3\,\gamma\, t \\ c = z - b\,\gamma\, t \end{cases}$$

و منه بتعويض عبارات a، b و c في جملة المعادلات $(**)$ نجد:

$$\begin{cases} u = \alpha\, t + \beta\left(\dfrac{x - \frac{1}{2}\alpha\, t^2}{1 + \beta\, t}\right) \\ v = 2\beta\, t + 3\,\gamma \\ w = \gamma\,(y - \beta\, t^2 - 3\,\gamma\, t) \end{cases}$$

و هي تمثل مركبات السرعة بدلالة متغيرات أولر الأربعة (x,y,z,t).

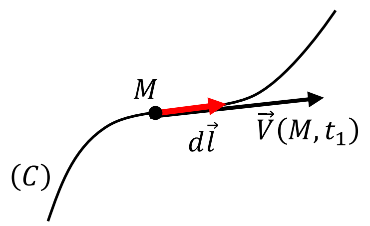
2.2. خطوط و أنابيب التيار

أ. خط التيار:

خط التيار هو كل منحنٍ (C) في المائع المتحرّك بحيث يكون شعاع السّرعة عند كل نقطة من نقاطه مماسي لهذا المنحني.

من خلال التّعريف يكون شعاع السّرعة $\vec{V}$ و عنصر الانتقال $d\vec{l}$ متوازيين عند كل نقطة من نقاط خط التيار كما هو موضح في الشكل (1.2)، أي أنّ:

$$d\vec{l} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$



شكل (1.2) خط تيار عند اللحظة t_1

و منه يكون:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{0}$$

إذن:

$$(w\,dy - v\,dz)\vec{i} - (w\,dx - u\,dz)\vec{j} + (v\,dx - u\,dy)\vec{k} = \vec{0}$$

بالمطابقة بين طرفي المعادلة نجد:

$$\begin{cases} w\,dy = v\,dz \\ w\,dx = u\,dz \\ v\,dx = u\,dy \end{cases}$$

و نكتب بشكل آخر:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{v} = \dfrac{dz}{w} \\ \dfrac{dx}{u} = \dfrac{dz}{w} \\ \dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v} \end{cases}$$

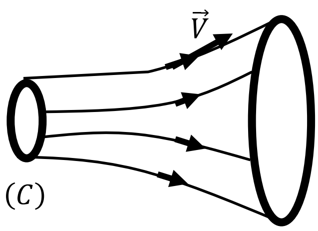
أي أنّ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

هذه الأخيرة تمثّل المعادلات التّفاضلية التي تعرف بها خطوط التيار. كما يجدر التنبيه هنا إلى أنّ خطوط التيار عند اللّحظة t_1 تكون في الحالة العامّة مختلفة عن خطوط التيار عند اللّحظة t_2.

ب. أنبوب التيار:

أنبوب التيار يعرف على أنه السطح الذي ينشأ بأخذ منحني مغلق (C) في المائع المتحرك و رسم خطوط التيار المارّة بجميع نقاط هذا المنحني المغلق كما هو موضّح في الشكل (2.2).



شكل (2.2) أنبوب تيار عند اللحظة t_1

ج. خطوط التيار و المسارات:

يجب التنبيه هنا إلى أنّ خطوط التيار تختلف عن المسارات، حيث أنّه لتشكيل خط تيار عند لحظة زمنية معيّنة نعتبر جسيمات مائع مختلفة عند نفس اللّحظة الزّمنية بينما المسار يتشكّل من خلال وضعيات متتالية لنفس جسيم المائع عند لحظات زمنية مختلفة. حيث تعرف المسارات من خلال المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

مع العلم أنه من أجل الجريان الدّائم تكون خطوط التيار و المسارات متطابقة.

مثال:

نفرض أنّه يوجد جريان لمائع تعطى عبارة حقل سرعته بدلالة متغيّرات أولر كما يلي:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} x\, y^2 \\ v = -\frac{1}{2} x^2\, y \\ w = 0 \end{cases}$$

المطلوب تحديد خطوط التيار لهذا الجريان.

الحل:

إنّ هذا الجريان مستوٍ لأنّ $w = 0$، المعادلة التفاضلية لخطوط التيار في هذه الحالة هي:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

بتعويض عبارتي u و v نجد: $$\frac{dx}{\left(\frac{1}{2}x\, y^2\right)} = \frac{dy}{\left(-\frac{1}{2}x^2\, y\right)}$$

و منه: $$x\, dx + y\, dy = 0$$

بالمكاملة نجد: $$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = cste$$

و منه فإنّ شكل خطوط التيار لهذا الجريان هي عبارة عن دوائر في المستوي xOy مركزها O.

3.2. التدفّقات

نقصد هنا بالتدفّقات، التدفّق الحجمي و التدفّق الكتلي.

أ. التدفّق الحجمي:

يرمز للتدفّق الحجمي بالرّمز q_v، و هو يمثّل حجم المائع الذي يعبر سطح ما موجّه خلال وحدة الزّمن (وحدته m^3/s). فإذا اعتبرنا جريان لمائع ما سرعته $\vec{V}(x,y,z,t)$ فإنّ التدفّق الحجمي للمائع الذي يعبر السّطح S هو:

$$q_v = \frac{dv(t)}{dt} = \iint_S \vec{V}(x,y,z,t)\, d\vec{S}$$

ب. التدفّق الكتلي:

يرمز للتدفّق الكتلي بالرّمز q_m، و هو يمثل كتلة المائع التي تعبر سطح ما موجّه خلال وحدة الزّمن (وحدته kg/s). فإذا اعتبرنا جريان لمائع ما سرعته $\vec{V}(x,y,z,t)$ فإنّ التدفق الكتلي للمائع الذي يعبر السّطح S هو:

$$q_m = \frac{dm(t)}{dt} = \iint_S \rho(x,y,z,t)\cdot\vec{V}(x,y,z,t)\, d\vec{S}$$

4.2. الاشتقاق الكلّي

نعتبر دالّة سلّمية $A(x,y,z,t)$ و التي تمثّل مقدار فيزيائي يميّز المائع عند النّقطة التي إحداثياتها (x,y,z) و عند اللحظة t، إذن:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz + \frac{\partial A}{\partial t}dt$$

و منه:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

حيث: $\frac{dx}{dt}=u$، $\frac{dy}{dt}=v$ و $\frac{dz}{dt}=w$

و منه يكون:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+u\frac{\partial A}{\partial x}+v\frac{\partial A}{\partial y}+w\frac{\partial A}{\partial z}$$

أيضا يمكن أن نكتب:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\vec{V}\cdot\overrightarrow{grad}\,A$$

حيث:

$\frac{dA}{dt}$ تمثّل المشتقّة الكلّية للدالة A.

$\frac{\partial A}{\partial t}$ تمثّل المشتقّة المحلِّية للدالة A، هذا الحد هو ناتج عن عدم استقرار الجريان.

$\vec{V}\cdot\overrightarrow{grad}\,A$ تمثل المشتقة الحِملية للدالة A، هذا الحد هو ناتج عن عدم انتظام الجريان.

و في حالة إذا كان $A(x,y,z,t)$ يمثل حقل السّرعة للجريان أي $\vec{V}(x,y,z,t)$ يكون عندئذ:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\overrightarrow{grad}\,\vec{V}$$

هذه العلاقة الأخيرة يمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right)+\overrightarrow{rot}\vec{V}\wedge\vec{V}$$

مثال:

نعتبر جريان دائم يتميّز بحقل السرعة الآتي:

$$\begin{cases}u=k\,x\\ v=k\,y\end{cases}$$

حيث k ثابت. المطلوب إيجاد عبارة تسارع جسيمات المائع.

الحل:

من عبارة المشتقّة الكلّية لدينا:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ a_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

و منه:

$$\begin{cases} a_x = (k\,x)\,(k) + (k\,y)(0) \\ a_y = (k\,x)\,(0) + (k\,y)(k) \end{cases}$$

أي أنّ:

$$\begin{cases} a_x = k^2 \cdot x \\ a_y = k^2 \cdot y \end{cases}$$

إذن عبارة تسارع جسيمات المائع هي:

$$\vec{a} = k^2 \cdot x\ \vec{i} + k^2 \cdot y\ \vec{j}$$

أي:

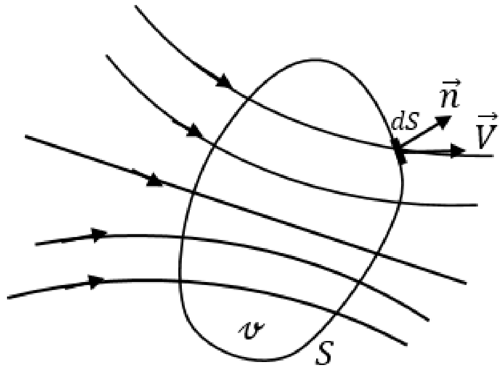
$$\vec{a} = k^2(x\ \vec{i} + y\ \vec{j})$$

و يمكن أن نكتب كذلك:

$$\vec{a} = k^2 \cdot \vec{r}$$

5.2. معادلة انحفاظ الكتلة (معادلة الاستمرارية)

ليكن v حجم ثابت في الفضاء و محدود بسطح مغلق S. و ليكن $\vec{n}$ شعاع الوحدة النّاظم على السّطح و هو موجّه نحو خارج الحجم v كما هو موضح في الشكل (3.2).



شكل (3.2)

إنّ المائع يدخل إلى هذا الحجم و يخرج منه في كل لحظة بحيث يكون التغيّر في الكتلة الكلّية التي يحتويها هذا الحجم بالنّسبة للزّمن مساويا و معاكسا للتدفق الكتلي للمائع الذي يدخل و يخرج عبر السّطح S، أي أنّ:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\iint_S \rho \cdot V \cdot \vec{n}\, d\vec{S}$$

حيث: $m = \iiint_v \rho\, dv$

و منه يكون:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_v \rho\, dv = -\iint_S \rho \cdot V \cdot \vec{n}\, d\vec{S}$$

في حالتنا هذه يمكن أن نكتب كذلك:

$$\iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv + \iint_S \rho \cdot V \cdot \vec{n}\, d\vec{S} = 0$$

و هي تمثل معادلة انحفاظ الكتلة في شكلها التكاملي.

أو باستعمال نظرية أوستروغرادسكي يكون:

$$\iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv + \iiint_v div(\rho\vec{V})\, dv = 0$$

أي أنّ:

$$\iiint_{\upsilon} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{V}\right)\right] d\upsilon = 0$$

و منه نجد:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{V}\right) = 0$$

و هي تمثل معادلة انحفاظ الكتلة في شكلها المحلّي. و كحالة خاصّة، حسب هذه المعادلة، إذا كان المائع في حالة جريان دائم أي $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ يكون $div\left(\rho\vec{V}\right) = 0$.

و يمكن أن نكتب معادلة انحفاظ الكتلة كذلك على الشكل:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\, div\left(\vec{V}\right) + \vec{V}\, \overrightarrow{grad}\rho = 0 \quad .....(1)$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V}\, \overrightarrow{grad}\rho \quad ......(2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\left(\vec{V}\right) = 0$$

و كحالة خاصّة، حسب هذه المعادلة، إذا كان الجريان غير قابل للانضغاط يكون:

$$div\left(\vec{V}\right) = 0$$

أي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

مثال:

نفرض أنّه يوجد جريان دائم تعطى عبارة توزيع سرعته كالآتي:

$$\begin{cases} u = 3x\,y^2 + 2x + y^2 \\ v = x^2 - 2y - y^3 \end{cases}$$

هل هذا الجريان غير قابل للانضغاط؟

الحل:

للإجابة عن ذلك نحسب $div(\vec{V})$:

لدينا:

$$div(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

و منه:

$$div(\vec{V}) = (3y^2 + 2) + (-2 - 3y^2)$$

إذن:

$$div(\vec{V}) = 0$$

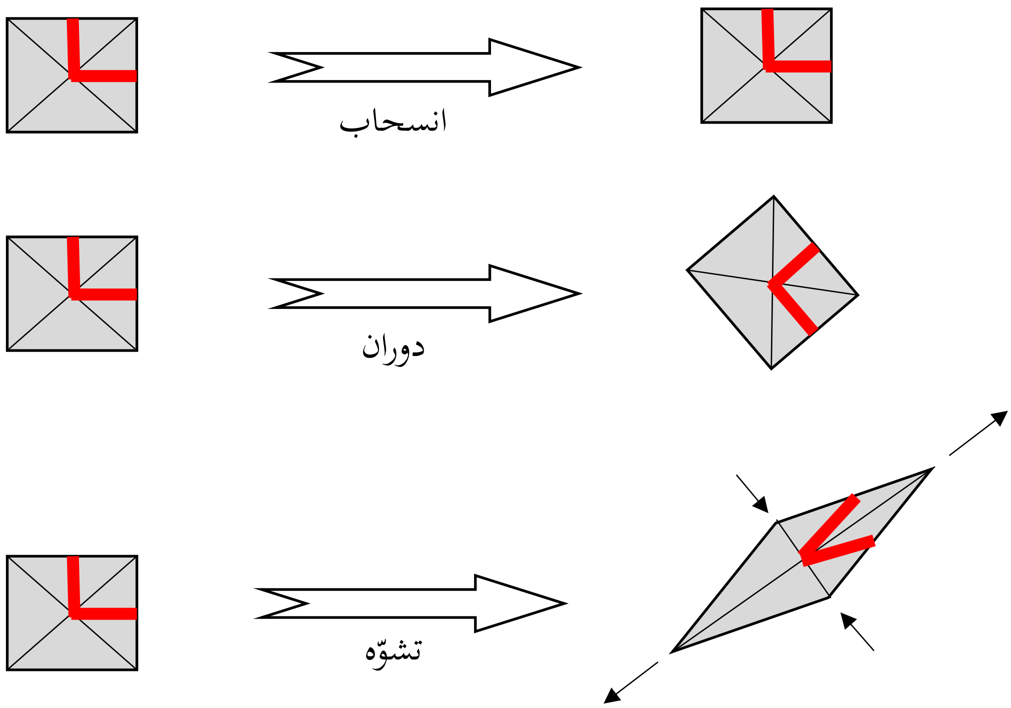
و منه نستنتج أنّ هذا الجريان غير قابل للانضغاط.

6.2. دراسة سينماتيكية للجريانات الغير دورانية

أ. مقدّمة:

خلال حركته، جسيم المائع يخضع لتغيّرات في و ضعيته و في اتّجاهه وفي شكله. و بشكل عام فإنّ حركة جسيم المائع مركبة من انسحاب و دوران و تشوّه كما هو موضّح في الشكل (4.2).

و منه في حالة غياب الدّوران مثلاً نقول عن الجريان أنّه غير دوراني.



شكل (4.2)

ب. الجريان الكموني:

إنّ الجريان الذي يتميّز بوجود دالة سلمية $\Phi(x,y,z)$ حيث يكون شعاع السّرعة يحقّق:

$$\vec{V}=\overrightarrow{grad}\,\Phi(x,y,z)$$

يسمى جريان كموني، و الدالة السلمية $\Phi(x,y,z)$ تسمّى كمون السّرعات.

❖ إنّ الجريان الكموني هو جريان غير دوراني، بالفعل لدينا:

$$\vec{V}=\overrightarrow{grad}\,\Phi(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

إذن:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

أي أنّ:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right]\vec{k}$$

و منه نجد أنّ:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$$

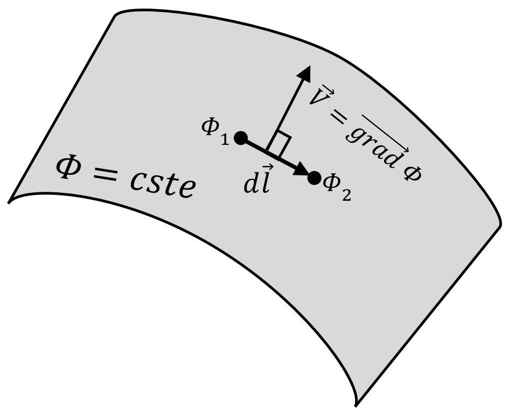
و عليه فإن الجريان غير دوراني.

❖ إنّ معادلة سطوح تساوي الكمون تكتب على الشكل:

$$\Phi(x, y, z) = cste$$

إذن خلال انتقال عنصري $d\vec{l}$ على سطح تساوي كمون كما هو موضح في الشكل (5.2) يكون:

$$d\Phi = 0$$



شكل (5.2)

و منه:

$$\overrightarrow{grad}\,\Phi \cdot d\vec{l} = 0$$

أي أنّ: $\overrightarrow{grad}\,\Phi$ هو عمودي على الانتقال العنصري $d\vec{l}$ و بالتّالي فإنّ شعاع السّرعة $\vec{V}$ هو عمودي على الانتقال العنصري $d\vec{l}$. و منه نستنتج أنّ خطوط التيار (التي هي مماسية لشعاع السّرعة) تكون عمودية على سطوح تساوي الكمون.

❖ في حالة الجريان الكموني الدائم و الغير قابل للانضغاط يكون $div\,\vec{V} = 0$ و $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\,\Phi$
ومنه نجد:

$$div\left(\overrightarrow{grad}\,\Phi\right) = 0$$

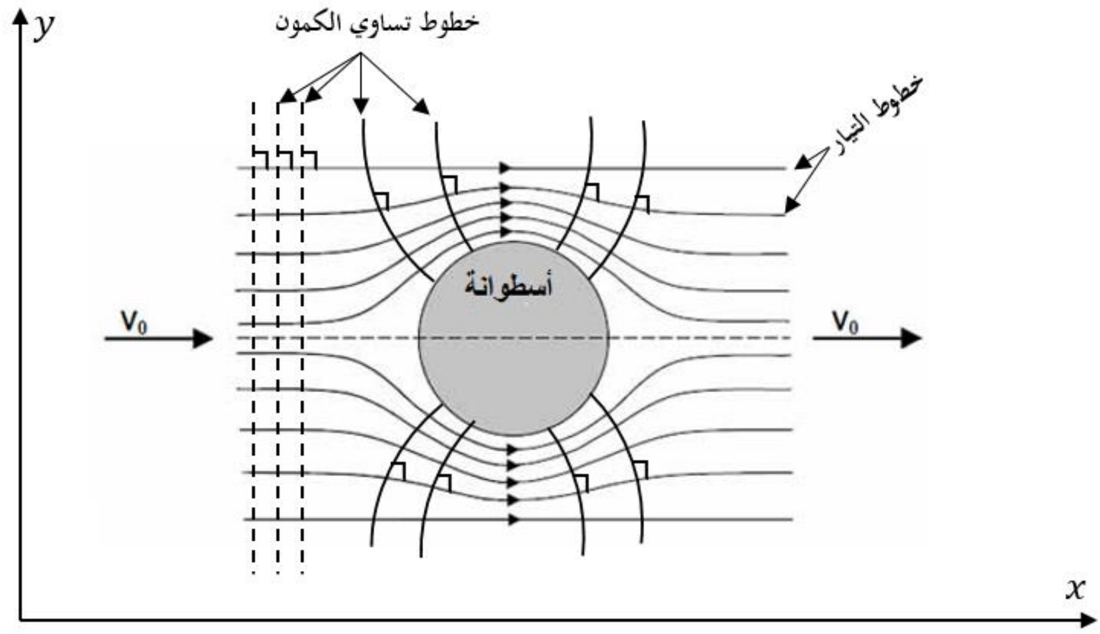
أي أنّ الجريان الكموني الدّائم و الغير قابل للانضغاط يحقّق:

$$\Delta\Phi = 0$$

حيث Δ يمثّل مؤثّر لابلاس: $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

ج. دراسة تحليلية للجريانات المستوية الغير دورانية:

نعتبر جريان مستوٍ غير قابل للإنضغاط و دائم سرعته منتظمة عند اللّانهاية تعترضه أسطوانة عمودية على إتّجاه السّرعة كما هو موضّح في الشكل (6.2).



شكل (6.2)

❖ بسبب التناظر، متّجه السّرعة في كل نقاط الجريان يكون موازٍ للمستوي xOy أي أنّ : $w = 0$.

كذلك الجريان يتمُّ بشكل متماثل في كل مستوٍ موازٍ للمستوي xOy أي أنّ: $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. و بما أنّ الجريان دائم و غير قابل للانضغاط إذن معادلة الاستمرارية لهذا الجريان يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

❖ من جهة أخر نعرّف دالة سلّمية جديدة تسمّى دالة التيار و يرمز لها بالرّمز $\Psi(x, y)$، إنّ هذه الدالة السلّمية $\Psi(x, y)$ تحقق:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

بمعرفة دالة التيار $\Psi(x,y)$ يمكن استنتاج حقل السّرعة في كل نقطة من الجريان. كذلك من خصائص دالة التيار أنّها ثابتة على نفس خط التيار، بالفعل خلال انتقال عنصري $d\vec{l}$ على خط التيار يكون:

$$d\Psi = \overrightarrow{grad}\,\Psi \cdot d\vec{l}$$

أي أنّ:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy$$

و منه:

$$d\Psi = -v\,dx + u\,dy \cdots\cdots\cdots (1)$$

و من جهة أخرى كما رأينا سابقا فإنّ المعادلة التفاضلية لخط التيار تكتب على الشكل:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

أي أنّ:

$$v\,dx = u\,dy$$

و بالتّعويض في المعادلة (1) نجد:

$$d\Psi = 0$$

أي أنّ:

$$\Psi = cste$$

و منه نستنتج أنّ دالة التيار ثابتة على نفس خط التيار و كذلك أنّه لكلِّ خط تيار دالة تيار ثابتة تميُّزه.

❖ إنّ دالة التيار تحقّق $\Delta\Psi = 0$، بالفعل لدينا:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{0}$$

و ذلك لأنّ الجريان غير دوراني، إذن:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{0}$$

حيث $w = 0$ و $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ كما رأينا ذلك سابقاً، و منه يكون:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

و بتعويض عبارتي u و v نجد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)$$

أي أنّ:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

و منه:

$$\Delta \Psi = 0$$

❖ إنّ دالتي التيار و الكمون يحقّقان شروط كوشي-ريمان و ذلك لأنّ:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

و عليه تُعرف دالّة الكمون المركّب الدالّة $F(z)$ حيث:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y)$$

مع العلم أنّ: $z = x + i\,y$ في الاحداثيات الكارتيزية و $z = r\,e^{i\theta}$ في الاحداثيات القطبية.

إنّ من أهمّية استعمال دالة الكمون المركّب هو جمع دالّتي التيار و الكمون في دالّة واحدة هي $F(z)$.

مثال: جريان من منبع أو نحو بئر (بالوعة)

نعتبر جريان يتميّز بالكمون المركّب الآتي:

$$F(z) = A(\ln r + i\,\theta)$$

حيث: $z = r\,e^{i\theta}$، و A ثابت.

1- أوجد دالتي الكمون و التيار لهذا الجريان.

2- ماذا تمثّل خطوط التيار و خطوط تساوي الكمون لهذا الجريان.

3- أوجد مركّبات السّرعة لهذا الجريان.

الحل:

1- إيجاد دالتي الكمون Φ و التيار Ψ لهذا الجريان:

لدينا من المعطيات:

$$F(z) = A\ln r + i\,A\,\theta$$

و من جهة أخرى حسب تعريف دالة الكمون المركّب لدينا:

$$F(z) = \Phi + i \cdot \Psi$$

حيث Φ تمثّل دالة الكمون المركب و Ψ تمثل دالة التيار، بالمطابقة إذن نجد :

$$\Phi = A\ln r$$

$$\Psi = A\,\theta$$

2- خطوط التيار و خطوط تساوي الكمون لهذا الجريان:

كما رأينا سابقا، إنّ خطوط التيار تحقّق العلاقة:

$$\Psi = cste$$

و بتعويض عبارة دالة التيار Ψ نجد:

$$A\,\theta = cste$$

و منه مهما كانت قيمة r فإنّ :

$$\theta = cste$$

و بالتّالي فإنّ خطوط التيار لهذا الجريان تمثّل مستقيمات قطرية.

و من جهة أخرى كما رأينا سابقا، إنّ خطوط تساوي الكمون تحقّق العلاقة:

$$\Phi = cste$$

و بتعويض عبارة دالة الكمون Φ نجد:

$$A \ln r = cste$$

و منه مهما كانت قيمة θ فإنّ :

$$r = cste$$

و بالتالي فإنّ خطوط تساوي الكمون لهذا الجريان تمثّل دوائر مركزها O و نصف قطرها r.

3- مركّبات السّرعة لهذا الجريان:

لإيجاد مركبات السّرعة لهذا الجريان نستعمل العلاقة:

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\, \Phi$$

و باستعمال الاحداثيات القطبية يكون:

$$\vec{V} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{U}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{U}_\theta$$

و بتعويض عبارة دالة الكمون Φ نجد:

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial r}(A \ln r)\vec{U}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(A \ln r)\vec{U}_\theta$$

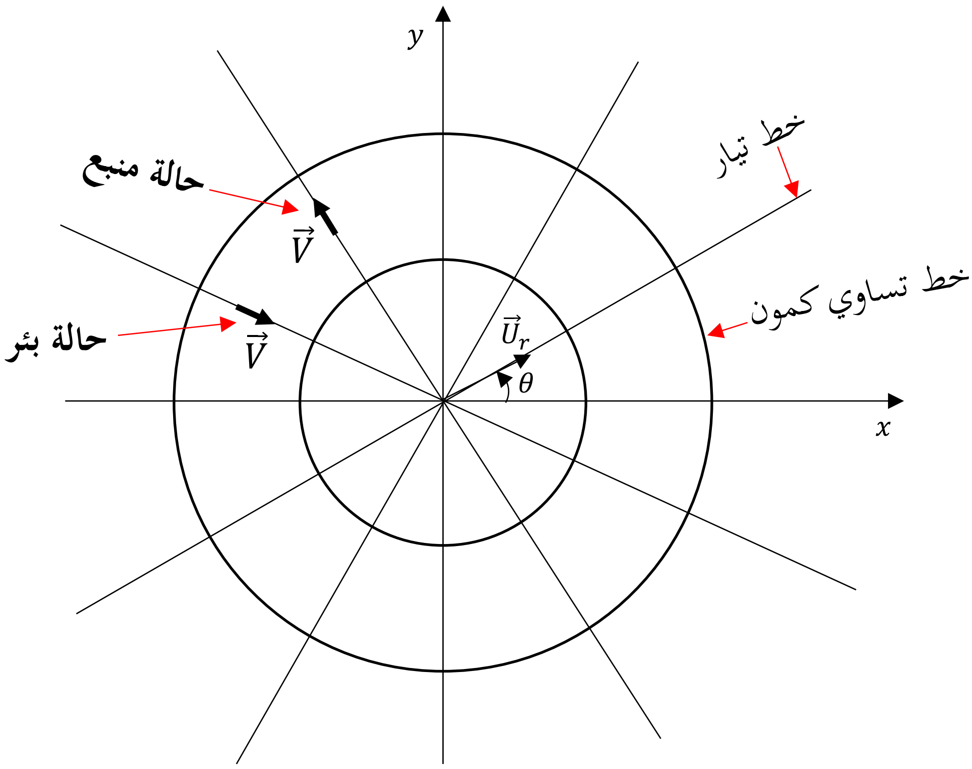
ومنه نجد:

$$\vec{V} = \frac{A}{r}\vec{U}_r$$

إذن يمكننا تمييز حالتين:

- ✔ إذا كان $A > 0$: أي أنّ $\vec{V}$ و $\vec{U}_r$ لهما نفس الاتّجاه، في هذه الحالة يكون مصدر الجريان هو منبع.
- ✔ إذا كان $A < 0$: أي أنّ $\vec{V}$ و $\vec{U}_r$ متعاكسين في الاتّجاه، في هذه الحالة يكون مصدر الجريان هو بئر.

و نُلخّص ذلك في الشكل (7.2).



شكل (7.2)

الفصل الثّالث – ديناميك الموائع

1.3. مقدّمة

إنّ المعادلات التي يجب تشكيلها لإيجاد المقادير المميّزة للمائع في كل نقطة وفي كل لحظة يعتمد على عدد المجاهيل، بحيث أنّ كل مسألة في ميكانيك الموائع الحقيقية تحوي ستّة مجاهيل و هي:

- ✓ السرعة $\vec{V}$ (بثلاثة مركّبات و هي u، v و w)
- ✓ الكتلة الحجمية ρ
- ✓ الضّغط p
- ✓ درجة الحرارة T

إذن لإيجاد هذه المقادير السّتّة يجب تشكيل ستّة معادلات و هي:

- ✓ معادلة انحفاظ الكتلة أو معادلة الاستمرارية كما رأيناها في الفصل الثّاني.
- ✓ معادلة انحفاظ كمّية الحركة و هي معادلة شعاعية مكافئة إلى ثلاث معادلات سلّمية.
- ✓ معادلة انحفاظ الطّاقة.
- ✓ معادلة مميّزة للمائع من الشّكل $f(p,\rho,T) = 0$.

و منه إذا اعتبرنا أنّ المائع درجة حرارته ثابتة و أنّ الجريان غير قابل للانضغاط أي أنّ $\rho = cste$، في هذه الحالة يكون عدد المجاهيل أربعة فقط و هم على التّوالي السّرعة بمركّباتها الثّلاث u، v ، w و الضّغط p. و المعادلات التي يستوجب تشكيلها في هذه الحالة هي معادلة الاستمرارية و معادلة انحفاظ كمّية الحركة و هي معادلة شعاعية مكافئة إلى ثلاث معادلات سلّمية، و هذا ما سنراه في هذا الفصل. و قبل ذلك سنتطرّق أولاً إلى نظرية انحفاظ كمّية الحركة و تطبيقها مثلاً من أجل حساب القوى التي يؤثّر بها المائع المتحرّك على السّطح الملامس له.

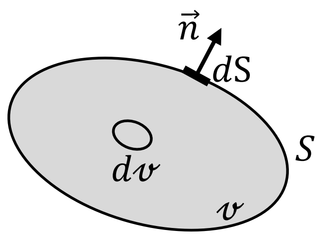
2.3. نظرية انحفاظ كمّية الحركة

- من أجل الموائع، و في حالة إذا اعتبرنا حجم مادّي v من المائع (يحوي مجموعة معيّنة من جسيمات المائع) يُتبَع خلال حركته فإنّ نظرية انحفاظ كمّية الحركة تنص على أنّ مقدار التغيّر الكلّي في كمّية حركة هذا الحجم المادّي بالنّسبة للزّمن يساوي مجموع القوى الخارجية (قوى الحجم و قوى السطح) المؤثّرة على هذا الحجم المادّي و في هذه الحالة يمكن أن نكتب الآتي:

$$\iiint_v \frac{d(\rho \vec{V})}{dt} dv = \sum \vec{F}_{ext}$$

حيث المقدار $(\rho \vec{V})$ يمثّل كمّية الحركة في وحدة حجم المائع.

- دائما من أجل الموائع، نعتبر الآن حجم v ثابت من الفضاء و محدود بسطح مغلق S بحيث المائع يدخل إلى هذا الحجم و يخرج منه في كل لحظة (نظام مفتوح). و ليكن $\vec{n}$ شعاع الوحدة النّاظم على السّطح و هو شعاع موجّه نحو خارج الحجم v كما هو موضّح في الشّكل (1.3).



شكل (1.3)

بما أنّ النّظام مفتوح أي المائع يدخل إلى حجم المراقبة v المحدود بالسّطح S و يخرج منه في كل لحظة، إذن يمكن كتابة معادلة انحفاظ كمّية الحركة في هذه الحالة كالآتي:

$$\iiint_v \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dv + \iint_S \rho \vec{V}(\vec{V} \vec{n}) dS = \sum \vec{F}_{ext}$$

حيث الكمّية $(\rho\,\vec{V})$ تمثّل كمّية الحركة في وحدة حجم المائع، و الكمّية $\iint_S \rho\,\vec{V}(\vec{V}\,\vec{n})dS$ تمثّل تدفّق كمّية الحركة عبر السّطح المغلق S.

في حالة الجريان الدائم يكون $\frac{\partial(\rho\,\vec{V})}{\partial t} = 0$ و منه تصبح معادلة انحفاظ كمّية الحركة على الشّكل الآتي:

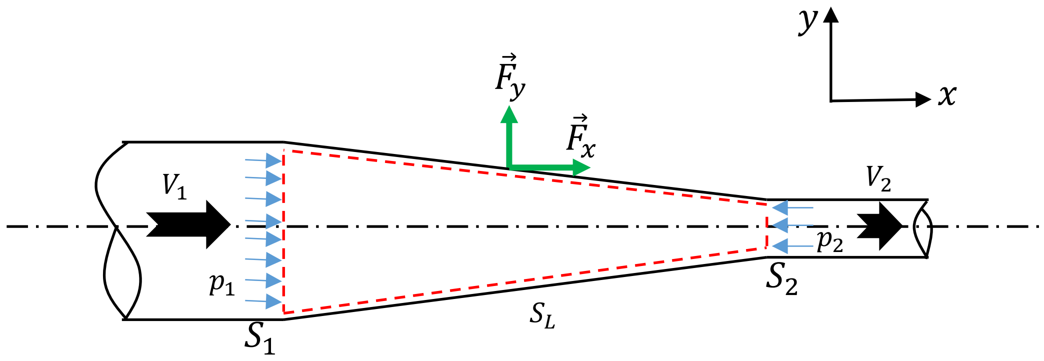
$$\iint_S \rho\,\vec{V}(\vec{V}\,\vec{n})dS = \sum \vec{F}_{ext}$$

و بالتّالي فإنّه في حالة الجريان الدّائم يكون مجموع القوى الخارجية المؤثّرة على المائع الموجود داخل السّطح المغلق S مساوياً لتدفّق كمّية الحركة عبر كامل هذا السّطح و هو ما يسمّى أيضا بنظرية أولر.

إذن يمكن استعمال نظرية انحفاظ كمّية الحركة في عدّة مسائل نذكر من بينها حساب القوى المطبّقة على جدار الأنبوب في المناطق التي يحدث فيها تغييرات مفاجئة في المقطع كالاتّساع المفاجئ أو التّدريجي و التّضييق المفاجئ أو التّدريجي، و كذلك حساب القوى المطبّقة على الصّفائح المستوية و المنحنية و كذلك حساب القوى المطبّقة على جدار الأنبوب في المناطق التي يحدث فيها تغييرات في الاتّجاه ... إلخ.

مثال:

نعتبر أنبوب مساحة مقطعه S_1 ثمّ يتقارب تدريجيا إلى أن تصبح مساحة مقطعه S_2، و ليكن q_m التدفّق الكتلي للمائع الذي بداخله، p_1 الضّغط عند مدخل الجزء المتقارب و p_2 الضّغط عند مخرج الجزء المتقارب كما هو موضّح في الشّكل (2.3). نعتبر الجريان دائم كما نهمل قوى الحجم. نريد إيجاد عبارة قوّة الدّفع $\vec{F}$ المطبّقة من طرف المائع على جدار الجزء المتقارب من الأنبوب.



شكل (2.3)

بما أنّ الجريان دائم، إذن بتطبيق نظرية انحفاظ كمّية الحركة بالنّسبة لحجم المراقبة المشكّل لأنبوب التيّار الموضح في الشّكل (الخطوط المتقطّعة) يكون لدينا:

$$\iint_S \rho\, \vec{V}(\vec{V}\,\vec{n})dS = \sum \vec{F}_{ext}$$

و منه نجد:

$$\iint_{S_1} \rho\, \vec{V}_1(\vec{V}_1\,\vec{n}_1)dS + \iint_{S_2} \rho\, \vec{V}_2(\vec{V}_2\,\vec{n}_2)dS + \iint_{S_L} \rho\, \vec{V}_L(\vec{V}_L\,\vec{n}_L)dS = \vec{R} + \vec{P}$$

حيث: $\vec{R}$ تمثل قوى السّطح، $\vec{P}$ تمثل قوى الحجم و S_L تمثل مساحة السّطح الجانبي لأنبوب التيار.

و منه يكون:

$$-q_m\vec{V}_1 + q_m\vec{V}_2 + \vec{0} = \vec{R} + \vec{P}$$

حيث:

$\vec{V}_1$ تمثّل سرعة دخول المائع للجزء المتقارب أي لحجم المراقبة.

$\vec{V}_2$ تمثّل سرعة خروج المائع من الجزء المتقارب أي من حجم المراقبة.

بما أنّ قوى الحجم مهملة، إذن بالإسقاط نجد:

$$\begin{cases} -q_m V_1 + q_m V_2 = p_1\, S_1 - p_2\, S_2 - F_x \\ \qquad\quad 0 \quad = \; -F_y \end{cases}$$

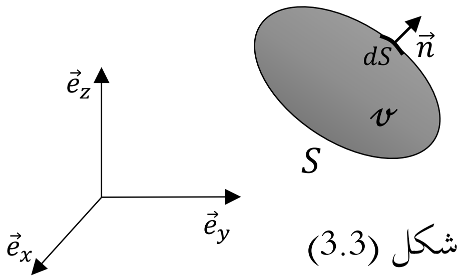
حيث F_x و F_y تمثل مركّبات قوّة الدّفع $\vec{F}$ المطبّقة من طرف المائع على جدار الجزء المتقارب من الأنبوب إذن $-\vec{F}$ تمثّل القوّة المطبّقة من طرف جدار الجزء المتقارب من الأنبوب على المائع. $p_1\, S_1$ تمثّل قوّة الضّغط المطبّقة على السّطح S_1 و $p_2\, S_2$ تمثّل قوّة الضّغط المطبّقة على السّطح S_2. و منه يكون:

$$\vec{F}: \begin{cases} F_x = p_1\, S_1 - p_2\, S_2 - q_m(V_1 - V_2) \\ F_y = 0 \end{cases}$$

3.3. من نظرية انحفاظ كمّية الحركة إلى معادلتي أولر و برنولي

أ. معادلة أولر:

نعتبر حجم مادّي v من المائع (يحوي مجموعة معيّنة من جسيمات المائع) محدود بسطح مغلق S و يتبع خلال حركته. و ليكن $\vec{n}$ شعاع الوحدة النّاظم على السّطح و هو شعاع موجّه نحو خارج الحجم v كما هو موضّح في الشّكل (3.3).



شكل (3.3)

إنّ مجموع قوى الحجم الخارجية المطبّقة على الحجم المادّي v من المائع هي من الشّكل $\iiint_v \rho\, \vec{F}\, dv$ بحيث إذا اعتبرنا حالة وجود حقل الجاذبية الأرضية فقط يكون $\vec{F} = \vec{g} = -g\, \vec{e}_z$. و من جهة أخرى، إنّ مجموع قوى السّطح المطبّقة على السّطح S المحيط بالحجم المادّي v هي من الشكل $\iint_S \vec{T}\, dS$ حيث $\vec{T}$ يمثل الاجهاد المطبّق على السّطح ذو النّاظم $\vec{n}$ و لكن بما أنّ المائع مثالي إذن لا وجود لإجهاد القص و بالتّالي فإنّ قوى السّطح في هذه الحالة تكون على الشّكل $\iint_S -p\, \vec{n}\, dS$.

إذن حسب نظرية انحفاظ كمّية الحركة لدينا:

$$\iiint_{v} \frac{d(\rho \vec{V})}{dt} dv = \iiint_{v} \rho \vec{F} \, dv + \iint_{S} -p \, \vec{n} \, dS$$

و من أجل جريان غير قابل للانضغاط نجد العلاقة الآتية:

$$\iiint_{v} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint_{v} \rho \vec{F} \, dv + \iint_{S} -p \, \vec{n} \, dS$$

و باستعمال نظرية أوستروغرادسكي نجد:

$$\iiint_{v} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint_{v} \rho \vec{F} \, dv - \iiint_{v} \overrightarrow{grad} \, p \, dv$$

أي أنّ:

$$\iiint_{v} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint_{v} \left(\rho \vec{F} - \overrightarrow{grad} \, p\right) dv$$

و منه محلّيا يكون ($v \to 0$):

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{grad} \, p$$

و هي تمثل معادلة أولر التي تُطبّق من أجل الموائع المثالية و هي معادلة شعاعية مكافئة إلى ثلاث معادلات سلّمية.

ب. معادلة برنولي:

انطلاقا من نظرية انحفاظ كمّية الحركة، توصّلنا سابقا إلى معادلة أولر التي تُطبّق من أجل الموائع المثالية. كما أنّ معادلة أولر و في حالة اعتبارنا لوجود حقل الجاذبية الأرضية فقط ($\vec{F} = \vec{g}$) تكتب على الشّكل الآتي:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} \, p$$

و كما رأينا في الفصل الثّاني لدينا:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

و كذلك لدينا:

$$\rho\,\vec{g} = -\overrightarrow{grad}\,(\rho g z)$$

بالتعويض في معادلة أولر نجد:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}\right] = -\overrightarrow{grad}\,(\rho g z) - \overrightarrow{grad}\,p$$

باعتبار أنّ الجريان دائم يكون:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

و منه نجد:

$$\overrightarrow{grad}\,\left(p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}\ \ \ldots\ldots(*)$$

نلاحظ أنّه لحذف عبارة الدوران في الطرف الثّاني من المعادلة (*) يمكن أن نعتبر الحالتين الآتيتين:

- ✓ في حالة ضربنا سُلّميا طرفي المعادلة (*) في عنصر الانتقال $d\vec{l}$ و نكامل المعادلة (*) بين أي نقطتين تقعان على طول نفس خط التيار، و بالتّالي يكون حقل السّرعة موازٍ لعنصر الانتقال $d\vec{l}$ أي أنّ الحد $\left(\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}\right)d\vec{l}$ يكون معدوماً، و منه تكون الكمّية $\left(p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2\right)$ ثابتة في كل نقاط المائع الواقعة على نفس خط التيار و هذا ما يسمّى بنظرية برنولي:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2 = cste$$

- ✓ كذلك في حالة الجريان الغير دوراني كما رأينا سابقا، لدينا $\overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$، في هذه الحالة و حسب المعادلة (*) تكون الكمّية $\left(p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2\right)$ ثابتة في كل نقاط المائع و ذلك طبعا في حالة الجريان الدائم و غير قابل للانضغاط، أي أنّه في هذا النوع من الجريان تكون نظرية برنولي ليست صالحة فقط من أجل نقاط المائع الواقعة على نفس خط التيار بل يمكن تطبيقها من أجل جميع نقاط المائع.

مع التّذكير أنّه لتطبيق معادلة برنولي يجب أن تتوفر الفرضيات الآتية:

- ✔ الجريان الدائم.
- ✔ الجريان الغير قابل للانضغاط.
- ✔ المائع المثالي أي غير اللّزج.
- ✔ قوى الحجم ناتجة عن حقل الجاذبية فقط.

إنّ الكمّية $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2$ تسمّى الشّحنة (مُعبَّر عنها بالباسكال) أو الضّغط الكلّي p_t الذي يتكوّن من ثلاث ضغوط و هي الضّغط السّاكن أو الستاتيكي p، الضّغط الثّقالي $\rho g z$ و الضّغط الدّيناميكي $\frac{1}{2}\rho V^2$.

- **التّفسير الطّاقوي لمعادلة برنولي:**

بشكل عام، إنّ معادلة برنولي تُترجم مبدأ انحفاظ الطّاقة الميكانيكية على طول خط التيّار في إطار جريان المائع المثالي. فلو ضربنا مثلاً كل حد من معادلة برنولي في الحجم $\mathcal{v}$ فإنّ كل حد سيصبح يمثّل بعد للطاقة، أي:

$$p\mathcal{v} + mgz + \frac{1}{2}mV^2 = cste$$

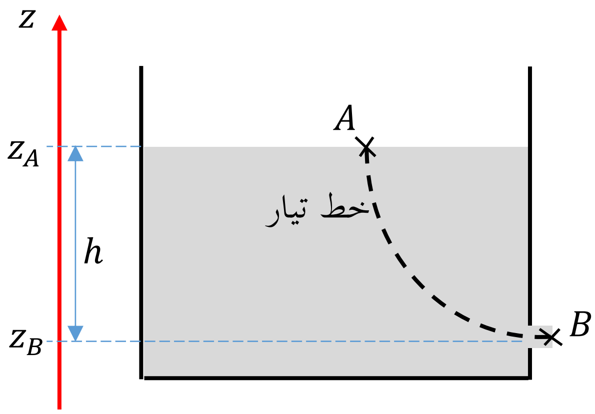
حيث:

- ✔ $p\mathcal{v}$ تمثّل عمل قوى الضّغط و هي تمثّل أيضا الطاقة الكامنة النّاشئة عن قوى الضّغط.
- ✔ mgz تمثّل الطّاقة الكامنة النّاتجة عن قوى الثّقالة.
- ✔ $\frac{1}{2}mV^2$ تمثّل الطّاقة الحركية.

و مجموع هذه الحدود يمثّل الطّاقة الميكانيكية الكلّية E_m و التي بدورها تبقى محفوظة على طول خط التيار من أجل المائع المثالي، و بمعنى آخر أنّه لا يوجد ضياع في الطّاقة ناتج عن لزوجة المائع خلال الجريان.

تطبيق : صيغة توريشلي

نعتبر خزّان يحوي مائع مثالي غير قابل للانضغاط، يتمّ تفريغه من الأسفل عبر فتحة مساحة مقطعها S صغير جدا إذا ما قورن بأبعاد الخزّان كما هو موضح في الشكل (4.3). نريد إيجاد العلاقة بين سرعة التّفريغ أي سرعة المائع عند الفتحة و ارتفاع مستوى المائع عن فتحة التّفريغ.



شكل (4.3)

بتطبيق معادلة برنولي بين النّقطتين A و B الواقعتان على نفس خط التيار كما هو موضّح في الشكل (2.3) نجد:

$$p_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho\, {V_A}^2 = p_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho\, {V_B}^2$$

حيث لدينا:

$V_A \approx 0$ و ذلك راجع لأنّ أبعاد الخزان كبيرة جدا مقارنة بفتحة التفريغ.

الضّغط في النّقطة A يساوي الضّغط في النّقطة B و يساوي الضّغط الجوي $(p_A = p_B = p_{atm})$.

ارتفاع مستوى المائع عن فتحة التفريغ هو $h = z_A - z_B$.

و منه نجد:

$$\frac{1}{2}\rho\, {V_B}^2 = \rho\, g\, h$$

أي أنّ:

$$V_B = \sqrt{2\, g\, h}$$

و هي تمثّل صيغة توريشلي.

4.3. من نظرية انحفاظ كمّية الحركة إلى معادلة نافيير و ستوكس

نعتبر حجم مادّي $\mathcal{v}$ من المائع (يحوي مجموعة معيّنة من جسيمات المائع) محدود بسطح مغلق S و يتبع خلال حركته. و ليكن $\vec{n}$ شعاع الوحدة النّاظم على السّطح و هو شعاع موجّه نحو خارج الحجم $\mathcal{v}$ كما هو موضّح في الشكل (3.3).

إنّ مجموع قوى الحجم الخارجية المطبّقة على الحجم المادّي $\mathcal{v}$ من المائع هي من الشّكل $\iiint_{\mathcal{v}} \rho\, \vec{F}\, d\mathcal{v}$ بحيث إذا اعتبرنا حالة وجود حقل الجاذبية الأرضية فقط يكون $\vec{F} = \vec{g} = -g\, \vec{e}_z$.

و من جهة أخرى، في حالة الموائع الحقيقية أي اللّزجة يكون مجموع قوى السّطح المطبّقة على السّطح S المحيط بالحجم $\mathcal{v}$ هي من الشّكل $\iint_S \vec{T}\, dS$ حيث $\vec{T}$ يمثّل الاجهاد المطبّق على السّطح ذو النّاظم $\vec{n}$.

إذن حسب نظرية انحفاظ كمّية الحركة لدينا:

$$\iiint_{\mathcal{v}} \frac{d(\rho\, \vec{V})}{dt} d\mathcal{v} = \iiint_{\mathcal{v}} \rho\, \vec{F}\, d\mathcal{v} + \iint_S \vec{T}\, dS$$

و من أجل جريان غير قابل للانضغاط نجد العلاقة الآتية:

$$\iiint_{\mathcal{v}} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\mathcal{v} = \iiint_{\mathcal{v}} \rho \vec{F}\, d\mathcal{v} + \iint_{S} \vec{T}\, dS$$

كذلك يمكن أن نكتب هذه المعادلة بشكل آخر (ترميز أينشتاين):

$$\iiint_{\mathcal{v}} \rho \frac{dV_i}{dt} d\mathcal{v} = \iiint_{\mathcal{v}} \rho F_i\, d\mathcal{v} + \iint_{S} T_i\, dS$$

كما رأينا سابقا لدينا $T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ حيث σ_{ij} تمثل الإجهادات الوحدوية، و منه يكون:

$$\iiint_{\mathcal{v}} \rho \frac{dV_i}{dt} d\mathcal{v} = \iiint_{\mathcal{v}} \rho F_i\, d\mathcal{v} + \iint_{S} \sigma_{ij} \cdot n_j\, dS$$

و باستعمال نظرية أوستروغرادسكي نجد:

$$\iiint_{\mathcal{v}} \rho \frac{dV_i}{dt} d\mathcal{v} = \iiint_{\mathcal{v}} \rho F_i\, d\mathcal{v} + \iiint_{\mathcal{v}} div(\sigma_{ij})\, d\mathcal{v}$$

و منه محليا يكون ($\mathcal{v} \to 0$):

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho F_i + div(\sigma_{ij})$$

كذلك يمكن أن نكتب هذه المعادلة على الشّكل التالي:

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

في حالة الموائع النيوتونية لدينا:

$$\sigma_{ij} = -p\, \delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\, div\, \vec{V} \cdot \delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

حيث:

p يمثل الضّغط السّاكن.

δ_{ij} يمثل رمز كرونيكر: $\delta_{ij} = 1$ إذا كان $i = j$، و $\delta_{ij} = 0$ إذا كان $i \neq j$.

μ تمثل معامل اللّزوجة الدّيناميكية.

و منه بتعويض عبارة σ_{ij} في معادلة التّحريك نجد:

$$\rho\frac{dV_i}{dt}=\rho\,F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(div\,\vec{V}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i\partial x_j}\right)$$

مع العلم أنّه في حالة الجريان الغير قابل للانضغاط و حسب معادلة الاستمرارية لدينا:

$$div\,\vec{V}=\frac{\partial V_k}{\partial x_k}=0$$

و منه نجد:

$$\rho\frac{dV_i}{dt}=\rho\,F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j\partial x_j}\right)$$

أو نكتب بشكل آخر:

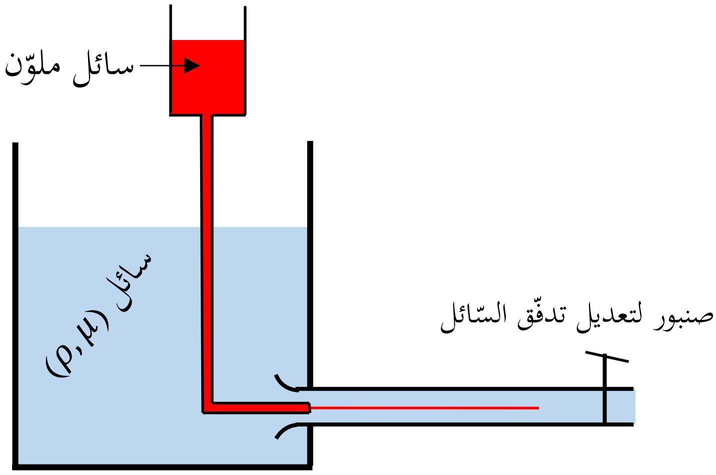
$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho\,\vec{F}-\overrightarrow{grad}\,p+\mu\,\Delta\vec{V}$$

و هي تمثل معادلة نافيير و ستوكس و هي معادلة شعاعية مكافئة إلى ثلاث معادلات سلّمية و التي تطبّق من أجل الموائع الحقيقية.

الفصل الرّابع – الجريان الرّقائقي و الجريان المضطرب

1.4. تجربة رينولدز

إنّ دراسة جريان المائع الحقيقي تعود إلى حل معادلة نافيير و ستوكس. و لحل هذه المعادلة تحليليا، نميّز نوعين من أنظمة الجريان و هما الجريان الرّقائقي و الجريان المضطرب. للكشف عن أنظمة الجريان، قام رينولدز بتحقيق تجربة تظهر خطوط التيار و ذلك بواسطة خط رفيع مُلوّن ناتج من مادّة سائلة مُلوّنة داخل أنبوب زجاجي أفقي كما هو موضّح في الشكل (1.4).



شكل (1.4)

من خلال هذه التجربة استطاع رينولدز بتحديد العامل الذي يسمح بتحديد نظام الجريان رقائقي أم مضطرب و هو رقم لا بعدي يسمّى رقم رينولدز و يرمز له بـ Re و هو يمثّل النّسبة بين قوى العطالة و قوى اللّزوجة و عبارته تعطى كالآتي :

$$Re = \frac{\rho\, V\, D}{\mu}$$

أو:

$$Re = \frac{V\ D}{\nu}$$

حيث:

ρ تمثّل الكتلة الحجمية للمائع.

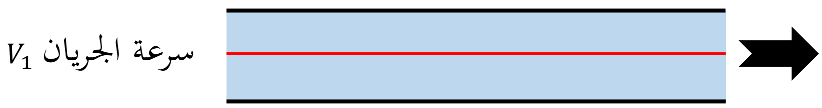
V تمثّل السّرعة المتوسّطة.

D يمثّل قطر الأنبوب.

μ يمثّل معامل اللّزوجة الدّيناميكية.

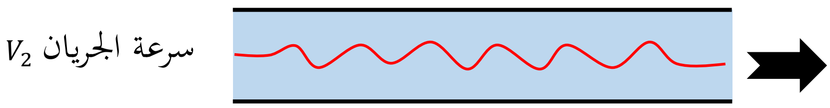
ν يمثّل معامل اللّزوجة الحركية.

- فمن أجل جريان للمائع داخل الأنبوب سرعته V_1 صغيرة كفاية، الخط الرفيع الملوّن يبقى رقيق منتظم و موازٍ لمحور الأنبوب كما هو موضّح في الشكل (2.4). هذا الجريان يسمّى جريان رقائقي أو صفائحي و يتميّز بـ $Re \leq 2000$ تقريبا. في هذا الجريان قوى اللّزوجة لها أهمّية كبرى مقارنة بقوى العطالة.



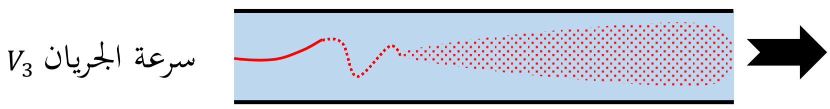
شكل (2.4)

- و من أجل جريان للمائع داخل الأنبوب سرعته V_2 أكبر بقليل من V_1، الخط الملوّن يضطرب و يهتز كما هو موضّح في الشكل (3.4). هذا الجريان يسمّى جريان مضطرب و نجده تقريبا في المجال $2000 < Re \leq 10^5$. في هذا الجريان أيضا قوى اللّزوجة لها أهمّية مقارنة بقوى العطالة.



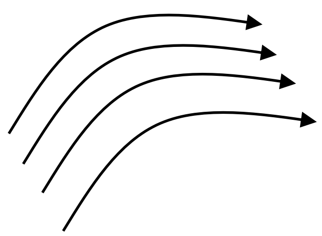
شكل (3.4)

- و من أجل جريان للمائع داخل الأنبوب سرعته V_3 أكبر من V_2، الخط الملون يتشتت و ينقسم إلى عدد كبير من الجزيئات كما هو موضح في الشكل (4.4). هذا الجريان يسمّى أيضا جريان مضطرب و نجده تقريبا من أجل $Re > 10^5$. إنّ هذا الاضطراب ينشأ عندما تكون قوى اللّزوجة مهملة مقارنة بقوى العطالة.

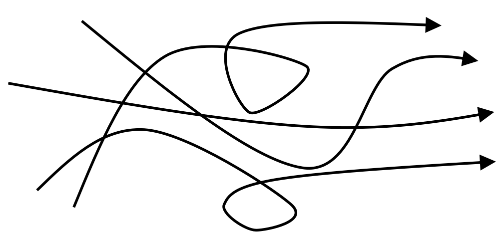


شكل (4.4)

بصفة عامة يتميّز الجريان الرّقائقي عن الجريان المضطرب بعدّة ميزات و من بينها أنّ خطوط التيار تكون متوازية و منتظمة بالنسبة للجريان الرّقائقي و هذا ما لا نجده في الجريان المضطرب حيث تكون خطوط التيار غير منتظمة أو لا وجود لها كما هو موضّح في الشكلين (5.4) و (6.4).



شكل (5.4): الجريان الرّقائقي



شكل (6.4): الجريان المضطرب

2.4. الجريان الرّقائقي

أ. الجريان الرّقائقي أحادي الاتّجاه:

نعتبر جريان رقائقي و دائم لمائع لزج غير قابل للانضغاط. إذن انطلاقا من معادلة نافيير و ستوكس و في حالة اعتبارنا لوجود حقل الجاذبية الأرضية ($\vec{F} = \vec{g}$) يكون لدينا:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\, \vec{g} - \overrightarrow{grad}\, p + \mu\, \Delta\vec{V}$$

أو نكتب بشكل آخر:

$$\rho \left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}\right] = \rho\, \vec{g} - \overrightarrow{grad}\, p + \mu\, \Delta\vec{V}$$

بما أن الجريان دائم فإنّ المشتقة $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ تكون معدومة. كذلك الجداء $\overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$ في هذه المعادلة يكون معدوماً إذا تمّ اعتبار المعادلة على مجموعة النّقاط المشكّلة لخط التيار. و من جهة أخرى، تسارع الجاذبية الأرضية هو مشتق من كمون. و منه فإنّ معادلة نافيير و ستوكس في هذه الحالة تصبح على الشكل:

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) = -\overrightarrow{grad}\,(\rho\, g\, z) - \overrightarrow{grad}\, p + \mu\, \Delta\vec{V}$$

أي أنّ:

$$\overrightarrow{grad}\left(p + \rho\, g\, z + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\, \Delta\vec{V}$$

كما رأينا سابقا لدينا:

$$p_t = p + \rho\, g\, z + \frac{1}{2}\rho V^2$$

حيث p_t يمثل الضغط الكلي أو الشحنة.

و منه يكون:

$$\overrightarrow{grad}\, p_t = \mu\, \Delta\vec{V}$$

باعتبار أنّ الجريان رقائقي و أحادي الاتّجاه و موازٍ للمحور x، إذن بإسقاط العلاقة الأخيرة على محاور المعلم الكارتيزي نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_t}{\partial x} = \mu\, \Delta u \cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{\partial p_t}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ \dfrac{\partial p_t}{\partial z} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

لدينا من العلاقة (2): $\frac{\partial p_t}{\partial y} = 0$ و منه نستنتج أنّ الضّغط الكلّي p_t لا يتعلّق بـ y.

كذلك لدينا من العلاقة (3): $\frac{\partial p_t}{\partial z} = 0$ و منه نستنتج أنّ الضّغط الكلّي p_t لا يتعلّق بـ z.

و منه نستنتج أنّ الضّغط الكلّي p_t لا يتعلّق إلا بـ x، أي أنّ:

$$\frac{\partial p_t}{\partial x} = \frac{dp_t}{dx}$$

و منه و حسب المعادلة (1) يكون:

$$\frac{dp_t}{dx} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

و من جهة أخرى و حسب معادلة الاستمرارية من أجل جريان غير قابل للانضغاط لدينا:

$$div\, \vec{V} = 0$$

أي أنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

مع العلم أنّ $v = w = 0$ و ذلك لأن الجريان أحادي الاتّجاه و موازٍ للمحور المحور x، و منه يكون:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

و هذا يعني أنّ مركّبة السّرعة u لا تتعلّق إلا ب x، أي أنّ:

$$u = u(y, z)$$

و منه نتحصّل على المعادلة الآتية:

$$\frac{dp_t}{dx} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

إنّ الطّرف الأوّل من المعادلة الأخيرة لا يتعلق إلا ب x بينما الطّرف الثّاني لا يتعلّق إلا ب y و z و منه نستنتج أنّ الضّغط الكلّي يتغيّر خطّيا مع x، أي أنّ:

$$\frac{dp_t}{dx} = cste$$

و بما أنّه منطقيا الضّغط الكلّي يتناقص في اتّجاه الجريان بسبب الاحتكاكات، أي أنّ:

$$\frac{dp_t}{dx} < 0$$

إذن نضع: $\frac{dp_t}{dx} = -a$ حيث a ثابت موجب.

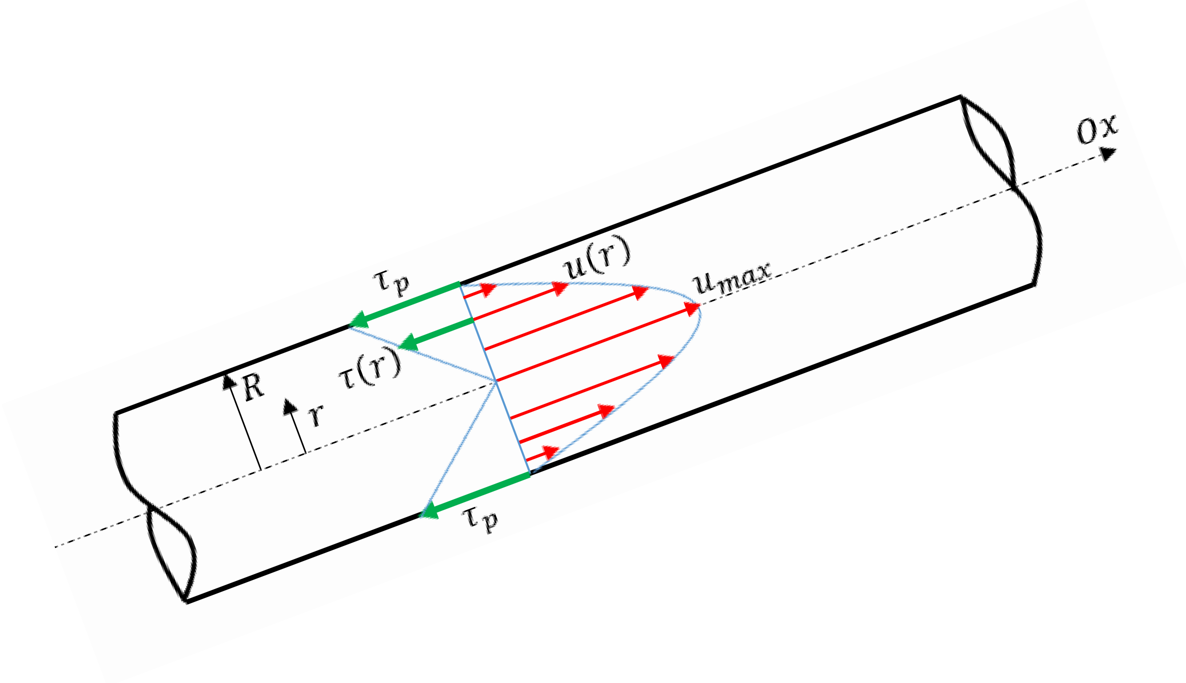
و منه المعادلة (1) تصبح على الشّكل:

$$\Delta u = -\frac{a}{\mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

إنّ حل المعادلة (*) تسمح لنا بإيجاد عبارة توزيع السّرعة u من أجل كل جريان أحادي الاتّجاه وفق المحور x.

ب. حالة الجريان الرّقائقي داخل أنبوب أسطواني:

نعتبر جريان رقائقي و دائم لمائع لزج غير قابل للانضغاط داخل أنبوب نصف قطره R. سنهتم في دراستنا هذه فقط بالجريان أحادي الاتّجاه الموازي لمحور الأنبوب Ox كما هو موضح في الشكل (7.4)، و هو ما يسمّى بجريان بوازاي الأسطواني.



شكل (7.4): الجريان الرّقائقي داخل أنبوب أسطواني

إذن كما في حالة الجريان أحادي الاتّجاه لدينا:

$$\Delta u = -\frac{a}{\mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; (*)$$

باستعمال الاحداثيات الأسطوانية يكون :

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

لدينا الجريان أحادي الاتّجاه وفق المحور x أي أنّ $\vec{V} = u \cdot \vec{e}_x$ و بالتالي $v_r = v_\varphi = 0$.

كذلك باستعمال الاحداثيات الأسطوانية و حسب معادلة الاستمرارية بالنّسبة لجريان غير قابل للانضغاط لدينا:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

الجريان أحادي الاتّجاه، أي أنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

و من جهة أخرى، كذلك الجريان متماثل وفق φ إذن :

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$$

و منه يكون $u(r,\varphi,x)=u(r)$.

إذن عبارة Δu تصبح على الشّكل:

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

و بالتّعويض في المعادلة (*) نجد:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{a}{\mu}$$

أي أنّ:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=-\frac{a}{\mu}\,r$$

بالمكاملة نجد:

$$r\frac{du}{dr}=-\frac{a}{2\mu}\,r^2+B$$

و منه:

$$\frac{du}{dr} = -\frac{a}{2\mu}\, r + \frac{B}{r}$$

بالمكاملة مرّة أخرى نجد:

$$u(r) = -\frac{a}{4\mu}\, r^2 + B \ln r + C$$

حيث B و C ثابتين يمكن تحديدهم باستعمال الشّروط الحدّية و ذلك كالآتي:

عند محور الأنبوب ($r = 0$) قيمة السّرعة تكون محدودة و منه حسب عبارة السّرعة حتماً: $B = 0$.

عند سطح التّلامس بين المائع و الأنبوب ($r = R$) يكون المائع غير متحرّك و بالتّالي سرعته معدومة أي: $u(R) = 0$، و منه بالتّعويض في عبارة السّرعة نجد : $C = \frac{a\,R^2}{4\,\mu}$

و أخيرا تكون عبارة توزيع السّرعة لهذا الجريان داخل الأنبوب كالآتي:

$$u(r) = -\frac{a\,R^2}{4\,\mu}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)$$

و هي تمثّل معادلة قطع مكافئ.

- **إيجاد عبارة السّرعة العظمى للجريان u_{max} :**

إنّ نصف القطر r_{max} الذي تكون عنده السّرعة أعظمية يحقق:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=r_{max}} = 0$$

و منه يكون:

$$r_{max} = 0$$

أي أنّ السّرعة تكون أعظمية عند محور الأنبوب كما هو موضّح في الشكل (7.4).

بالتعويض في عبارة $u(r)$ نجد عبارة السّرعة الأعظمية u_{max}:

$$u_{max} = \frac{a\,R^2}{4\,\mu}$$

إذن يمكن أن نكتب كذلك عبارة توزيع السّرعة بدلالة السّرعة العظمى للجريان كالآتي:

$$u(r) = u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

- **إيجاد عبارة إجهاد القص τ:**

لدينا من أجل مائع نيوتوني:

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

و منه:

$$\tau = \mu \frac{d}{dr}\left[-\frac{a\,R^2}{4\,\mu}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)\right]$$

و منه تكون عبارة إجهاد القص لهذا الجريان على الشّكل:

$$\tau = -\frac{a}{2} r$$

أي أنّه يتغيّر خطّيا مع r كما هو موضّح في الشكل (7.4).

- **إيجاد عبارة قوّة الاحتكاك المطبّقة على الأنبوب ذو الطول L:**

إنّ قوّة الاحتكاك المطبّقة على الأنبوب ذو الطّول L تعطى بالعلاقة:

$$F_f = \tau_p \cdot S_L$$

حيث:

τ_p يمثل إجهاد القص عند الجدار أي عند $r = R$:

$$\tau_p = -\frac{a}{2} R$$

S_L يمثل مساحة السّطح الدّاخلي للأنبوب ذو الطول L و الملامس للمائع:

$$S_L = 2\pi R\, L$$

و منه تكون عبارة الاحتكاك المطبّقة على الأنبوب ذو الطول L كالآتي:

$$F_f = -a\,\pi R^2\,L$$

- **إيجاد عبارة التدفّق الحجمي q_v:**

من خلال التّعريف، إنّ التدفّق الحجمي للمائع الذي يجري داخل الأنبوب الذي مساحة مقطعه S يعطى كالآتي:

$$q_v = \iint_S \vec{V}\,d\vec{S}$$

لكن لدينا $\vec{V} = u\,\vec{e}_x$ و $d\vec{S} = dS\,\vec{e}_x$، إذن بالتّعويض يكون:

$$q_v = \iint_S (u\,\vec{e}_x)\,(dS\,\vec{e}_x)$$

و منه:

$$q_v = \iint_S u\,dS$$

حيث عنصر السطح dS يعطى كالآتي:

$$dS = r\,dr\,d\varphi$$

بالتّعويض في عبارة q_v نجد:

$$q_v = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[-\frac{a\,R^2}{4\,\mu}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)\right] r\,dr\,d\varphi$$

و منه:

$$q_v = -\frac{a\,R^2}{4\,\mu}\int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^{R}\left(\frac{r^3}{R^2}-r\right)dr$$

أي أنّ:

$$q_v = -\frac{a\,R^2}{4\,\mu}(2\pi)\left[\frac{r^4}{4R^2}-\frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

و بالتّالي:

$$q_v = -\frac{\pi\ a\ R^2}{2\ \mu}\left(\frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right)$$

و أخيرا تكون عبارة التدفق الحجمي لهذا الجريان كالآتي:

$$q_v = \frac{\pi\ a\ R^4}{8\ \mu}$$

- **إيجاد عبارة السّرعة المتوسّطة u_{moy}:**

لدينا العلاقة التي تربط بين التدفّق الحجمي و السّرعة المتوسّطة تعطى كالآتي:

$$q_v = u_{moy} \cdot S$$

و منه:

$$u_{moy} = \frac{q_v}{S}$$

حيث $S = \pi R^2$ و هي تمثل مساحة مقطع الأنبوب.

بالتّعويض في عبارة u_{moy} نجد:

$$u_{moy} = \frac{\left(\frac{\pi\ a\ R^4}{8\ \mu}\right)}{\pi R^2}$$

و أخيرا تكون عبارة السّرعة المتوسّطة لهذا الجريان داخل الأنبوب كالآتي:

$$u_{moy} = \frac{a\ R^2}{8\ \mu}$$

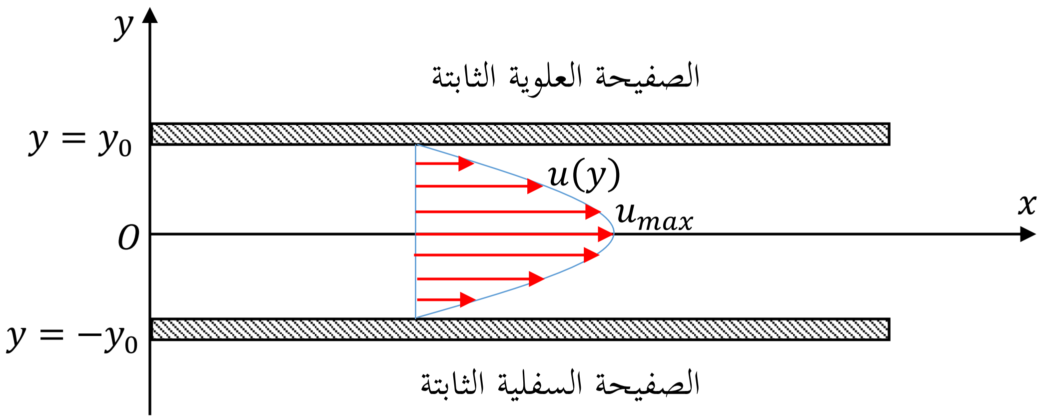
و بدلالة السّرعة العظمى تكون:

$$u_{moy} = \frac{1}{2} u_{max}$$

ج. حالة الجريان الرّقائقي بين صفيحتين مستويتين و متوازيتين:

ج.1. جريان بوازاي المستوي:

نعتبر جريان رقائقي و دائم لمائع لزج غير قابل للانضغاط بين صفيحتين مستويتين متوازيتين و ثابتتين تفصلهما مسافة قدرها $2y_0$. سنهتم هنا فقط بدراسة الجريان أحادي الاتّجاه و الموازي للمحور Ox كما هو موضّح في الشكل (8.4). علما أنّ هذا الجريان هو ناتج عن تدرّج في الضّغط وفق Ox و هو ما يسمّى بجريان بوازاي المستوي.



شكل (8.4): جريان بوازاي الرّقائقي المستوي

إذن كما في حالة الجريان أحادي الاتّجاه لدينا:

$$\Delta u = -\frac{a}{\mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (*)$$

في دراستنا هنا التي تخص الجريان الرّقائقي بين صفيحتين مستويتين و متوازيتين، نستعمل الاحداثيات الكارتيزية ومنه يكون :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{a}{\mu}$$

لدينا الجريان أحادي الاتّجاه و موازٍ للمحور x أي أنّ $\vec{V}=u\cdot\vec{e}_x$ و بالتّالي $v=w=0$.

كذلك كما رأينا سابقا حسب معادلة الاستمرارية بالنّسبة لجريان غير قابل للانضغاط يكون لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

و منه:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

و كذلك الجريان متماثل وفق z إذن :

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

و منه يكون $u(x,y,z)=u(y)$.

و بالتّالي المعادلة (*) تصبح على الشكل:

$$\frac{d^2 u}{dy^2}=-\frac{a}{\mu}$$

بالمكاملة نجد:

$$\frac{du}{dy}=-\frac{a}{\mu}\ y+B$$

بالمكاملة مرّة أخرى نجد:

$$u(y)=-\frac{a}{2\mu}\ y^2+B\ y+C$$

حيث B و C ثابتين يمكن تحديدهم باستعمال الشّروط الحدّية الآتية:

$$\begin{cases} u(y = y_0) = 0 \\ u(y = -y_0) = 0 \end{cases}$$

و منه نتحصّل على المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2\mu}\, {y_0}^2 + B\, y_0 + C = 0 \\ -\dfrac{a}{2\mu}\, {y_0}^2 - B\, y_0 + C = 0 \end{cases}$$

إنّ حل جملة المعادلتين هذه يعطي:

$$B = 0$$

$$C = \frac{a}{2\mu} {y_0}^2$$

و منه بالتّعويض في عبارة توزيع السّرعة نجد:

$$u(y) = \frac{a\, {y_0}^2}{2\, \mu}\left(1 - \frac{y^2}{{y_0}^2}\right)$$

و هي تمثل معادلة قطع مكافئ.

- **إيجاد عبارة السّرعة العظمى للجريان u_{max}** :

إنّ التّرتيبة y_{max} التي تكون عندها السّرعة أعظمية تحقّق:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y = y_{max}} = 0$$

و منه يكون:

$$y_{max} = 0$$

أي أنّ السّرعة تكون أعظمية عند منتصف المسافة الفاصلة بين الصّفيحتين كما هو موضح في الشكل (8.4).

بالتّعويض في عبارة $u(y)$ نجد عبارة السّرعة الأعظمية u_{max}:

$$u_{max} = \frac{a\,{y_0}^2}{2\,\mu}$$

إذن يمكن أن نكتب كذلك عبارة توزيع السّرعة بدلالة السّرعة العظمى للجريان كالآتي:

$$u(r) = u_{max}\left(1 - \frac{y^2}{{y_0}^2}\right)$$

- **إيجاد عبارة إجهاد القص $\boldsymbol{\tau}$:**

لدينا من أجل مائع نيوتوني:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

و منه:

$$\tau = \mu\frac{d}{dy}\left[\frac{a\,{y_0}^2}{2\,\mu}\left(1 - \frac{y^2}{{y_0}^2}\right)\right]$$

و منه تكون عبارة إجهاد القص لهذا الجريان على الشكل:

$$\tau = -a\,y$$

أي أنّ إجهاد القص يتغيّر خطيا مع y.

- **إيجاد عبارة التدفق الحجمي $\boldsymbol{q_v}$:**

من خلال التّعريف، إنّ التدفّق الحجمي للمائع هو:

$$q_v = \iint_S \vec{V}\, d\vec{S}$$

لكن لدينا $\vec{V} = u\,\vec{e}_x$ و $d\vec{S} = dS\,\vec{e}_x$، إذن بالتّعويض يكون:

$$q_v = \iint_S (u\,\vec{e}_x)\,(dS\,\vec{e}_x)$$

و منه:

$$q_v = \iint_S u\, dS$$

حيث عنصر السطح dS يعطى كالآتي:

$$dS = dy\, dz$$

بالتّعويض في عبارة q_v نجد:

$$q_v = \int_0^1 \int_{-y_0}^{y_0} \left[\frac{a\, {y_0}^2}{2\,\mu}\left(1 - \frac{y^2}{{y_0}^2}\right)\right] dy\, dz$$

و منه:

$$q_v = \frac{a\, {y_0}^2}{2\,\mu} \int_0^1 dz \int_{-y_0}^{y_0} \left(1 - \frac{y^2}{{y_0}^2}\right) dy$$

أي أنّ:

$$q_v = \frac{a\, {y_0}^2}{2\,\mu} \cdot (1) \left[y - \frac{y^3}{3{y_0}^2}\right]_{-y_0}^{y_0}$$

و بالتّالي:

$$q_v = \frac{a\, {y_0}^2}{2\,\mu}\left(2y_0 - \frac{2}{3}\, y_0\right)$$

و أخيرا تكون عبارة التدفّق الحجمي لهذا الجريان في وحدة عرض الصّفيحة كالآتي:

$$q_v = \frac{2}{3}\frac{a\,{y_0}^3}{\mu}$$

- **إيجاد عبارة السّرعة المتوسّطة $\boldsymbol{u_{moy}}$:**

لدينا العلاقة التي تربط بين التدفّق الحجمي و السّرعة المتوسّطة تعطى كالآتي:

$$q_v = u_{moy} \cdot S$$

و منه:

$$u_{moy} = \frac{q_v}{S}$$

حيث:

$$S = 2y_0 \cdot 1 = 2y_0$$

بالتّعويض في عبارة u_{moy} نجد:

$$u_{moy} = \frac{\left(\frac{2}{3}\frac{a\,{y_0}^3}{\mu}\right)}{2y_0}$$

و أخيرا تكون عبارة السّرعة المتوسّطة لهذا الجريان كالآتي:

$$u_{moy} = \frac{a\,{y_0}^2}{3\,\mu}$$

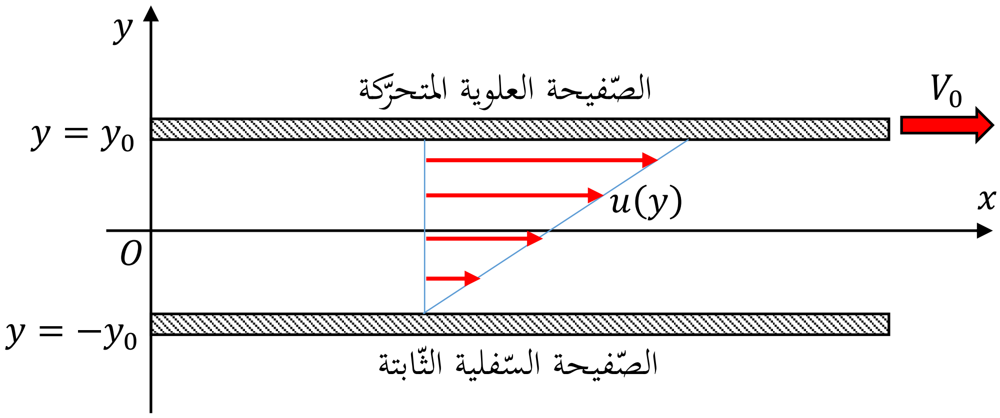
و بدلالة السّرعة العظمى تكون:

$$u_{moy} = \frac{2}{3}u_{max}$$

ج.2. جريان كويت:

يختلف جريان كويت عن جريان بوازاي المستوي في كون الصّفيحة الأفقية السّفلى ثابتة بينما الصّفيحة العليا تتحرّك أفقيا بسرعة ثابتة V_0 كما هو موضح في الشكل (9.4)، أي أنّ جريان المائع هو ناتج من

حركة الصفيحة العلوية و يكون تدرّج الضّغط وفق المحور Ox معدوم أي أنّه يكون $\frac{dp_t}{dx} = 0$، و هو ما يسمّى بجريان كويت.



شكل (9.4): جريان كويت الرّقائقي المستوي

و منه كما في حالة جريان بوازاي المستوي، عبارة توزيع السّرعة تكون كالآتي:

$$u(y) = -\frac{a}{2\mu}\, y^2 + B\, y + C$$

حيث:

$$a = -\frac{dp_t}{dx} = 0$$

و منه يكون:

$$u(y) = B\, y + C$$

حيث B و C ثابتين يمكن تحديدهم باستعمال الشّروط الحدّية الآتية:

$$\begin{cases} u(y = y_0) = V_0 \\ u(y = -y_0) = 0 \end{cases}$$

و منه نتحصّل على المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} B\,y_0 + C = V_0 \\ -B\,y_0 + C = 0 \end{cases}$$

إنّ حل جملة المعادلتين هذه يعطي:

$$B = \frac{V_0}{2y_0}$$

$$C = \frac{V_0}{2}$$

و منه في هذا النّوع من الجريان تكون عبارة توزيع السّرعة كالآتي:

$$u(y) = \frac{V_0}{2}\left(\frac{y}{y_0} + 1\right)$$

و هي تمثّل معادلة خط مستقيم.

- **إيجاد عبارة التدفّق الحجمي q_v:**

يمكن إيجاد التدفّق الحجمي لهذا الجريان كالآتي:

$$q_v = \iint_S \vec{V}\,d\vec{S}$$

لكن لدينا $\vec{V} = u\,\vec{e}_x$ و $d\vec{S} = dS\,\vec{e}_x$، بالتّعويض يكون:

$$q_v = \iint_S (u\,\vec{e}_x)\,(dS\,\vec{e}_x)$$

و منه:

$$q_v = \iint_S u\,dS$$

حيث عنصر السّطح dS يعطى كالآتي:

$$dS = dy\,dz$$

بالتّعويض في عبارة q_v نجد:

$$q_v = \int_0^1 \int_{-y_0}^{y_0} \left[\frac{V_0}{2}\left(\frac{y}{y_0}+1\right)\right] dy\, dz$$

و منه:

$$q_v = \frac{V_0}{2}\int_0^1 dz \int_{-y_0}^{y_0} \left(\frac{y}{y_0}+1\right) dy$$

أي أنّ:

$$q_v = \frac{V_0}{2}\cdot(1)\left[\frac{y^2}{2\,y_0}+y\right]_{-y_0}^{y_0}$$

و بالتالي:

$$q_v = \frac{V_0}{2}(2y_0)$$

و أخيرا تكون عبارة التدفّق الحجمي لهذا الجريان في وحدة عرض الصّفيحة كالآتي:

$$q_v = V_0\, y_0$$

- **إيجاد عبارة السّرعة المتوسّطة u_{moy}:**

لدينا العلاقة التي تربط بين التدفّق الحجمي و السّرعة المتوسّطة تعطى كالآتي:

$$q_v = u_{moy}\cdot S$$

و منه:

$$u_{moy} = \frac{q_v}{S}$$

حيث:

$$S = 2y_0 \cdot 1 = 2y_0$$

بالتّعويض في عبارة u_{moy} نجد:

$$u_{moy} = \frac{(V_0\, y_0)}{2y_0}$$

و أخيرا تكون عبارة السّرعة المتوسّطة لهذا الجريان كالآتي:

$$u_{moy} = \frac{V_0}{2}$$

علما أنّ السّرعة العظمى لهذا الجريان هي مساوية لسرعة الصفيحة العليا V_0 و بالتالي تكون عبارة السّرعة المتوسّطة بدلالة السّرعة العظمى كالآتي:

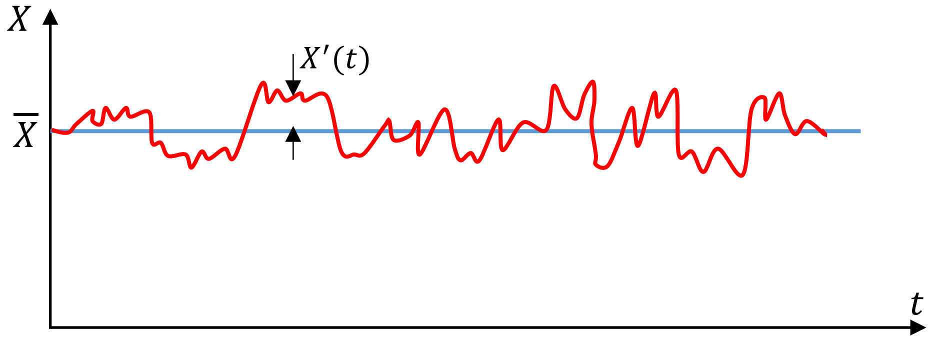
$$u_{moy} = \frac{1}{2} u_{max}$$

3.4. الجريان المضطرب

أ. تفكيك رينولدز:

إنّ الجريان المضطرب كما رأينا يتميّز بالقيم الكبيرة لرقم رينولدز. و في هذه الحالة، هناك بديل و هو التّركيز فقط على القيم المتوسّطة لجميع المجاهيل بحيث نقوم بإدخال مؤثر القيمة المتوسّطة على مجموعة المعادلات بتطبيق "تفكيك رينولدز" على المجاهيل في المسألة و المعادلات الجديدة المتحصل عليها نطلق عليها المعادلات بالقيمة المتوسّطة. في الجريان المضطرب، تعتمد الطّريقة المقترحة من طرف رينولدز على تفكيك كل مجهول أو متغيّر X (السّرعة، الضّغط، الكتلة الحجمية ...) إلى جزء متوسّط $\overline{X}$ لا يتعلق بالزمن و جزء متذبذب X' متعلّق بالزّمن (لاحظ الشكل 10.4) بحيث يمكن كتابة:

$$X = \overline{X} + X'$$



شكل (10.4)

مع العلم أنّه خلال مدّة زمنية طويلة كفاية مثلاً T تصبح الفرضية $\overline{X'} = 0$ مبرّرة، بالفعل لدينا:

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\int_0^T X\, dt$$

و منه باستعمال تفكيك رينولدز يكون:

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\int_0^T (\overline{X} + X')\, dt$$

أي أنّ:

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \overline{X}\, dt + \int_0^T X'\, dt\right)$$

أيضا يمكن أن نكتب:

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\overline{X}\int_0^T dt + \frac{1}{T}\int_0^T X'\, dt$$

أو نكتب:

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\overline{X}\, T + \overline{X'}$$

إذن:

$$\overline{X} = \overline{X} + \overline{X'}$$

و منه نستنتج أنّ :

$$\overline{X'} = 0$$

و هذه بعض خصائص مؤثر القيمة المتوسّطة باستعمال تفكيك رينولدز:

$\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}$	$\overline{\overline{X}} = \overline{X}$
$\overline{\dfrac{\partial X}{\partial x}} = \dfrac{\partial \overline{X}}{\partial x}$	$\overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}} = \overline{X}\cdot\overline{Y}$
$\overline{\int X\,dx} = \int \overline{X}\,dx$	$\overline{X'\cdot\overline{Y}} = 0$
$\overline{X\cdot Y} \neq \overline{X}\cdot\overline{Y}$	$\overline{X\cdot Y} = \overline{X}\cdot\overline{Y} + \overline{X'\cdot Y'}$
$\overline{X'\cdot Y'} \neq \overline{X'}\cdot\overline{Y'}$	$\overline{\alpha X} = \alpha\,\overline{X}$ $\quad :\alpha = cste$

ب. معادلة الاستمرارية بالقيمة المتوسّطة:

نريد هنا إيجاد معادلة الاستمرارية بالقيمة المتوسّطة و ذلك من أجل جريان مضطرب غير قابل للانضغاط. في هذه الحالة لدينا:

$$div\,\vec{V} = 0$$

أي أنّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

بتطبيق تفكيك رينولدز بالنسبة للمجاهيل في المعادلة نجد:

$$\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v}+v')}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w}+w')}{\partial z} = 0$$

بإدخال مؤثر القيمة المتوسّطة على هذه المعادلة نجد:

$$\overline{\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{v}+v')}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{w}+w')}{\partial z}}=0$$

و منه حسب خصائص مؤثر القيمة المتوسّطة نجد:

$$\frac{\partial\left(\overline{u}+\overline{u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{v}+\overline{v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overline{w}+\overline{w'}\right)}{\partial z}=0$$

حيث كما رأينا سابق، لدينا $\overline{X'}=0$ أي أنّ: $\overline{u'}=\overline{v'}=\overline{w'}=0$، و منه يكون:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}=0$$

و هي تمثل معادلة الاستمرارية بالقيمة المتوسّطة من أجل جريان مضطرب غير قابل للانضغاط.

ج. معادلة نافيير و ستوكس بالقيمة المتوسّطة:

نريد هنا إيجاد معادلة نافيير و ستوكس بالقيمة المتوسّطة و ذلك من أجل جريان مضطرب غير قابل للانضغاط. باستعمال الاحداثيات الكارتيزية، نقوم بإسقاط معادلة نافيير و ستوكس على المحور x فيكون:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

بتطبيق تفكيك رينولدز على المجاهيل في المعادلة نجد:

$$\rho\left[\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial t}+(\overline{u}+u')\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial x}+v\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial y}+w\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial z}\right]$$
$$=-\frac{\partial(\overline{p}+p')}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2(\overline{u}+u')}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\overline{u}+u')}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\overline{u}+u')}{\partial z^2}\right]$$

و منه يكون:

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y}+v'\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\overline{w}\frac{\partial u'}{\partial z}+w'\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+w'\frac{\partial u'}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}-\frac{\partial p'}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2u'}{\partial z^2}\right)$$

و بإدخال مؤثر القيمة المتوسّطة على هذه المعادلة نجد:

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u'}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u'}}{\partial x}+\overline{u'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u'}}{\partial y}+\overline{v'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u'}}{\partial z}+\overline{w'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}-\frac{\partial\overline{p'}}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u'}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u'}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\overline{u'}}{\partial z^2}\right)$$

حيث كما رأينا سابق المقدار لدينا $\overline{X'}=0$ أي أنّ: $\overline{u'}=\overline{v'}=\overline{w'}=0$ و $\overline{p'}=0$، و كذلك لدينا $\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}=0$ و منه يكون:

$$\rho\left(\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}+\overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right)\;\cdots\cdots\cdots\cdots\;(I)$$

ومن جهة أخرى لدينا: $\frac{\partial(u'v')}{\partial y}=u'\frac{\partial v'}{\partial y}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}$

و حسب معادلة الاستمرارية يكون: $\frac{\partial(u'v')}{\partial y}=u'\left(-\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial w'}{\partial z}\right)+v'\frac{\partial u'}{\partial y}$

و منه نجد:

$$v'\frac{\partial u'}{\partial y}=\frac{\partial(u'v')}{\partial y}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial w'}{\partial z}$$

و بالتّعويض في العلاقة (I) نجد:

$$\rho\left(\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+2\,\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\frac{\overline{\partial(u'v')}}{\partial y}+\frac{\overline{\partial(u'w')}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right)$$

أي أنّ:

$$\rho\left(\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\left(\mu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}-2\rho\,\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}\right)+\left(\mu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}-\rho\frac{\overline{\partial(u'v')}}{\partial y}\right)+\left(\mu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}-\rho\frac{\overline{\partial(u'w')}}{\partial z}\right)$$

و منه يكون:

$$\rho\left(\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}-\rho\,\overline{u'^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}-\rho\,\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}-\rho\,\overline{u'w'}\right)$$

بنفس الطريقة نقوم بإسقاط معادلة نافيير و ستوكس على المحورين y و z فتحصل على جملة المعادلات السلّمية الآتية:

$$\begin{cases}\rho\left(\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}-\rho\,\overline{u'^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}-\rho\,\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}-\rho\,\overline{u'w'}\right)\\ \rho\left(\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}-\rho\,\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}-\rho\,\overline{v'^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}-\rho\,\overline{v'w'}\right)\\ \rho\left(\overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}-\rho g+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}-\rho\,\overline{u'w'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}-\rho\,\overline{v'w'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}-\rho\,\overline{w'^2}\right)\end{cases}$$

نلاحظ من خلال هذه المعادلات ظهور ستّة مجاهيل جديدة تسمّى بإجهادات رينولدز المضطربة و تشكّل تنسور متناظر $\overline{\overline{T}}$ يسمّى بتنسور الإجهادات لرينولدز و هو كالآتي:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} -\rho\,\overline{u'^2} & -\rho\,\overline{u'v'} & -\rho\,\overline{u'w'} \\ -\rho\,\overline{u'v'} & -\rho\,\overline{v'^2} & -\rho\,\overline{v'w'} \\ -\rho\,\overline{u'w'} & -\rho\,\overline{v'w'} & -\rho\,\overline{w'^2} \end{bmatrix}$$

د. مسألة الغلق:

إنّ المعادلات التي يجب تشكيلها لإيجاد المقادير المميّزة للمائع في كل نقطة وفي كل لحظة يعتمد على عدد المجاهيل. و كما رأينا سابقا، فقد تحصّلنا على أربعة معادلات بالقيمة المتوسّطة (معادلة واحدة من الاستمرارية و ثلاث معادلات سلّمية من معادلة نافيير و ستوكس) بعشرة مجاهيل و هي ($\overline{u}$، $\overline{v}$، $\overline{w}$ و $\overline{p}$) بالإضافة لظهور ستّة مجاهيل جديدة التي تدعى بإجهادات رينولدز المضطربة و منه فإنّ المسألة غير مغلوقة. و بالتّالي فإنّ مشكل الاضطراب يكمن كلّيةً في تحديد إجهادات رينولدز المضطربة. و منه لغلق هذه المسألة يجب و ضع فرضيات معيّنة و إدخال نماذج من أجل هذه الإجهادات.

الفصل الخامس – فواقد الشّحنة

1.5. تعميم معادلة برنولي

إنّ استعمال معادلة برنولي خاص فقط بالموائع المثالية حيث يكون الضّغط الكلّي أو الشّحنة محفوظة ($p_t = p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V = cste$). بالنّسبة للموائع الحقيقية الأمر يختلف ($p_t \neq cste$) و ذلك بسبب الاحتكاكات النّاتجة عن لزوجة المائع. إذن سنتطرّق في هذا الفصل إلى معادلة برنولي المعمّمة و التي يمكن استعمالها لتشمل أيضا الموائع الحقيقية.

كما رأينا سابقا في الجزء المتعلّق بالجريان الرّقائقي أحادي الاتّجاه في الفصل الرابع، و جدنا انطلاقا من معادلة نافيير و ستوكس أنّه من أجل جريان رقائقي و دائم لمائع حقيقي أحادي الاتّجاه وفق المحور Ox تكون الشّحنة متغيّرة خطّيا مع x، حيث يكون مقدار التغيّر في الشّحنة p_t بالنّسبة لـ x ثابتا و ذو قيمة سالبة أي أنّ هناك فقد في الشحنة.

و بصفة عامّة يمكن تعميم معادلة برنولي لتشمل الموائع الحقيقية و ذلك باظهار فاقد الشّحنة Δp_t كالآتي:

$$p_{t1} = p_{t2} + \Delta p_t$$

أو نكتب:

$$p_1 + \rho\ g\ z_1 + \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 = p_2 + \rho\ g\ z_2 + \frac{1}{2}\rho {V_2}^2 + \Delta p_t$$

حيث Δp_t يمثل فاقد الشّحنة الكلّي و هو يساوي مجموع الفواقد الخطّية و الثّانوية للشّحنة كما سنتعرّف على ذلك فيما سيأتي.

2.5. فاقد الشّحنة الخطّي

بالنّسبة لجريان رقائقي و دائم لمائع لزج غير قابل للانضغاط داخل أنبوب أسطواني نصف قطره R أي بالنّسبة لجريان بوازاي الأسطواني (الفصل الرّابع)، وجدنا أنّ عبارة السّرعة المتوسّطة تعطى كالآتي:

$$u_{moy} = \frac{a\,R^2}{8\,\mu}$$

حيث: $a = -\frac{dp_t}{dx}$، و منه نجد:

$$-\frac{dp_t}{dx} = \frac{8\,\mu}{R^2}\,u_{moy}$$

من أجل طول قدره $\Delta x = x_2 - x_1$ يكون الهبوط في الضّغط الكلي $\Delta p_t = p_{t1} - p_{t2}$ أي أنّ:

$$\Delta p_t = \frac{8\mu}{R^2} u_{moy} \cdot \Delta x$$

حيث: Δp_t يمثّل فاقد الشحنة الخطّي معبّر عنه بالباسكال (Pa).

و من أجل صياغة عبارة فاقد الشّحنة على طول L من أنبوب قطره D و باعتبار أنّ السّرعة V تمثّل السّرعة المتوسّطة u_{moy} يكون:

$$\Delta p_t = \frac{8\mu}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} V \cdot L$$

أي أنّ:

$$\Delta p_t = \frac{32\mu}{D^2} V \cdot L$$

و لدينا من عبارة رقم رينولدز:

$$\mu = \frac{\rho V D}{Re}$$

و منه بتعويض عبارة μ في عبارة فاقد الشّحنة الخطّي يكون:

$$\Delta p_t = \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot \frac{64}{Re}\frac{L}{D}$$

حيث: المقدار $\frac{64}{Re}$ و هو رقم لا بعدي يسمّى معامل فاقد الشّحنة الخطّي في حالة الجريان الرّقائقي و يرمز له بالرّمز λ.

- انطلاقاً من هذه النّتيجة يمكن تعميم عبارة فاقد الشّحنة الخطّي بالنّسبة للجريان الرّقائقي و المضطرب معاً و ذلك من أجل كل فقد في الشّحنة على طول L من أنبوب قطره D كالآتي:

$$\Delta p_t = \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot \lambda \frac{L}{D}$$

حيث معامل فاقد الشّحنة الخطّي λ يمكن حسابه كالآتي:

✓ **الجريان الرّقائقي ($Re < 2000$):**

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

✓ **الجريان المضطرب:**

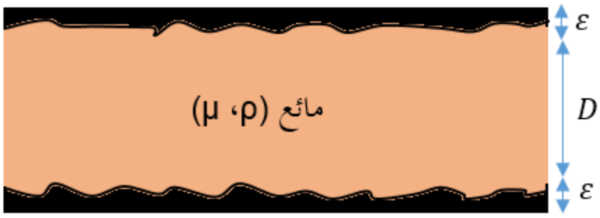
يمكن استعمال علاقة بلازيوس و ذلك من أجل الأنابيب الملساء و هي تعطى كالآتي:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \qquad \text{من أجل:} \qquad 2100 < Re < 10^5$$

كما يمكن استعمال علاقة كولبروك و ذلك من أجل الأنابيب الملساء و الغير ملساء و هي تقريبا مقبولة على كامل مجال الاضطراب حيث تعطى كالآتي:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\, log_{10}\left[\frac{\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)}{3.7} + \frac{2.51}{Re\cdot\sqrt{\lambda}}\right] \qquad \text{من أجل:} \qquad Re > 4000$$

حيث ε يمثل البعد المتوسّط لخشونة جدار الأنبوب كما هو موضّح في الشكل (1.5).



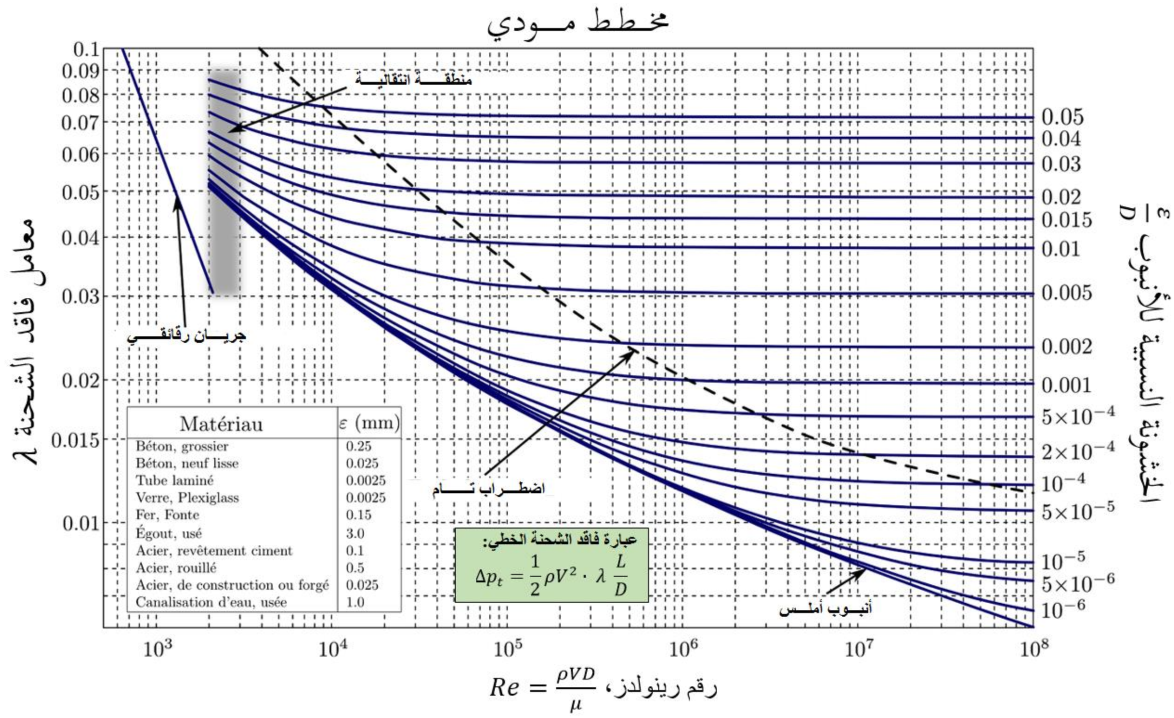
شكل (1.5): البعد المتوسّط لخشونة جدار الأنبوب ε

ملاحظة: إذا كان مقطع الأنبوب غير دائري، يتمّ تعويض قطر الأنبوب D بالقطر الهيدروليكي D_h الذي يعطى كالآتي:

$$D_h = \frac{4\,S}{P}$$

حيث S تمثّل مساحة المقطع و P يمثّل المحيط.

كما يمكن لتحديد قيمة λ استعمال المنحنيات البيانية مثل مخطّط مودي (Moody) الذي هو موضّح في الشكل (2.5).



Matériau	ε (mm)
Béton, grossier	0.25
Béton, neuf lisse	0.025
Tube laminé	0.0025
Verre, Plexiglass	0.0025
Fer, Fonte	0.15
Égout, usé	3.0
Acier, revêtement ciment	0.1
Acier, rouillé	0.5
Acier, de construction ou forgé	0.025
Canalisation d'eau, usée	1.0

شكل (2.5): مخطط مودي

مثال:

نعتبر سائل كتلته الحجمية $\rho = 860\ kg/m^3$ يتمُّ ضَخُّه عبر أنبوب أفقي قطره $D = 5cm$ و طوله $300m$ بتدفّق حجمي قدره $q_v = 1.2\ l/s$، كما نعتبر أنّ الجريان داخل الأنبوب رقائقي و أنّ فاقد الشّحنة الخطّي لهذا الجريان هو $\Delta p_t = 2.06 \cdot 10^5\ Pa$. المطلوب هو حساب معامل اللّزوجة الدّيناميكية للسّائل المستعمل.

الحل:

نحسب أوّلا السّرعة المتوسّطة للسّائل داخل الأنبوب V و ذلك باستعمال عبارة التدفّق الحجمي التي تعطى كالآتي:

$$q_v = V \cdot S$$

حيث S تمثل مساحة مقطع الأنبوب و هي تعطى كالآتي:

$$S = \pi \frac{D^2}{4}$$

و منه نجد:

$$V = \frac{q_v}{\left(\pi \dfrac{D^2}{4}\right)}$$

تطبيق عددي:

$$V = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{\left(3.14 \dfrac{(0.05)^2}{4}\right)}$$

و منه: $V = 0.61\ m/s$

لدينا كذلك من عبارة فاقد الشّحنة الخطّي:

$$\Delta p_t = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot \lambda \frac{L}{D}$$

ومنه يمكننا حساب معامل فاقد الشّحنة الخطّي λ و ذلك كالآتي:

$$\lambda = \frac{\Delta p_t}{\left(\frac{1}{2}\rho V^2 \cdot \frac{L}{D}\right)}$$

تطبيق عددي:

$$\lambda = \frac{2.06 \cdot 10^5}{\left[\frac{1}{2}(860)(0.61)^2 \cdot \frac{300}{0.05}\right]}$$

و منه: $\lambda \approx 0.22$

و بما أنّ الجريان رقائقي إذن:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

و منه يمكننا حساب رقم رينولدز و ذلك كالآتي:

$$Re = \frac{64}{\lambda}$$

تطبيق عددي:

$$Re = \frac{64}{0.22}$$

و منه: $Re \approx 290.91$

و من جهة أخرى لدينا:

$$Re = \frac{\rho\, V\, D}{\mu}$$

حيث μ يمثل معامل اللزوجة الديناميكية و بالتالي يمكن حسابه كالآتي:

$$\mu = \frac{\rho\, V\, D}{Re}$$

تطبيق عددي:

$$\mu = \frac{(860)\,(0.61)\,(0.05)}{290.91}$$

و منه فإنّ قيمة معامل اللّزوجة الدّيناميكية للسّائل المستعمل هي: $\mu \approx 0.09\ \frac{kg}{m\,s}$

3.5. فاقد الشّحنة الثّانوي

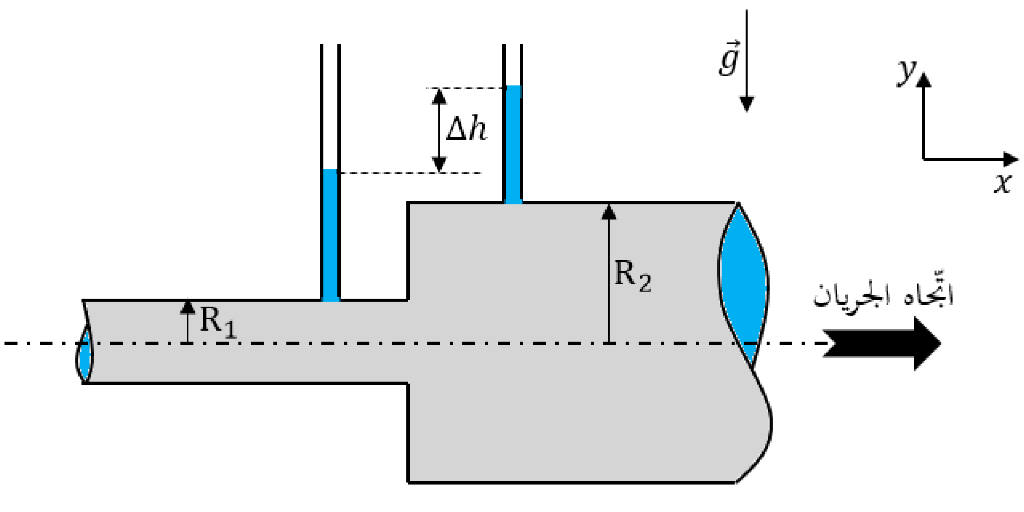
إنّ فاقد الشّحنة الثّانوي أو الفردي هو ناتج عن حوادث الجريان مثل التغيّرات الفجائية في مقطع الأنبوب و كذلك مثل تغيّر اتّجاه الأنبوب ...، إنّ هذه الحوادث التي تقع للجريان تمثل مصدر لفاقد الشّحنة الثّانوي الذي يمكن حسابه كالآتي:

$$\Delta p_t = \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot K$$

حيث K يسمّى معامل فاقد الشّحنة الثّانوي. عملياً قيم K يمكن الحصول عليها تجريبياً أو تحليلياً أو بالمحاكاة العددية.

مثال (1):

نريد هنا انطلاقاً من معطيات التّجربة حساب معامل فاقد الشّحنة الثّانوي K النّاتج عن توسيع مفاجئ في مقطع أنبوب أسطواني ينقل الماء ذو الكتلة الحجمية $\rho = 1000kg/m^3$ و ذلك بتدفّق حجمي قدره $q_v = 0.5\ m^3/s$. بحيث قبل الاتّساع كان نصف قطر الأنبوب $R_1 = 20cm$ و بعد الاتّساع أصبح نصف قطر الأنبوب $R_2 = 40cm$. كما تمّ توضيحه في الشكل (3.5)، مقطعي الأنبوب موصولين بأنبوبين بيزومتريين، حيث كان الفرق في مستوى الماء بين الأنبوبين البيزومتريين هو $\Delta h = 0.4\ m\ C.E.$.



شكل (3.5)

باستخدام معادلة برنولي المعمّمة بين مقطعي الأنبوب نجد:

$$p_1 + \rho\ g\ y_1 + \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 = p_2 + \rho\ g\ y_2 + \frac{1}{2}\rho {V_2}^2 + \Delta p_t$$

حيث Δp_t يمثل فاقد الشحنة الثانوي و هو يساوي $\Delta p_t = \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 \cdot K$ و باعتبار أنّ $y_1 = y_2$، إذن يمكن حساب عبارة معامل فاقد الشّحنة الثّانوي كالآتي:

$$K = \frac{(p_1 - p_2) + \frac{1}{2}\rho\left({V_1}^2 - {V_2}^2\right)}{\frac{1}{2}\rho {V_1}^2}$$

حيث يمكن حساب الفرق في الضّغط $(p_1 - p_2)$ من خلال الفرق في مستوى الماء بين الأنبوبين البيزومتريين Δh و ذلك باستعمال العبارة الأساسية للموائع السّاكنة و الغير قابلة للانضغاط (الفصل الأوّل) كالآتي:

$$p_1 = p_{atm} + \rho\ g\ h_1$$
$$p_2 = p_{atm} + \rho\ g\ h_2$$

و منه نجد:

$$p_1 - p_2 = \rho\ g(h_1 - h_2) = -\rho\ g\ \Delta h$$

تطبيق عددي:

$$p_1 - p_2 = -(1000)(9.81)(0.4) = -3924\ Pa$$

و كذلك يمكن حساب السّرعة V_1 و V_2 انطلاقاً من عبارة التدفّق حيث:

$$V_2 = \frac{q_v}{S_2} = \frac{q_v}{\pi\ R_2^2} \qquad \text{و} \qquad V_1 = \frac{q_v}{S_1} = \frac{q_v}{\pi\ R_1^2}$$

تطبيق عددي:

$$V_2 = \frac{0.5}{3.14\ (0.4)^2} = 1\ m/s \qquad \text{و} V_1 = \frac{0.5}{3.14\ (0.2)^2} = 3.98\ m/s$$

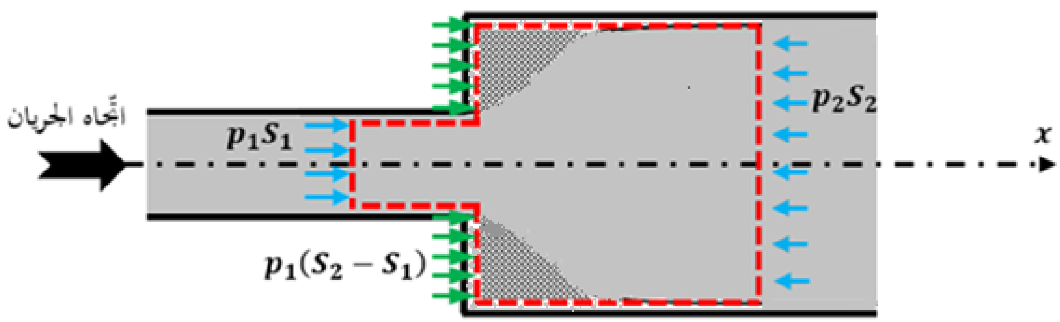
بالتّعويض في عبارة فاقد الشّحنة الثّانوي يكون:

$$K = \frac{-3924 + \frac{1}{2}(1000)[(3.98)^2 - (1)^2]}{\frac{1}{2}(1000)(3.98)^2}$$

و منه نجد: $K = 0.44$

مثال (2):

نريد هنا إيجاد تحليلياً عبارة معامل فاقد الشّحنة الثّانوي K النّاتج عن توسيع مفاجئ في مقطع الأنبوب كما هو موضّح في الشكل (5.4) و ذلك باستعمال نظرية انحفاظ كمّية الحركة. نعتبر أنّ هذا الأنبوب ينقل مائع كتلته الحجمية ρ، بحيث قبل الاتّساع كانت مساحة مقطع الأنبوب S_1 و سرعة الجريان V_1 و بعد الاتّساع أصبح نصف قطر الأنبوب S_2 و سرعة الجريان V_2. و ليكن q_m التدفّق الكتلي للمائع الذي بداخله و ليكن p_1 الضّغط قبل اتّساع الأنبوب و p_2 الضغط بعد اتّساع الأنبوب. نعتبر الجريان دائم كما نهمل قوى الحجم.



شكل (4.5)

بما أنّ الجريان دائم، إذن بتطبيق نظرية انحفاظ كمّية الحركة بالنّسبة لحجم المراقبة المشكّل لأنبوب التيّار الموضّح في الشكل (الخطوط المتقطّعة) يكون لدينا:

$$\iint_S \rho\, \vec{V}(\vec{V}\,\vec{n})dS = \sum \vec{F}_{ext}$$

و منه نجد:

$$\iint_{S_1} \rho\, \vec{V}_1(\vec{V}_1\,\vec{n}_1)dS + \iint_{S_2} \rho\, \vec{V}_2(\vec{V}_2\,\vec{n}_2)dS + \iint_{S_L} \rho\, \vec{V}_L(\vec{V}_L\,\vec{n}_L)dS = \vec{R} + \vec{P}$$

حيث: $\vec{R}$ تمثّل قوى السّطح، $\vec{P}$ تمثّل قوى الحجم و S_L تمثل مساحة السّطح الجانبي لأنبوب التيار.

و منه يكون:

$$-q_m\vec{V}_1 + q_m\vec{V}_2 + 0 = \vec{R} + \vec{P}$$

بما أنّ قوى الحجم مهملة، إذن بإسقاط هذه العلاقة على المحور x نجد:

$$-q_mV_1 + q_mV_2 + 0 = p_1\,S_1 - p_2\,S_2 + p_1\,(S_2 - S_1)$$

و منه:

$$q_m(V_2 - V_1) = S_2(p_1 - p_2)$$

و لدينا $q_m = \rho\,V_1\,S_1 = \rho\,V_2\,S_2$، إذن:

$$\rho\,V_2\,S_2\,(V_2 - V_1) = S_2(p_1 - p_2)$$

أي أنّ:

$$p_1 - p_2 = \rho\,V_2(V_2 - V_1)$$

و من جهة أخرى، لدينا حسب معادلة برنولي المعمّمة:

$$p_1 + \rho\,g\,y_1 + \frac{1}{2}\rho{V_1}^2 = p_2 + \rho\,g\,y_2 + \frac{1}{2}\rho{V_2}^2 + \Delta p_t$$

حيث Δp_t يمثل فاقد الشّحنة الثّانوي و هو يساوي $\Delta p_t = \frac{1}{2}\rho{V_1}^2 \cdot K$ و باعتبار أنّ $y_1 = y_2$، إذن يمكن حساب عبارة معامل فاقد الشّحنة الثّانوي كالآتي:

$$K = \frac{(p_1 - p_2) + \frac{1}{2}\rho\left({V_1}^2 - {V_2}^2\right)}{\frac{1}{2}\rho {V_1}^2}$$

بتعويض عبارة الفرق في الضّغط $(p_1 - p_2)$ في عبارة فاقد الشّحنة الثّانوي K نجد:

$$K = \frac{\rho\, V_2(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}\rho\left({V_1}^2 - {V_2}^2\right)}{\frac{1}{2}\rho {V_1}^2}$$

بعد التّبسيط نجد:

$$K = \frac{\frac{1}{2}\rho(V_1 - V_2)^2}{\frac{1}{2}\rho {V_1}^2}$$

و يمكن أن نكتب كذلك:

$$K = \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2$$

و لدينا من جهة أخرى:

$$V_1\, S_1 = V_2\, S_2$$

أي أنّ:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_1}{S_2}$$

بالتّعويض في عبارة K نجد:

$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

المراجع

1. R. Comolet et J. Bonnin, Mécanique expérimentale des fluides, Tome III, Masson, Paris, 1992.
2. Jean-François Sini, Cours de Mécanique des Fluides, Engineering school, pp.213, 2006.
3. Philippe Marty, Mécanique des fluides, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2012,
4. Michel A. Morel, Jean-Pierre Laborde, Exercices de mécanique des fluides, Tome 1, Chihab – Eyrolles, 1994.
5. Olivier Louisnard, Cours de mécanique des fluides, 2012, http://perso.mines-albi.fr/~louisnar/MECADEF/PolyMecaDef.pdf
6. Robert REY, Cinématique et dynamique des fluides, Tome 1, ParisTech, 2008.
7. A. Colin De Verdiere, Notes de mécanique des fluides, 2013, https://stockage.univ-brest.fr/~acolindv/telecharger/meca_fluide.pdf
8. M. Bourich, Cours de Mécanique des Fluides, Université CADI AYYAD, 2014,
9. Stéphane Chaussedent, Statique et dynamique des fluides, Université d'Angers, 2011.
10. Chantal Meuris, Mécanique des fluides, DAPNIA/SACM, CEA/Saclay, https://perso.crans.org/mbertin/Cours_Mecanique_des_fluides.pdf
11. Hubert Lumbroso, Mécanique des fluides, Dunod, Paris, 1996.
12. رينالد ف. جايلر، نظريات و مسائل في ميكانيكا الموائع و الهيدروليكا، سلسلة ملخصات شوم، الدار الدولية للنشر و التوزيع، القاهرة / مصر، 1981.