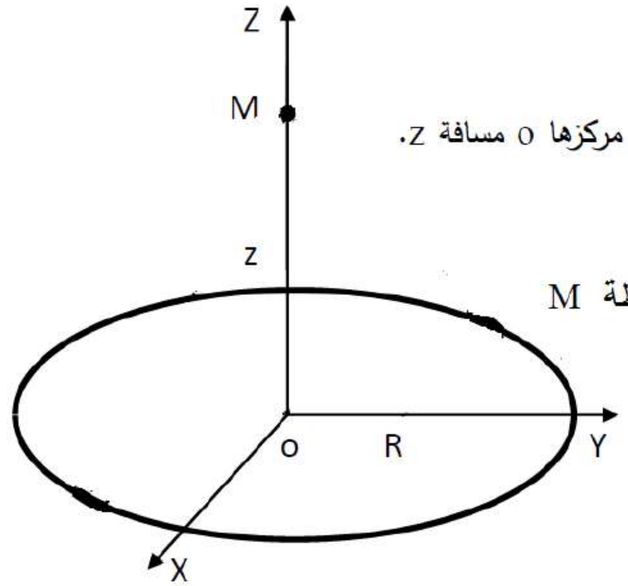
تمارين محلولة 2

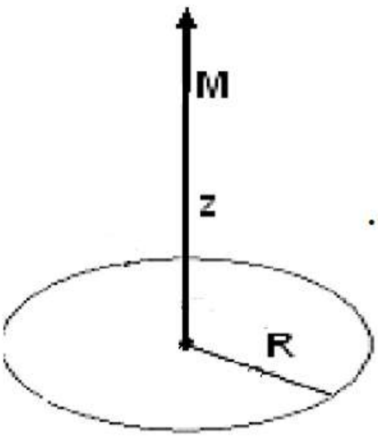
التمرين الأول:

لنفرض أن حلقة دائرية واقعة في المستوي (x,y) نصف قطرها R ومشحونة بشحنة موجبة q^{+} موزعة عليها بكثافة منتظمة λ.



1. أحسب الحقل الناتج عنها في نقطة M من محورها، وتبعد عن مركزها o مسافة z.
2. أحسب الكمون الناشئ عنها في نقطة M
3. استنتج من عبارة الكمون المتحصل عليها شدة الحقل في النقطة M

التمرين الثاني:

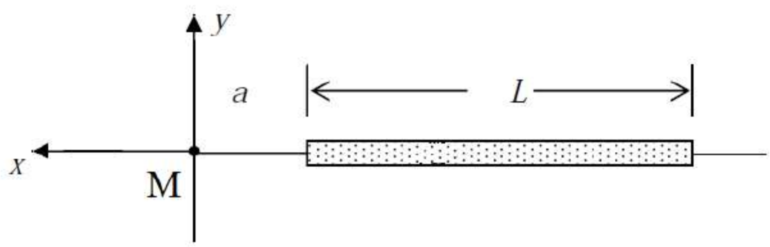


بفرض أنه لدينا قرص دائري نصف قطره R مشحون بكثافة منتظمة σ،
ولتكن M نقطة من محور القرص، تبعد عن مركزه بمسافة z.
أوجد الكمون الكهربائي في النقطة M ثم أستنتج الحقل الكهربائي في تلك النقطة.

التمرين الثالث:

أحسب شدة الحقل $\vec{E}$ الناتج عن سلك لانهائي الطول مشحون بشحنة موجبة q^{+} تتوزع عليه بكثافة منتظمة λ وذلك في نقطة ما M تبعد عنه مسافة ثابتة x

أعد نفس السؤال السابق إذا كانت النقطة M المراد إيجاد الحقل عندها واقعة على مسافة a من إحدى نهايتي السلك (أنظر الشكل)



التمرين الأول:

لنحسب شدة الحقل $d\vec{E}$ في النقطة M والناتج عن عنصر الشحنة dq المتوضع على عنصر الطول $d\ell$ لنأخذ عنصري شحنة متناظرين بالنسبة لـ o مركز الحلقة الدائرية المشحونة نجد أن كلا منهما ينشأ حقلا عنصريا عند النقطة M وتكون المركبة على المستوي (x,y) لأحدهما تفني الأخرى، وتبقى المركبة على المحور z. (كما يبين الشكل)

وعليه نكتب

$$dE_z = dE_1\, Cos\,\alpha = k\frac{dq}{r^2}\,Cos\,\alpha$$

وبما أن توزع الشحنة توزع خطي $dq = \lambda\, d\ell$ نجد :

$$dE_z = k\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\,Cos\,\alpha$$

نوجد من الشكل قيمة المقادير $d\ell$ و r و $Cos\,\alpha$ بدلالة الزاوية θ

$$\ell = R\theta \ \Rightarrow d\ell = R\,d\theta$$

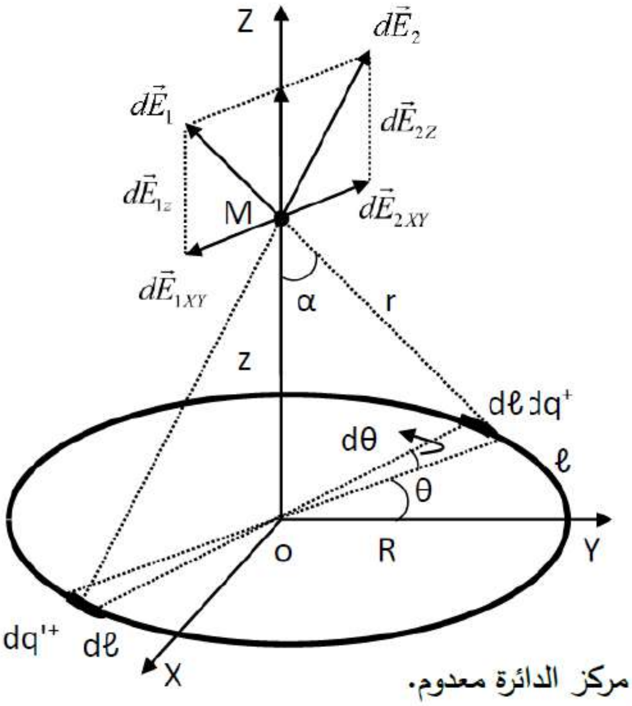
$$r^2 = z^2 + R^2$$

$$Cos\,\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

بالتعويض والمكاملة على θ في المجال الذي يمسح كامل حيط الدائرة $[0,2\pi]$ نجد :

$$E_z = \int dE_z = k\lambda R\,\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

وبما أن توزع الشحنة على الحلقة الدائرية توزع خطي فيكون $q = \lambda\, 2\pi R$



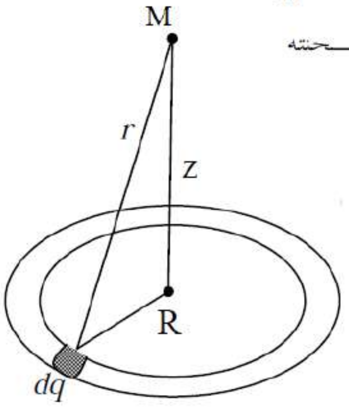
$$E_z = k\,q\,\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

عندما $z=0$ نجد $E_z = 0$ أي أن شدة الحقل المحصل في مركز الدائرة معدوم.

وعندما $z >> R$ يمكننا إجراء التقريب التالي الذي نعتبر فيه $R^2/z^2 \approx 0$

$$E_z = k\,q\,\frac{z}{\left[z^2\left(1+\dfrac{R^2}{z^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \approx k\frac{q}{z^2}$$

وكما هو ملاحظ فهو يمثل حقل شحنة نقطية q في نقطة تبعد عنها مسافة z .



2- نقسّم الحلقة إلى عناصر تفاضلية تبعد جميعها بمسافات متساوية عن النقطـــة M المراد إيجاد **الكمون** عندها. ثم نأخذ احد هذه العناصر الذي تبلغ قيمة شـــحنته dq و نعتبرها بمثابة شحنة نقطية تبعد مسافة r عن النقطة M

نستطيع أن نجد مقدار **الكمون** الناشئ عن هذا العنصر وكما يأتي :

$$dV(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}}$$

بإجراء التكامل لكل من طرفي المعادلة نحصل على قيمة الجهد عند النقطة M

$$V(\mathrm{M}) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}}\int dq$$

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}}$$

3 - واضح من تناظر الشكل أن المجال الكهربائي يكون باتجاه محور الحلقة z لـــذا بالإمكان الحصول على E عند M بالاستفادة من المعادلة

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\ V = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{e_z}$$

$$E(\mathrm{M}) = E_z(\mathrm{M}) = -\frac{dV}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}}\right)$$

$$E(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,z}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{3/2}}$$

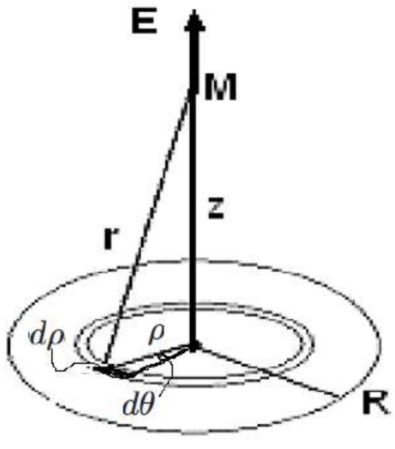
يبدو أن هذه النتيجة تتفق تماماً مع النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة التكامل بصورة مباشرة

التمرين الثاني:

لإيجاد الكمون الكهربائي في النقطة M نأخذ شريطاً عنصرياً نصف قطره x، وسماكته dx، كما في الشكل.

عندئذ تكون شحنة الشريط مساوية إلى: $dq = \sigma\rho d\rho d\theta$

يعطى الكمون العنصري المتولد عن الشحنة dq في النقطة M بالعلاقة الآتية:



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

وبالتالي يكون الكمون الكلي في النقطة M:

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right) \qquad (1)$$

لحساب الحقل الكهربائي في النقطة M، نفترض أن النقطة انتقلت على المحور z بمقدار dz عندئذ يمكننا بالاستفادة من العلاقة الأساسية بين الكمون والحقل كتابة الحقل كما يلي:

$$E = -\frac{dV}{dz}$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right)$$

يمكن أن نكتب:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \qquad (2)$$

وهي قيمة الحقل أما منحاه فيكون محمولاً على المحور بسب التناظر، وجهته من مركز القرص نحو M، إذا كانت $\sigma > 0$ ، وبالعكس إذا كانت $\sigma < 0$

حالة خاصة:

حساب شدة الحقل وقيمة الكمون في مركز القرص.

في مركز القرص حيث Z=0 نجد بالتعويض في كل من العلاقتين **(1)** و (2) أن الكمون والحقل:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{و} \quad V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R$$

التمرين الثالث:

لحساب شدة الحقل $\vec{E}$ الناتج عن سلك لانهائي الطول مشحون بشحنة موجبة q^+ تتوزع عليه بكثافة منتظمة ، وذلك في نقطة ما M تبعد عنه مسافة ثابتة x ، نحسب أولا شدة الحقل $d\vec{E}$ الناتج عن عنصر الشحنة dq^+ المتوضع على عنصر الطول $d\ell$

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}$$

وبالاسقاط نجد

$$d\vec{E} = d\vec{E}_X + d\vec{E}_Y$$

$$d\vec{E}_X = dE\ Cos\theta\ \vec{i} \qquad d\vec{E}_Y = dE\ Sin\theta\ \vec{j}$$

وبسبب التناظر تكون شدة الحقل $d\vec{E}_Y$ معدومة. (كما هو موضح على الشكل: لاحظ أن شدة $d\vec{E}_{1Y}$ تساوي وتعاكس شدة $d\vec{E}_{2Y}$ فهما متفانيان. كما نلاحظ أن المسقطان $d\vec{E}_{1X}$ و $d\vec{E}_{2X}$ متساويان شدةً وبنفس الجهة).

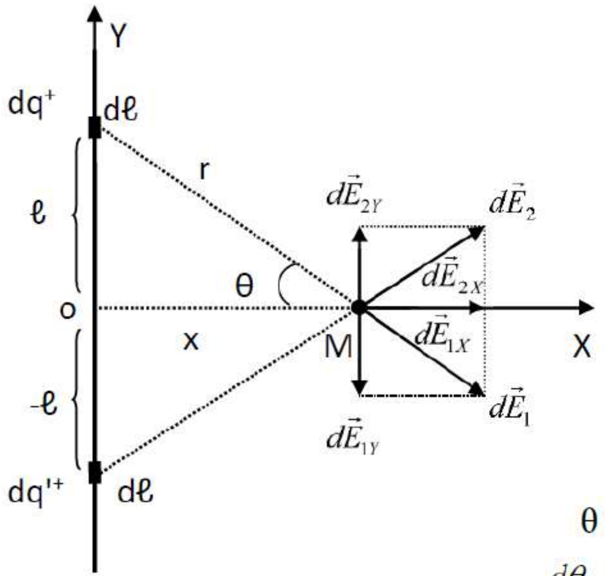
و عليه يكون:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_X = dE_X\ \vec{i}$$

$$dE_X = dE\ Cos\theta = k\frac{dq}{r^2}Cos\theta$$

وبما أن توزع الشحنة توزع خطي $dq = \lambda\, d\ell$ نجد :

$$dE_X = k\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}Cos\theta$$



نوجد من الشكل قيمة المقادير $d\ell$ و r^2 بدلالة الزاوية θ

$$\ell = x\tan\theta \Rightarrow d\ell = x\frac{d\theta}{Cos^2\theta} \quad و \quad r = \frac{x}{Cos\theta} \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{Cos^2\theta}$$

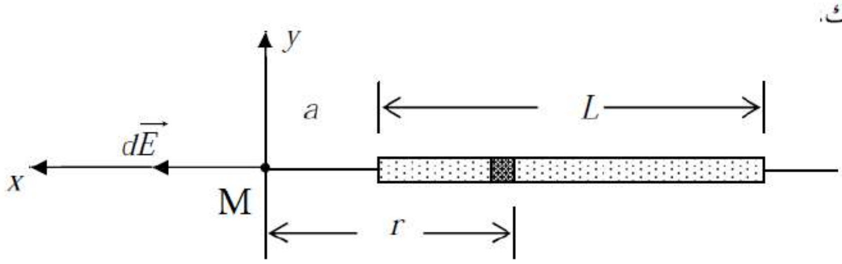
بالتعويض نجد

$$dE_X = k\frac{\lambda}{x}Cos\theta\, d\theta$$

ومن أجل كامل السلك نكامل الطرفين على الزاوية θ في المجال $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ واعتبار أن $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ نجد :

$$E_X = \int dE_X = k\frac{\lambda}{x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o\, x}\left[Sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\, x}$$

إذا كانت النقطة M المراد إيجاد شدة المجال الكهربائي عندها واقعة على مسافة a من إحدى نهايتي السلك.



المجال الكهربائي $\overrightarrow{dE}$ الناشئ عن عنصر الطول dx عند النقطة M هو باتجــاه المحور x وذلك لان مصدر المجال هي حاملات الشحنة الموجبة q، ويعطى مقداره من المعادلة :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{i}$$

أو

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\vec{i}$$

وبسبب أن المجال الناشئ عن جميع عناصر السلك الأخرى هو باتجاه المحور x فان جمع إسهامات كل العناصر التي على أبعاد مختلفة من M يعطى بالمعادلة :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dx}{r^2}\vec{i} \qquad\qquad r = x + a$$

ووفقاً للحالة المطروحة تؤخذ حدود التكامل في المعادلة أعلاه بين 0 و L فيكون:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int_0^L\frac{dx}{(x+a)^2}\vec{i} \quad = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left[\frac{-1}{x+a}\right]_0^L\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right)\vec{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left(\frac{L+a-a}{a(L+a)}\right)\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\frac{L}{a(L+a)}\vec{i} \quad = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(L+a)}\vec{i}$$