الفصل الثالث

قوانين الاحتمال الاعتيادية

مقدمة: يهتم هذا الفصل بدراسة بعض التوزيعات الاحتمالية الاعتيادية الأكثر استعمالا من حيث أنواعها و تعريفها و خصائصها.

1.3 التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1.1.3 توزيع برنولي Distribution de Bernoulli

و هو أبسط التوزيعات الاحتمالية المتقطعة حيث يعتبر تجربة لها ناتجان فقط، نجاح و فشل. يعطي المتغير العشوائي X في هذه الحالة القيمة 1 في حالة ظهور النجاح و القيمة 0 في حالة الفشل، أي:

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=q=1-p,\quad 0<p<1$$

نرمز لهذا التوزيع بالرمز $\mathrm{B}(p)$ و نكتب $X \sim \mathrm{B}(p)$ (نقرأ X يتبع القانون أو التوزيع $\mathrm{B}(p)$) .

<u>مثال:</u> عند رمي زهرة نرد مرة واحدة فقط، نعتبر النجاح هو ظهور الرقم 4. فيكون التوزيع هو $\mathrm{B}\left(\frac{1}{6}\right)$.

<u>خواص:</u> من أجل $X \sim \mathrm{B}(p)$ ، يكون

1. $E(X)=p$

2. $V(X)=pq$

2.1.3 توزيع ثنائي الحد (ثنائي الحدين) Distribution binomiale

و هو أيضا من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، حيث أننا في هذا النوع نقوم بتكرار تجربة برنولي n مرة مستقلة مع ثبوت احتمال النجاح p ، و نهتم بعدد مرات ظهور النجاح أي:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\dots,n$$
$$P(X=0)=q^n,\quad P(X=n)=p^n,\quad p+q=1$$

نرمز لهذا التوزيع بالرمز: $\mathrm{B}(n,p)$ و نكتب $X\sim \mathrm{B}(n,p)$

مثال: إذا كان احتمال تسجيل هدف عن طريق ضربة حرة هو 0.75، فما هو احتمال تسجيل هدفين خلال 4 ضربات حرة.

الاحتمال المطلوب هو $P(X=2)=C_4^2 0.75^2(1-0.75)^{4-2}=0.21$

خواص: من أجل $X\sim \mathrm{B}(n,p)$ ، يكون

1. $E(X)=np$

2. $V(X)=npq$

3.1.3 التوزيع الهندسي Distribution géométrique

و هو أيضا من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، و يستخدم في حالة وجود عدة محاولات متكررة حتى الحصول على أول نجاح أي:

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\quad 0<\mathrm{p}<1,\quad k=1,2,\dots$$

$\{X=k\}$ يمثل ظهور النجاح في المحاولة رقم k.

نرمز لهذا التوزيع بالرمز: $\mathrm{G}(p)$ و نكتب $X\sim \mathrm{G}(p)$

مثال: احتمال اصابة هدف هو 0.4، فما هو احتمال اصابة هذا الهدف في المحاولة الرابعة.

$$P(X=4)=p(1-p)^{4-1}=(0.4)(0.6)^3=0.086$$

خواص: من أجل $X \sim \mathrm{G}(p)$ ، يكون

1. $E(X)=\frac{1}{p}$

2. $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

4.1.3 توزيع بواسون Distribution de Poisson

و غالبا ما يستعمل هذا التوزيع في حساب احتمال الأحداث النادرة كالحرائق و الزلازل و الأخطاء المطبعية في صفحات كتاب ... و قد امتد استعماله إلى تكنولوجيا الاتصال مثل عدد المكالمات الهاتفية في مدة زمنية معينة و غيرها. كما يستعمل أيضا في وصف التفكيك الاشعاعي النووي.

رياضيا يعبر عن احتمالية حدوث عدد من الأحداث ضمن فترة محددة أو منطقة معينة بمعدل معروف λ $(0<\lambda)$ و غير متعلق بزمن الأحداث، فإذا رمزنا ب X للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد المرات التي سيحصل فيها الحدث خلال زمن T فإن:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,\ldots$$

نرمز لهذا التوزيع بالرمز: $\mathrm{P}(\lambda)$ و نكتب $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$

مثال: من خلال دراسة خاصة لأحد الطرقات وجدنا أن حوادث المرور تقع فيه بمعدل حادثين يوميا. أوجد احتمال أن لا يسجل أي حادث في يوم معين. ثم احتمال أن يسجل فيه حادث واحد على الأقل في يوم.

$$\lambda=2,\quad P(X=0)=e^{-2}\frac{2^0}{0!}=e^{-2}.$$

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-e^{-2}=0.86$$

خواص: من أجل $X \sim P(\lambda)$ ، يكون

1. $E(X)=\lambda$
2. $V(X)=\lambda$

2.3 التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1.2.3 التوزيع المنتظم Distribution uniforme

و هو أبسط التوزيعات الاحتمالية المستمرة، و يعرف التوزيع المنتظم على المجال $[a,b]$ عن طريق كثافة الاحتمال التالية:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & , \ x\in[a,b]\\ 0 & , \ x\notin[a,b]\end{cases}$$

خواص:

1. $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$
2. $V(X)=\dfrac{(a-b)^2}{12}$

2.2.3 التوزيع الأسي Distribution exponentielle

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة... يعرف التوزيع الأسي ذو الوسيط α $(\alpha>0)$عن طريق كثافة الاحتمال التالية:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & , \ x\geq 0\\ 0 & , \ x<0\end{cases}$$

خواص:

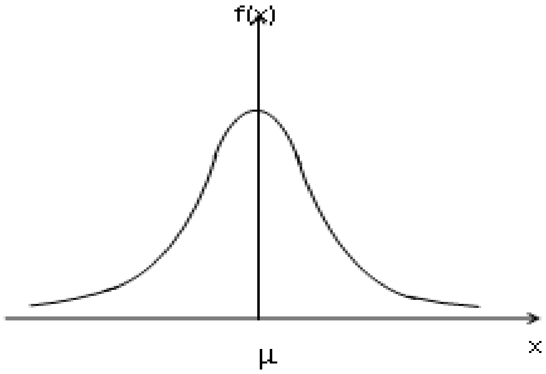
1. $E(X)=\frac{1}{\alpha}$

2. $V(X)=\frac{1}{\alpha^2}$

3.2.3 التوزيع الطبيعي أو توزيع غوص Distribution normale (Gauss)

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فهو بالدرجة الأولى يصف المتغيرات العشوائية التي تميل للتمركز حول قيمة المتوسط. يرمز للتوزيع الطبيعي ذي أمل رياضي μ و تباين σ^2 بالرمز $N(\mu,\sigma^2)$ و نكتب $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ، دالة كثافة احتماله لها شكل جرسي متماثل و تعطى بالعبارة التالية:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



شكل 1.3: منحني دالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$

خواص:

1. المنحني الطبيعي متناظر بالنسبة للمستقيم $x=\mu$.
2. المنحني الطبيعي يقبل المستقيم ذي المعادلة $y=0$ كمستقيم مقارب في جوار المالانهاية.
3. المنحني الطبيعي يحقق $\mu = Med = Mod$

دالة توزيع الاحتمال:

$$F_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt\ ,\quad x\in\Re$$

حالة خاصة:

التوزيع $N(0,1)$ يسمى التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي، و نعرف في هذه الحالة دالة توزيع احتماله Φ كما يلي:

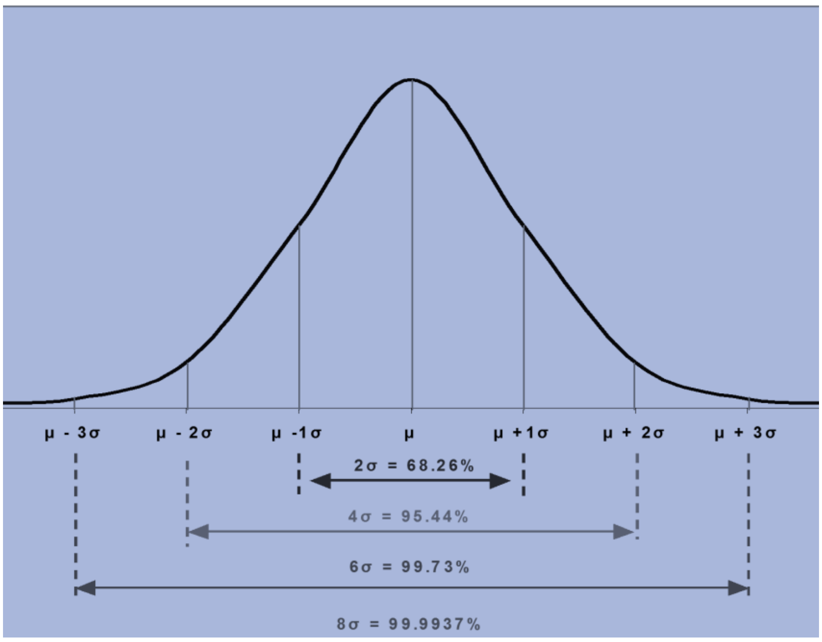
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

تعطى قيم هذه الدالة في جدول.

خواص:

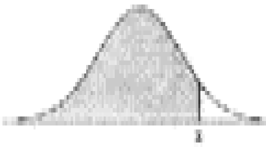
1. من أجل $X\ \sim N(\mu,\sigma^2)$، نقوم بالتحويل الآتي: نضع $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ فإن $Z\ \sim N(0,1)$.
2. المساحات الآتية ثابتة دائما من أجل $X\ \sim N(\mu,\sigma^2)$:

$$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)=0.6826$$
$$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=0.9544$$
$$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)=0.9973$$



شكل 2.3: مساحات ثابتة تحت منحني التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$

Tables of the Normal Distribution



Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

شكل 3.3: المساحة تحت منحني التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$

مثال: مجتمع مكون من 400 فردا، بافتراض أن أعمارهم موزعة توزيعا طبيعيا بمعدل 40 سنة و بانحراف معياري قدره 5 سنوات. نختار فردا بصفة عشوائية، أوجد:

1- احتمال أن يكون عمر هذا الفرد بين 35 و 40 سنة.

2- احتمال أن يكون عمر هذا الفرد أكثر من 50 سنة.

في هذه الحالة $X \sim N(40,25)$ ، و بالتالي:

1. $P(35 \leq X \leq 40) = P(-1 \leq Z \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = 0.5 - 0.15866 \approx 0.34$

2. $P(X > 50) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 \approx 0.02$

4.2.3 توزيع قاما Distribution gamma

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع توزيع قاما إذا كانت دالة كثافته كما يلي:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} & si \;\; x > 0 \\ 0 & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$$

حيث $\alpha > 0, \; \beta > 0$ و نكتب $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0$$

خواص:

1. $E(X) = \alpha\beta$
2. $V(X) = \alpha\beta^2$

3.3 تقريب التوزيعات الاحتمالية

1.3.3 تقريب التوزيع ثنائي الحد بتوزيع بواسون

في حالة $n \geq 25$ و $p \leq 0.1$ ، فإنه يمكن تقريب التوزيع ثنائي الحد بتوزيع بواسون حيث $\lambda = np$.

مثال: نأخذ عشوائيا 10 وحدات انتاجية من آلة معينة نسبة انتاجها التالف هي 10% . أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتين.

1. باستخدام التوزيع ثنائي الحد

$$n=10,\ p=0.1, P(X=2)=C_{10}^{2}(0.1)^{2}(1-0.1)^{10-2}=0.193710244$$

2. باستخدام توزيع بواسون

$$\lambda=np=10\times 0.1=1, P(X=2)=e^{-1}\frac{1^{2}}{2!}=0.18393972$$

يكون التقريب أمثل عندما تكون n أكبر.

2.3.3 تقريب التوزيع ثنائي الحد بالتوزيع الطبيعي

في حالة n كبيرة و p غير قريب من 0 يكون التوزيع الطبيعي تقريبا جيدا للتوزيع ثنائي الحد. و نكتب:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a\le\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{1}{2}t^{2}}\,dt$$

و عموما في حالة $n>18$ و p ليس صغيرا يكون التقريب جيد.

3.3.3 تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي

لما تكون λ كبيرة كفاية و عمليا نأخذ $\lambda\ge 18$ فإن النتائج تكون متقاربة أي:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} P\left(a\le\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\le b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}e^{-\frac{1}{2}t^{2}}\,dt$$

جامعة الوادي | كلية العلوم الدقيقة | قسم الرياضيات

المقياس: احتمالات | السنة الثانية

السداسي الرابع | السنة الجامعية : 2020/2021

سلسلة تمارين رقم 03 (قوانين الاحتمال الإعتيادية)

تمرين 1 :

امتحان يتكون من 10 أسئلة مستقلة، فإذا كان احتمال أن يجيب الطالب عن أي سؤال هو 0.2. فأوجد:

1) احتمال أن لا يجيب الطالب عن أي سؤال.
2) احتمال أن يجيب الطالب عن سؤالين فقط.
3) احتمال أن يجيب الطالب عن ثلاثة أسئلة على الأقل.

نستخدم توزيع ثنائي الحد حيث n=10 و p=0.2

تمرين 2 :

احتمال أن يسجل لاعب هدفا في كل رمية هو 0.6، فما هو احتمال أن يسجل 4 أهداف خلال 10 ضربات جزاء.

نستخدم توزيع ثنائي الحد حيث n=10 و p=0.6 و k=4

تمرين 3 :

إذا كانت نسبة الاصابة بمرض معين في احدى المناطق هي 0.6، تم أخذ 20 شخصا قبل الفحص من هذه المنطقة. ما هو:

1) احتمال أن يكون 7 منهم مصابين بالمرض.
2) احتمال أن يكون جميعهم سالمين.
3) احتمال أن يكون نصفهم مصابا.

نستخدم توزيع ثنائي الحد حيث n=20 و p=0.6 و نعتبر النجاح هو الاصابة بالمرض

تمرين 4 :

احتمال أن يصيب صياد هدفه هو 0.4، يقوم هذا الصياد بعدة طلقات فما هو احتمال أن يصيب الهدف بعد 3 طلقات؟

نستخدم التوزيع الهندسي حيث p=0.4 و k=3

تمرين 5 :

احتمال أن يصيب صاروخ الهدف هو 0.3، فما هو عدد الصواريخ اللازم اطلاقها حتى يكون احتمال اصابة الهدف على الأقل 80%.

يبق للمحاولة

تمرين 6 :

إذا كان متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون محلا تجاريا خلال دقيقة هو 3، فما هو احتمال أن يدخل هذا المحل 4 زبائن فقط خلال دقيقة معينة.

نستخدم توزيع بواسون $\lambda = 3$ **و** $k = 4$

تمرين 7 :

إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية التي ترتكبها احدى السكريتيرات هو 4 أخطاء في الصفحة. فما هو احتمال:

1) أن تطبع صفحة دون أخطاء.
2) أن ترتكب خطأين على الأقل في كتابة احدى الصفحات.

نستخدم توزيع بواسون $\lambda = 4$ **و** $k = 0, k \geq 2$

تمرين 8 :

احتمال سقوط طائرة هو 0.001، أحسب احتمال أنه من بين 2000 طائرة:

1) تسقط ثلاث فقط.
2) تسقط أكثر من اثنتان.

(باستخدام توزيع ثنائي الحد ثم باستخدام توزيع بواسون)

باستخدام ثنائي الحد n=2000 و p=0.001

باستخدام تقريب توزيع بواسون للتوزيع ثنائي الحد $\lambda = np$

تمرين 9 :
مصنع للمصابيح الكهربائية، 2% من انتاجه معيبة. اشترينا 200 مصباحا، ما هو احتمال أن نجد منها: 0، 1، 2، 3 مصابيحا معيبة؟
1) باستخدام توزيع ثنائي الحد.
2) باستخدام توزيع بواسون.

باستخدام ثنائي الحد n=200 و p=0.02

باستخدام تقريب توزيع بواسون_للتوزيع ثنائي الحد $\lambda = np$

تمرين 10 :
ليكن X متغيرا عشوائيا حقيقيا يتبع القانون $N(\mu,\sigma^2)$ ، باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)، أوجد الاحتمالات الآتية:

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma)$$
$$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma)$$
$$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma)$$

ماذا تستنتج؟

تمرين 11 :
إذا كان متوسط أوزان 500 طالبا هو 75.5 كلغ بانحراف معياري 7.5 كلغ، نفترض أن أوزانهم موزعة توزيعا طبيعيا. تنبأ بعدد الطلبة اللذين:
1) أوزانهم بين 60 و 77.5 كلغ.
2) أوزانهم أكثر من 92.5 كلغ.

نحسب $P(60 \le X \le 77.5)$ **و** $P(X > 92.5)$ **ثم نضرب في 500**

تمرين 12 :
نرمي قطعة نقدية متوازنة 20 مرة، أحسب احتمال الحصول على الصورة من 3 إلى 6 مرات و ذلك باستخدام:
1) توزيع ثنائي الحد.
2) تقريب ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي.

في التوزيع ثنائي الحد نأخذ n=20 و p=0.5

باستخدام تقريب توزيع بواسون_للتوزيع ثنائي الحد $\lambda = np$