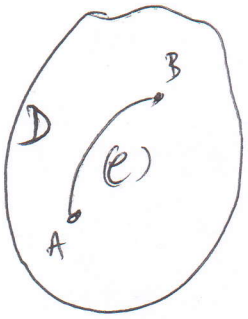
V تكامل الدوال المركبة : الفصل 3

التعريف 1: نعرف مجال D في المستوي المركب ودالة للمتغير المركب z وحيدة القيمة ومستمرة $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ ومتصل كيفي $(\mathcal{C})$ ذو نهايتين A و B.

تكامل الدالة $f(z)$ بين النقطتين A و B على المسار $(\mathcal{C})$



يكتب :

$$\int_{A(\mathcal{C})}^{B(\mathcal{C})} f(z)\,dz = \int_{A(\mathcal{C})}^{B(\mathcal{C})} (U+iV)(dx+i\,dy)$$

$$= \int_{A(\mathcal{C})}^{B(\mathcal{C})} (U\,dx - V\,dy) + i\int_{A(\mathcal{C})}^{B(\mathcal{C})} (V\,dx + U\,dy).$$

قبل التطرق إلى نظرية التكامل نشير إلى الملاحظة في الكهرومغناطيسية والترموديناميك.

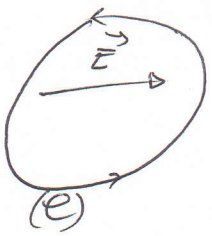
* نعلم أن الحقل الكهربائي هو اشتقاقة لكمون سلمي

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,U(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}$$

تكامل هذا الحقل على منحنى مغلق $(\mathcal{C})$ معدوم. بشرط أن تكون U قابلة للاشتقاق داخل وعلى سطح $(\mathcal{C})$.

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}(x,y)\,d\vec{M} = 0.$$

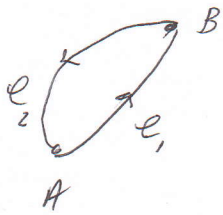
"Théorème de Stokes"



$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E}(x,y)\,d\vec{M} = -\oint_{\mathcal{C}} \vec{\nabla}\,U(x,y)\cdot d\vec{M} = -\oint_{(\mathcal{C})} dU(x,y) = 0.$$

نقسم المنحنى المغلق إلى مسارين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

$$\oint_{(\mathcal{C})} dU(x,y) = 0 = \int_{A(\mathcal{C}_1)}^{B(\mathcal{C}_1)} dU(x,y) + \int_{A(\mathcal{C}_2)}^{B(\mathcal{C}_2)} dU(x,y).$$



$$\int_{A(C_1)}^{B(C_1)} dU(x,y) = -\int_{B(C_2)}^{A(C_2)} dU(x,y) = \int_{A(C_2)}^{B(C_2)} dU(x,y).$$

لهذا يتبين أن التكامل

$$\int_A^B dU = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{M}$$

$$= -\int_A^A (E_x dx + E_y dy)$$

مستقل عن مسار التتبع.

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

بما أن:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

ومنه:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}}$$

وهذا الشرط الكافي يجعل التكامل

$$\int_A^B dU = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{M}.$$

مستقل عن مسار التتبع

$$\int_{A(C)}^{B(C)} (M dx - V dy)$$

$$\int_{A(c)}^{B(c)} f(z)\,dz = \int_{A(c)}^{B(c)} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{A(c)}^{B(c)} (v\,dx + u\,dy).$$

مستقل عن المسار المتبع بشرط.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

والذين يسميان محققين من شروط كوشي-ريمان.

2 نظرية كوشي:

2.1 الصيغة الأولى:

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في كل نقطة من المجال D التكاملات المأخوذة على مسارات تربط نقطتين A و B من المجال D متساوية.

2.2 الصيغة الثانية:

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على مجال "Simplement Connexe" و Γ منحنى مغلق داخل هذا المجال فإن:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

Théorème des résidus = نظرية الرواسب

نظرية كوشي

لكي يكون التابع العقدي $f(z)$ قابلا تحليليا (أي مرنيا) تحقق الشروط كوشي-ريمان

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ حيث

$$\oint_{c \subset D} f(z)\,dz = 0$$

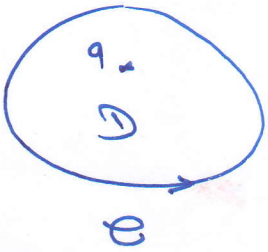
حيث c هو المسار المغلق البسيط في المجال التحليلي D.

نظرية كوشي التابعية

نتيح باستتاج عبارة أساسية والتي تعبر عن قيمة التابع $f(z)$ عند أي نقطة من المجال D داخل

ليكن التابع $f(z)$ قابلا تحليليا في المجال D وليكن c مسارا مغلقا بسيطا في المجال D

وليكن كذلك a عددا عقديا في المجال المغلف بالمسار c.



لنحسب التكامل التالي:

$$\oint_c \frac{f(t)\,dt}{t-a} \qquad t \in \mathbb{C} \qquad a \in D$$

$$\oint_c g(t)\,dt.$$

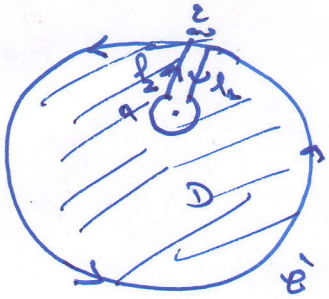
حيث $g(t)$ غير معرفة عند $t = a$

أي: $g(a) = \infty$

نكتب:

D في $g(t)$ معرفة تماما

$$\oint_{c'} g(t)\,dt = 0$$



$$\oint_{c'} g(t)\,dt = \oint_{c'} \frac{f(t)}{t-a}\,dt = 0$$

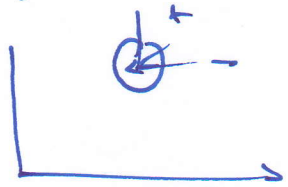
$$= \int_{c-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-a}\,dt + \int_{c_1} \frac{f(t)}{t-a}\,dt + \int_{c_{2-\varepsilon}} \frac{f(t)}{t-a}\,dt + \int_{c_2} \frac{f(t)}{t-a}\,dt$$

عند النهاية $\varepsilon \to 0$

$$0 = \oint_c \frac{f(t)\,dt}{t-a} + \oint_{c_2} \frac{f(t)}{t-a}\,dt \quad \Rightarrow \quad \oint_c \frac{f(t)}{t-a}\,dt = -\int_{c_2} \frac{f(t)}{t-a}\,dt$$

$$\oint_C \frac{f(t)}{t-a}\,dt = \int_{C_r} \frac{f(t)}{t-a}\,dt.$$

على محيط الدائرة C_r التي مركزها a نكتب t بدلالة θ:



$$t = re^{i\theta} + a$$

$$\oint_C \frac{f(t)\,dt}{t-a} = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})\,rie^{i\theta}\,d\theta}{a+re^{i\theta}-a}$$

$$\oint_C \frac{f(t)\,dt}{t-a} = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta = i\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = i f(a)\,2\pi$$

$$\oint_C \frac{f(t)\,dt}{t-a} = 2\pi i f(a)$$

"نظرية كوشي الثانية":

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{t-a}\,dt.$$

* $f(t)$ تحليلية داخل المنطقة المحاطة بالمسار C.

المسار يحوي a.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{t-a}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \quad z\in D.$$

$$\vdots$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}$$

$$f''(z) =$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt.$$