جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2021/2020

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

---

السلسلة رقم 02

---

**التمرين الأول** حدد $T^*$ في الحالات التالية :

(١). $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), Tx(t) = x\left(\frac{t+1}{2}\right)$ .

(٢). $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n, \dots), (\alpha_n) \subset \ell^\infty$

(٣). $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), Tx(t) = a(t)x(t+h), h \in \mathbb{R}$ و $a$ دالة محدودة على $\mathbb{R}$

**التمرين الثاني** ليكن $T : C([-\pi,\pi]) \to \mathbb{R}$.استخرج القيم والاشعة الذاتية في الحالات التالية :

(١). $Tx(t) = x(-t)$

(٢). $Tx(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$ .٢

**التمرين الثالث** ليكن $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), Tx(t) = \int_0^1 \varphi(t)x(t)dt$

(١). اثبت ان $T \in \mathcal{L}(L^2)$.

(٢). اثبت ان $T$ قرين لنفسه

(٣). اثبت انه يوجد $\lambda$ حيث $T^2 = \lambda T$

(٤). احسب نصف القطر الطيفي بدلالة $\lambda$.

**التمرين الرابع**

(١). لتكن $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}),$ حيث $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$
اثبت من اجل كل $\lambda \in \mathbb{C},$ حيث $|\lambda| \leq 1$ هي قيمة ذاتية ل $T$
حدد طيف المؤثر $T$

(٢). ليكن $S : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}),$ حيث $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$
اثبت ان $S$ لاتقبل اي قيمة ذاتية
اثبت ان طيف $S$ دائرة الوحدة المغلقة $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$

**التمرين الخامس** لتكن $(\alpha_n)$ متتالية محدودة في $\mathbb{C}$ و $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ نعرف من اجل $x = (x_n)$ مؤثرا $Tx = (\alpha_n x_n)$

**(١).** اثبت من اجل كل $n \geq 1$ , $(c_n)$ هي قيمة ذاتية

**(٢).** اثبت انه اذا كان $\lambda \notin \overline{\{\alpha_n, n \geq 1\}}$, فان $\lambda \notin \sigma(T)$

**(٣).** استنتج $\sigma(T)$