الفصل الثالث

3. نظرية المتوسط

في هذا الفصل نعتبر $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ، و $\mathbb{E}$ و $\mathbb{F}$ فضاءين شعاعيين حقيقيين .

1.3 نظرية التزايدات المنتهية :

1.1.3 تذكير : نذكر فيما يلي نظرية التزايدات المنتهية بالنسبة لدالة عددية ذات متغير حقيقي .

النظرية 1: اذا كان f تطبيق من المتراص $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ، مستمرة على $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، فانه يوجد على الاقل نقطة c من $]a,b[$ حيث:

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$$

هذه النتيجة تعمم بالنسبة لدالة عددية ذات متغير شعاعي وقبل اعطاء هذه التعميم ، ندرج بعض التعاريف.

2.1.3 تعاريف :

1- ليكن $\mathbb{E}$ فضاء شعاعي ، a و b عنصرين من $\mathbb{E}$.

نسمي قطعة مغلقة (مفتوحة) طرفيها a و b ، المجموعة المرمز لها بـ $[a,b]$ ($]a,b[$) التي عناصرها من $\mathbb{E}$ وعلى الشكل $(1-t)a+tb$ حيث t يتغير في $[0,1]$ ($]0,1[$) .

2- نقول ان جزء من $\mathbb{E}$ محدب اذا كان كلما شمل عنصرين a و b فانه يشمل القطعة $[a,b]$.

امثلة:

1 - اذا كان $\mathbb{E}$ فضاء شعاعي ، كل قطعة من $\mathbb{E}$ محدب، وكل فضاؤ جزئي من $\mathbb{E}$ محدب.

2 - اذا كان $\mathbb{E}$ ف ، ش ، ن . الكرات (المغلقة او المفتوحة) محدبة ، تقاطع الكرات غير منفصلة ، مجموعة محدبة لكن سطوح الكرات ليست محدبة . اتحاد كرات ليس دائما محدبا .

3.1.3 نظرية التزايدات المنتهية : (بالنسبة لدوال ذات متغيرات شعاعية)

النظرية : ليكن التطبيق f من U (مفتوح لـ $\mathbb{R}^n$) نحو $\mathbb{R}$ ، a و b نقطتين من U .

اذا كانت القطعة $[a,b]$ محتواة في U واذا كانت f قابلة للمفاضلة عند كل نقطة من $[a,b]$ ، فانه يوجد $c\in]a,b[$ حيث :

$$\boxed{f(b) = f(a) + Df(c)\,(b-a)} \quad (1)$$

او ايضا : يوضع $b = a+h$ ، يوجد $\theta \in]0,1[$ يحقق :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + Df(a+\theta h)(h)} \quad (2)$$

نلاحظ انه إذا كان $n=1$ نتحصل على النظرية الموجودة في الفقرة 1.1.3 .

باخذ عبارة تفاضلية دالة عددية معرفة على مفتوح من $\mathbb{R}^n$ فان الصيغتين (1) و (2) تكتبان كما يلي:

$$\boxed{f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} (c)}$$

أو :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + \theta h)}$$

البرهان : لإثبات هذه النظرية ، نعتبر الدالة F المعرفة بـ :

$$F : [0,1] \to \mathbb{R} \ \mathrm{R}$$
$$t \to f(a+t(b-a))$$

بما ان التطبيق $t \to f(a+t(b-a))$ تآلفي فهو قابل للاشتقاق و :

$$\boxed{\forall\ t\in[0,1] \quad F'(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x} (a+t(b-a)(b_i-ai))}$$

نستنتج (التركيب) ان F قابلة للمفاضلة على $[0,1]$. نستطيع تطبيق نظرية التزايدات المنتهية بالنسبة لدوال عددية ذات متغير حقيقي ونجد :

$$\exists\, \theta \in]0,1[\qquad F(1) = F(0) + F'(o)$$

أي

$$\exists\, c \in]a,b[: \quad f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - c_i)$$

<u>ملاحظة</u>: اذا عوضنا في النظرية السابقة $\mathbb{R}$ بـ ف ، ش ، ن (بعد $0\rangle 1$) ، ممكن ان تصبح الصيغة (1) خاطئة كما يبينه المثال المضاد التالي :

مثال:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to (x^n, x^{n+1})$$

من اجل $[a,b] = [-1,1]$ ، الدالة f_n لا تحقق الصيغة (1) وهذا بالنسبة لكل n .

ولهذا فيما يلي ستعمم نظرية التزايدات المنتهية بالنسبة لدوال شعاعية .

2.3 <u>نظرية المتوسط</u> :

2.2.3 <u>نظرية رئيسية</u>:

ليكن $[a,b]$ مجال متراص من$\mathbb{R}$ ، $\mathbb{F}$ ف ، ش ، ن و f تطبيق مستمر من $[a,b]$ نحو f و φ تطبيق مستمر من $[a,b]$ نحو$\mathbb{R}$.

نفرض انه من اجل كل x من $]a,b[$ f و g يقبلان مشتقتين $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ تحققان $\|f'(x)\|$.....(1)

فانه لدينا :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a) \ldots\ldots(2)$$

البرهان: نثبت اولا الحالة الخاصة : $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

نثبت $\varepsilon\rangle 0$ كيفي :

بما ان $\forall\, x \in [a,b[\;,\; |f'(x)| \langle\, \varphi'(x) - \varepsilon$

فانه $\forall\, x \in [a,b] \;,\; \exists\, h\rangle 0 \;\; |f(x+h) - f(x)| \langle\, \varphi(x+h) - \varphi(x) + \varepsilon h \ldots\ldots(3)$

نعتبر المجموعة :

$$\mathbb{E}_{\varepsilon} = \{x\in[a,b] \;/\; |f(x) - f(a)| \le \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a)\}$$

نلاحظ ان $\mathbb{E}_{\varepsilon} \neq \varnothing$ لان $a\in\mathbb{E}_{\varepsilon}$ ، ليكن $c = \text{Sup}\ \mathbb{E}_{\varepsilon}$ من (3) لدينا $c\rangle a$ ، نفرض الآن ان $c \notin \mathbb{E}_{\varepsilon}$

أي: $|f(c) - f(a)| \rangle\ \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a)$

وبما ان |f| و φ مستمرين فانه يوجد $\delta\rangle 0$ بحيث :

$$\forall\ x\in[c-\delta , c] : |f(x) - f(a)| \rangle\ \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a)$$

وهذا تناقص مع $c = \text{Sup}\ \mathbb{E}_{\varepsilon}$ ومنه $c\in\text{E}\ \mathbb{E}_{\varepsilon}$

وبفرض ان $c < b$ فان $c\in[a,b[$ ، يوجد اذن حسب العلاقة (3) $h > 0$ بحيث : $c+h\in[a,b]$ و:

$$|f(-h) - f(c)| \le \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon\, h$$

$$| f(c+h) - f(a) | \le | f(c+h) - f(c) | + | f(c) - f(a) |$$

$$\le \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon h + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon\,(c-a)$$

$$\le \varphi(c+h) - \varphi(a) + \varepsilon(c+h-a)$$

أي $c+h\in\ \mathbb{E}_{\varepsilon}$ خلافا للمساواة $\text{Sup}\ \mathbb{E}_{\varepsilon} = c$ ومنه $c = b$ ويجعل ε يؤول الى 0 نجد نتيجة النظرية .

وفي الحالة العامة بدلا من إثبات (2) نثبت ان :

$$\forall\ \varepsilon\rangle 0\ ,\ \forall x\in[a,b]\ \ \|f(x) - f(a)\| \le \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \ \ldots\ldots\ldots.(4)$$

من اجل هذا نعتبر المجموعة :

$$U = \{x\in[a,b] \,/\, \|f(x) - f(a)\| \rangle\ \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon\}$$

ثم نضع :

$$g(x) = \|f(x) - f(a)\| - \varphi(x) - \varphi(a) - \varepsilon(x-a) - \varepsilon$$

نلاحظ ان :

$$U = \{x\in[a,b] \,/\, g(x) \rangle 0\}$$

بما ان g مستمرة فان U مفتوح .

نفرض الآن ان $U\neq\varnothing$

$$\forall x\in U \;,\; x \geq a \;\Rightarrow\; \exists\, c = \inf\; U$$

c يحقق ما يلي:

$c > a$ و $c \notin U$ (لان U مفتوح) و $c < b$ (والا $U=\{b\}$ وبالتالي فهو غير مفتوح)

وبما ان $a < c < b$ فانه يحقق المتباينة (1) أي $\|f'(c)\| \leq \varphi'(c)$

وعليه يوجد مجال $c\leq x \leq c+n$ مع $(n > 0)$ حيث :

$$\|f'(c)\| \geq \left\|\frac{f(x) - f(c)}{x-c}\right\|$$

و
$$\varphi'(c) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}$$

هاتين المتباينتين والمتباينة (3) تؤدي الى :

$$\| f(x) - f(c) \| \leq \varphi(x) - \varphi(c) + \varepsilon(x-c) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

ولكن راينا ان $c\notin U$ أي:

$$f(c) - f(x) \leq \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

من (5) و (6) نستنتج انه من اجل كل $c \leq x \leq c+n$ لدينا :

$$\| f(x) - f(a) \| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$$

$$\leq \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon$$

أي (4) محققة من اجل كل $c \leq x \leq c+n$ ومنه الحد الادنى لـ U اكبر او يساوي $c+n$ ومنه التناقص.

3.2.3 **لازمة:** اذا كانت $f:[a,b]\to F$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و:

$$\exists k\in R_+' \; \|f'(x)\| \leq k \qquad \forall x\in]a,b[$$

فان $\|f(b)-f(a)\| \leq k(b-a)$

وبصفة عامة:

$$\forall x_1,x_2 \in]a,b[\; \|f(x_2)-f(x_1)\| \leq k(x_2-x_1)$$

البرهان: نستعمل النظرية السابقة وذلك بأخذ $\varphi(x) = kx$ وعليه $\varphi'(x)=k$ أي:

$$\forall x\in]a,b[\quad \|f'(x)\| \leq g'(x)$$
$$\leq k$$

فان : $\|f(b)-f(a)\| \leq kb - ka$
$$\leq k(b-a)$$

وبصفة عامة ناخذ $x_2 = b$ و $x_1 = a$

4.2.3 نظرية التزايدات المنتهية :

U مفتوح محدب من E $\quad f: U\to F$ قابلة للمفاضلة وتحقق :

$$\forall x\in U \quad \|Df(x)\| \leq k \quad / \quad k\in\mathbb{R}_+$$

اذن :

$$\boxed{\forall x_1,x_2 \in U \quad \|f(x_2)-f(x_1)\| \leq k \; \|x_2-x_1\|} \quad ....(*)$$

ملاحظة: اذا كانت f تحقق العلاقة (*) نقول ان f ليبشيتزية على U و k ثابت ليشيتز.

من اجل البرهان على هذه النظرية نحتاج الى الخاصية التالية:

خاصية1: لتكن $f: U\to F$ قابلة للمفاضلة إذن $\|f(b)-f(a)\| \leq \|b-a\| \sup_{t\in[0,1]} Df[(1-t)a+tb]$

البرهان: نستعمل اللازمة ونعتبر $h(t) = f((1-t)a+tb)$:

$$h : [0,1] \to U \to F$$

$$t \to (1-t)a+tb \to f((1-t)a+tb)$$

h هي تركيب تطبيقين قابلين للاشتقاق ومنه فهس قابلة للاشتقاق و :

$$Dh(t) = Df((1-t)a+tb)(b-a)$$

$$\leq \|Df((1-t)a+tb)\| \ \|Df((1-t)a+tb)\|$$

$$\leq \|b-a\| \sup_{t\in[0,1]} \|Df((1-t)a+tb)\|$$

يوضع $\longleftarrow$ $k = \|b-a\| \sup_{t\in[0,1]} \|Df((1-t)a+tb)\|$

h تحقق شروط اللازمة ومنه : $\|h(1)-h(0)\| \leq k(0,1)$

وبما ان $h(0) = f(a)$ و $h(1) = h(b)$ نتحصل على $\|f(b) - f(a)\| \leq k$

ومنه $\|f(b)-f(a)\| \leq \|b-a\| \ \mathrm{Sup} \ \|Df((1-t)a+tb)\|$

برهان نظرية 1:

باستعمال الخاصية السابقة : x_1 و x_2 عنصرين من U وبما ان U محدب فان $[x_1,x_2] \subset U$

$$\| f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|x_2-x_1\| \sup_{t\in[0,1]} \|Df((1-t)a+tb)\|$$

لازمة2 : تحت فرضيات النظرية 1 اذا مانت $k = 0$ أي $\forall x \in U \quad Df(x) = 0$ فان f ثابتة على U .

البرهان : فعلا اذا كانت $k = 0$ فان:

$$\forall x_1,x_2 \in U \qquad \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x2) - f(x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

ومنه f ثابتة على U

3.3 تمارين :

التمرين 1 : لتكن f دالة عددية معرفة مستمرة على المجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ حيث :

1 - اثبت ان $|f(b) - f(a)| \geq \alpha\ (b-a)$

2 - اثبت ان المشتقة $f'(x_0)$ ، x_0 عنصر من $]a,b[$ نقطة لاصقة لـ $f'(x)$ عندما x يؤول الى x_0

3 - بين ان هذه النتيجة ليست صحيحة بالنسبة لدالة شعاعية في ف ش ن ذو بعد $\rangle$ 1.

ناخذ $f = (f_1,f_2)$ مع :

$$f_1(x) = x^2 \sin \frac{1}{2} \quad / \quad x \neq 0 \quad ، f_1(0) = 0$$

$$f_2(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \quad / \quad x \neq 0 \quad ، f_2(0) = 0$$

التمرين 2 : ليكن U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{E}$ ف ش ن و f تطبيق من U نحو $\mathbb{E}$ مشتقات جزئية $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, i=1,..,n \right)$ محدودة بين f مستمرة على U .

التمرين 3 : ليكن $\mathbb{E}$ ، F فضاءين شعاعين نظيمين U مفتوح من $\mathbb{E}$ و f تطبيق قابل للمفاضلة من U نحو F .

1) نفرض ان f k – ليبشيتزي على U ، بين اذن ان $\sup\limits_{x \in U} \|Df(x)\| \leq k$

2) نفرض ان : $\sup \|Df(x)\| \leq k$

بين اذن ان kf – ليبشيتزي على كل محدب محتوى في U .

4.3 حل التمارين :

حل التمرين 1 :

1) لدينا نظرية التزايدات المنتهية .

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad / \quad c \in]a,b[$$

وعليه :
$$\frac{|f(b)-f(a)|}{b-a} = |f'(c)| \geq \alpha$$

و
$$|f(b)-f(a)| \geq \alpha\,(b-a)$$

2) نستعمل استدلال بالخلف (f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$، مستمرة على $[a,b]$) . نفرض ان $f'(x_0)$ ليست نقطة لاصقة لـ $f'(x)$ عندما x يؤول الى x_0 . يوجد $0 \rangle \varepsilon$ و $0 \rangle n$ حيث من اجل $||x-x_0|| \leq n$ لدينا $|f'(x) - f'(x_0)| \geq \varepsilon$ فاذن يوضع $g(x) = f(x) - (x-x_0)\, f'(x_0)$ نجد $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ وبالتالي : $|g'(x)| = \varepsilon$ من اجل $|x-x_0| \leq n$

اذن $|g(x) - g(x_0)| \geq \varepsilon|x-x_0|$ من اجل $|x-x_0| \leq n$

أي $|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)| \geq \varepsilon|x-x_0|$ من اجل $|x-x_0| \leq n$.

وهذا ما يناقص $f'(x_0)$ مشتقة f عند x_0 .

3) لدينا من اجل $x \neq 0$

$$f'_1(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$f_2'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

نزود $\mathbb{R}^2$ بالنظيم الاقليدي ، نجد اذن :

$$||f'(x)||^2 = f_1'(x)_2 = 1+4x^2 \rangle 1$$

ومن جهة اخرى :

$$F1'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$F2'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

ومنه : $\|f'(0)\|^2 = 0$

وعليه $f'(0)$ نقطة معزولة لان من اجل $x \neq 0$ $f'(x)$ تبقى خارج الدائرة ذات المركز $f'(0)$ ونصف القطر 1 .

حل التمرين 2 :

نثبت ان f مستمرة عن كل نقطة من U :

بما ان $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ محدودة من اجل $i = 1,..,n$ بضع

$$M = \max_{1 \le i \le n} \sup_{x \in U} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|$$

ليكن $a = (a_1,\ldots,a_n)$ منبت في U و B كرة (بالنسبة للنظيم max) مفتوحة ذات مركز a ، محتواة في U (U مفتوح).

من جهة اخرى ليكن $x = (x_1,\ldots,x_n)$ عنصر كيفي من B نضع $X_1=a$ ، $X_{n+1}=x$ و $X_k(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,\ldots,a_n)$ محتواة من B لان :

$$\|X_k-a\| = \max_{2\le i \le k-1} |x_i-a_i| \le \|x-a\|_\infty \quad , \quad \forall k = 2,\ldots\ldots,n-1$$

لدينا :

$$f(x)-f(a) = \sum_{k=1}^{n} [\, f(X_{k+1}) - f(X_k) \,] \qquad (*)$$

نظرية المتوسط تسمح لنا بكتابة :

$$\|f(X_{k+1}) - f(X_k)\| \le \sup_{t\in[X_{k+1},X_k]} \|D_k f(t)\| \; |x_k - a_k| \le M|x_k - a_k| \qquad (**)$$

باستعمال العلاقتين (*) و (**) نتحصل على :

$$\|f(x) - f(a)\| \le M \sum_{k=1}^{n} |x_k - a_k| = M \|x-a\|_\infty$$

وعليه : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

وهذا ما يوضح استمرارية f عند كل نقطة a من U .

حل التمرين 3 :

1) ليكن a مثبت في U .

اذا كانت f k - ليشيتزية على U فانه :

من اجل كل t صغير كفاية :

$$\boxed{\|f(x) - f(x+ty)\| \leq k\|ty\| \qquad \forall\, y \in \mathbb{E}} \qquad (*)$$

باستعمال المتباينة (*) وتفاضلية f ، نتحصل على :

$$\text{Lim} \left\| \frac{f(x) - f(x+ty)}{t} \right\| \leq k\|y\| \qquad \forall\, y \in \mathbb{E}$$

او ايضا :

$$\boxed{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(y) \right\| = \|Df(x)(y)\| \leq k\|y\| \qquad \forall\, y \in E}$$

وبما ان $Df(x) \in L(E,F)$ ، العلاقة (**) تستلزم : $\|Df(x)\| \leq k$

ومنه: $\sup\limits_{x \in U} \|Df(x)\| \leq k$

2) ليكن D محدب محتوى في U :

من اجل x و y في D ، لدينا $[x,y] \subset D$ ، نظرية المتوسط تسمح لنا بكتابة :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{t \in [x,y]} \|Df(t)\| \,,\, \|x-y\| \leq k\|x-y\|$$

وعليه من اجل كل محدب D محتوى في U ، لدينا :

$$\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\| \qquad \forall\, (x,y) \in D^2$$