

الفصل الثالث

3. نظرية المتوسط

في هذا الفصل نعتبر $K = \mathbb{R}$ ، و E و F فضاءين شعاعيين حقيقيين .

1.3 نظرية التزايد المنتهية :

1.1.3 تذكير : نذكر فيما يلي نظرية التزايد المنتهية بالنسبة لدالة عددية ذات متغير حقيقي .

النظرية 1: اذا كان f تطبيق من المتراص $[a,b]$ في \mathbb{R} نحو \mathbb{R} ، مستمرة على $[a,b]$ ،

وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، فانه يوجد على الاقل نقطة c من $]a,b[$ حيث:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

هذه النتيجة تعمم بالنسبة لدالة عددية ذات متغير شعاعي وقبل اعطاء هذه التعميم ، ندرج بعض التعاريف.

2.1.3 تعاريف :

1- ليكن E فضاء شعاعي ، a و b عنصرين من E .

نسمي قطعة مغلقة (مفتوحة) طرفيها a و b ، المجموعة المرمز لها بـ $[a,b]$ ($]a,b[$) التي عناصرها من E وعلى الشكل $(1-t)a+tb$ حيث t يتغير في $[0,1]$ ($]0,1[$) .

2- نقول ان جزء من E محدب اذا كان كلما شمل عنصرين a و b فانه يشمل القطعة $[a,b]$.

امثلة:

1 - اذا كان E فضاء شعاعي ، كل قطعة من E محدب، وكل فضاؤ جزئي من E محدب.

2 - اذا كان E فضاء شعاعي ، ش ، ن . الكرات (المغلقة او المفتوحة) محدبة ، تقاطع الكرات غير منفصلة ،

مجموعة محدبة لكن سطوح الكرات ليست محدبة . اتحاد كرات ليس دائما محدبا .

3.1.3 نظرية التزايد المتهية : (بالنسبة لدوال ذات متغيرات شعاعية)

النظرية : ليكن التطبيق f من U (مفتوح $U \subset \mathbb{R}^n$) نحو \mathbb{R} ، a و b نقطتين من U .

إذا كانت القطعة $[a,b]$ محتواة في U وإذا كانت f قابلة للمفاضلة عند كل نقطة من $[a,b]$ ، فإنه يوجد

$c \in]a,b[$ حيث :

$$(1) \quad f(b) = f(a) + Df(c) (b-a)$$

أو أيضا : يوضع $b = a+h$ ، يوجد $\theta \in]0,1[$ يحقق :

$$(2) \quad f(a+h) = f(a) + Df(a+\theta h)(h)$$

نلاحظ انه إذا كان $n=1$ نتحصل على النظرية الموجودة في الفقرة 1.1.3 .

باخذ عبارة تفاضلية دالة عددية معرفة على مفتوح من \mathbb{R}^n فان الصيغتين (1) و (2) نكتبان كما يلي:

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} (c)$$

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + \theta h)$$

أو :

البرهان : لإثبات هذه النظرية ، نعتبر الدالة F المعرفة بـ :

$$F : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow f(a+t(b-a))$$

بما ان التطبيق $t \rightarrow f(a+t(b-a))$ تآلفي فهو قابل للاشتقاق و :

$$\forall t \in [0,1] \quad F'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (a+t(b-a)(b_i-a_i))$$

نستنتج (التركيب) ان F قابلة للمفاضلة على $[0,1]$. نستطيع تطبيق نظرية التزايد المتناهية بالنسبة لدوال عددية ذات متغير حقيقي ونجد :

$$\exists \theta \in]0,1[\quad F(1) = F(0) + F'(\theta)$$

$$\exists c \in]a,b[: \quad f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - c_i) \quad \text{أي}$$

ملاحظة: اذا عوضنا في النظرية السابقة R بـ f ، $ش$ ، $ن$ (بعد $\langle 0,1 \rangle$) ، ممكن ان تصبح الصيغة (1) خاطئة كما يبينه المثال المضاد التالي :

مثال: $f_n : R \rightarrow R^2$

$$x \rightarrow (x^n, x^{n+1})$$

من اجل $[a,b] = [-1,1]$ ، الدالة f_n لا تحقق الصيغة (1) وهذا بالنسبة لكل n . ولهذا فيما يلي ستعمم نظرية التزايد المتناهية بالنسبة لدوال شعاعية .

2.3 نظرية المتوسط :

2.2.3 نظرية رئيسية:

ليكن $[a,b]$ مجال متراص من R ، F ، $ش$ ، $ن$ و f تطبيق مستمر من $[a,b]$ نحو φ تطبيق مستمر من $[a,b]$ نحو R .

نفرض انه من اجل كل x من $]a,b[$ و f و g يقبلان مشتقتين $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ تحققان $\|f'(x)\| \dots (1)$ فانه لدينا :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a) \dots (2)$$

البرهان: نثبت اولا الحالة الخاصة : $F = R$

نثبت $\varepsilon > 0$ كيفي :

$$\forall x \in]a,b[, |f'(x)| < \varphi'(x) - \varepsilon \quad \text{بما ان}$$

$$\forall x \in]a,b[, \exists h > 0 |f(x+h) - f(x)| < \varphi(x+h) - \varphi(x) + \varepsilon h \dots (3) \quad \text{فانه}$$

نعتبر المجموعة :

$$E_\varepsilon = \{x \in [a, b] / |f(x) - f(a)| \leq \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a)\}$$

نلاحظ ان $E_\varepsilon \neq \emptyset$ لان $a \in E_\varepsilon$ ، ليكن $c = \text{Sup } E_\varepsilon$ من (3) لدينا $a < c$ ، نفرض الآن ان $c \notin E_\varepsilon$

$$|f(c) - f(a)| > \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a) \quad \text{أي:}$$

وبما ان $|f|$ و φ مستمرين فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث :

$$\forall x \in [c-\delta, c] : |f(x) - f(a)| > \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a)$$

وهذا تناقض مع $c = \text{Sup } E_\varepsilon$ ومنه $c \in E_\varepsilon$

وبفرض ان $c < b$ فان $c \in [a, b[$ ، يوجد اذن حسب العلاقة (3) $h > 0$ بحيث : $c+h \in [a, b]$ و :

$$|f(c+h) - f(c)| \leq \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon h$$

$$|f(c+h) - f(a)| \leq |f(c+h) - f(c)| + |f(c) - f(a)|$$

$$\leq \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon h + \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c-a)$$

$$\leq \varphi(c+h) - \varphi(a) + \varepsilon(c+h-a)$$

أي $c+h \in E_\varepsilon$ خلافا للمساواة $c = \text{Sup } E_\varepsilon$ ومنه $c = b$ ويجعل ε يؤول الى 0 نجد نتيجة

النظرية .

وفي الحالة العامة بدلا من إثبات (2) نثبت ان :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b] \quad \|f(x) - f(a)\| \leq \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon \dots\dots\dots(4)$$

من اجل هذا نعتبر المجموعة :

$$U = \{x \in [a, b] / \|f(x) - f(a)\| > \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon\}$$

ثم نضع :

$$g(x) = \|f(x) - f(a)\| - \varphi(x) - \varphi(a) - \varepsilon(x-a) - \varepsilon$$

نلاحظ ان :

$$U = \{x \in [a, b] / g(x) > 0\}$$

بما ان g مستمرة فان U مفتوح .

نفرض الآن ان $U \neq \emptyset$

$$\forall x \in U, x \geq a \Rightarrow \exists c = \inf U$$

c يحقق ما يلي:

$c > a$ و $c \notin U$ (لان U مفتوح) و $c < b$ (والا $U = \{b\}$ وبالتالي فهو غير مفتوح)

وبما ان $a < c < b$ فانه يحقق المتباينة (1) أي $\|f'(c)\| \leq \varphi'(c)$

وعليه يوجد مجال $c \leq x \leq c+n$ مع $(n > 0)$ حيث :

$$\|f'(c)\| \geq \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\|$$

$$\varphi'(c) \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و}$$

هاتين المتباينتين والمتباينة (3) تؤدي الى :

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \varphi(x) - \varphi(c) + \varepsilon(x - c) \dots\dots\dots(5)$$

ولكن راينا ان $c \notin U$ أي:

$$f(c) - f(x) \leq \varphi(c) - \varphi(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \dots\dots\dots(6)$$

من (5) و (6) نستنتج انه من اجل كل $c \leq x \leq c+n$ لدينا :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq \varphi(x) - \varphi(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \end{aligned}$$

أي (4) محققة من اجل كل $c \leq x \leq c+n$ ومنه الحد الادنى لـ U اكبر او يساوي $c+n$ ومنه

التناقص.

3.2.3 لازمة: اذا كانت $f: [a, b] \rightarrow F$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $]a, b[$ و:

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad \|f'(x)\| \leq k \quad \forall x \in]a, b[$$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k(b-a) \quad \text{فان}$$

وبصفة عامة:

$$\forall x_1, x_2 \in]a, b[\quad \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k(x_2 - x_1)$$

البرهان: نستعمل النظرية السابقة وذلك بأخذ $\varphi(x) = kx$ و عليه $\varphi'(x) = k$ أي:

$$\forall x \in]a, b[\quad \|f'(x)\| \leq g'(x)$$

$$\leq k$$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq kb - ka \quad \text{فان}$$

$$\leq k(b-a)$$

وبصفة عامة نأخذ $x_2 = b$ و $x_1 = a$

4.2.3 نظرية التزايدات المنتهية:

U مفتوح محدب من E $f: U \rightarrow F$ قابلة للمفاضلة وتحقق:

$$\forall x \in U \quad \|Df(x)\| \leq k \quad / \quad k \in \mathbb{R}_+$$

$$\forall x_1, x_2 \in U \quad \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq k \|x_2 - x_1\| \quad \text{اذن:} \quad \dots\dots\dots (*)$$

ملاحظة: اذا كانت f تحقق العلاقة (*) نقول ان f لبيشيتزية على U و k ثابت ليشيتز.

من اجل البرهان على هذه النظرية نحتاج الى الخاصية التالية:

خاصية 1: لتكن $f: U \rightarrow F$ قابلة للمفاضلة (ذن U مفتوح محدب) و $k \in \mathbb{R}_+$ ثابت ليشيتز. لتكن $a, b \in U$ و $t \in [0, 1]$ و $x = (1-t)a + tb$ و $y = (1-t)b + ta$ و $z = (1-t)x + ty$ و $w = (1-t)z + tx$ و $v = (1-t)w + tz$ و $u = (1-t)v + tw$ و $s = (1-t)u + tv$ و $r = (1-t)s + tu$ و $q = (1-t)r + tq$ و $p = (1-t)q + tp$ و $m = (1-t)p + tm$ و $l = (1-t)m + tl$ و $k = (1-t)l + tk$ و $j = (1-t)k + tj$ و $i = (1-t)j + ti$ و $h = (1-t)i + th$ و $g = (1-t)h + tg$ و $f = (1-t)g + tf$ و $e = (1-t)f + te$ و $d = (1-t)e + td$ و $c = (1-t)d + tc$ و $b = (1-t)c + tb$ و $a = (1-t)a + ta$ و $0 = (1-t)0 + t0$ و $1 = (1-t)1 + t1$ و $2 = (1-t)2 + t2$ و $3 = (1-t)3 + t3$ و $4 = (1-t)4 + t4$ و $5 = (1-t)5 + t5$ و $6 = (1-t)6 + t6$ و $7 = (1-t)7 + t7$ و $8 = (1-t)8 + t8$ و $9 = (1-t)9 + t9$ و $10 = (1-t)10 + t10$ و $11 = (1-t)11 + t11$ و $12 = (1-t)12 + t12$ و $13 = (1-t)13 + t13$ و $14 = (1-t)14 + t14$ و $15 = (1-t)15 + t15$ و $16 = (1-t)16 + t16$ و $17 = (1-t)17 + t17$ و $18 = (1-t)18 + t18$ و $19 = (1-t)19 + t19$ و $20 = (1-t)20 + t20$ و $21 = (1-t)21 + t21$ و $22 = (1-t)22 + t22$ و $23 = (1-t)23 + t23$ و $24 = (1-t)24 + t24$ و $25 = (1-t)25 + t25$ و $26 = (1-t)26 + t26$ و $27 = (1-t)27 + t27$ و $28 = (1-t)28 + t28$ و $29 = (1-t)29 + t29$ و $30 = (1-t)30 + t30$ و $31 = (1-t)31 + t31$ و $32 = (1-t)32 + t32$ و $33 = (1-t)33 + t33$ و $34 = (1-t)34 + t34$ و $35 = (1-t)35 + t35$ و $36 = (1-t)36 + t36$ و $37 = (1-t)37 + t37$ و $38 = (1-t)38 + t38$ و $39 = (1-t)39 + t39$ و $40 = (1-t)40 + t40$ و $41 = (1-t)41 + t41$ و $42 = (1-t)42 + t42$ و $43 = (1-t)43 + t43$ و $44 = (1-t)44 + t44$ و $45 = (1-t)45 + t45$ و $46 = (1-t)46 + t46$ و $47 = (1-t)47 + t47$ و $48 = (1-t)48 + t48$ و $49 = (1-t)49 + t49$ و $50 = (1-t)50 + t50$ و $51 = (1-t)51 + t51$ و $52 = (1-t)52 + t52$ و $53 = (1-t)53 + t53$ و $54 = (1-t)54 + t54$ و $55 = (1-t)55 + t55$ و $56 = (1-t)56 + t56$ و $57 = (1-t)57 + t57$ و $58 = (1-t)58 + t58$ و $59 = (1-t)59 + t59$ و $60 = (1-t)60 + t60$ و $61 = (1-t)61 + t61$ و $62 = (1-t)62 + t62$ و $63 = (1-t)63 + t63$ و $64 = (1-t)64 + t64$ و $65 = (1-t)65 + t65$ و $66 = (1-t)66 + t66$ و $67 = (1-t)67 + t67$ و $68 = (1-t)68 + t68$ و $69 = (1-t)69 + t69$ و $70 = (1-t)70 + t70$ و $71 = (1-t)71 + t71$ و $72 = (1-t)72 + t72$ و $73 = (1-t)73 + t73$ و $74 = (1-t)74 + t74$ و $75 = (1-t)75 + t75$ و $76 = (1-t)76 + t76$ و $77 = (1-t)77 + t77$ و $78 = (1-t)78 + t78$ و $79 = (1-t)79 + t79$ و $80 = (1-t)80 + t80$ و $81 = (1-t)81 + t81$ و $82 = (1-t)82 + t82$ و $83 = (1-t)83 + t83$ و $84 = (1-t)84 + t84$ و $85 = (1-t)85 + t85$ و $86 = (1-t)86 + t86$ و $87 = (1-t)87 + t87$ و $88 = (1-t)88 + t88$ و $89 = (1-t)89 + t89$ و $90 = (1-t)90 + t90$ و $91 = (1-t)91 + t91$ و $92 = (1-t)92 + t92$ و $93 = (1-t)93 + t93$ و $94 = (1-t)94 + t94$ و $95 = (1-t)95 + t95$ و $96 = (1-t)96 + t96$ و $97 = (1-t)97 + t97$ و $98 = (1-t)98 + t98$ و $99 = (1-t)99 + t99$ و $100 = (1-t)100 + t100$ و $101 = (1-t)101 + t101$ و $102 = (1-t)102 + t102$ و $103 = (1-t)103 + t103$ و $104 = (1-t)104 + t104$ و $105 = (1-t)105 + t105$ و $106 = (1-t)106 + t106$ و $107 = (1-t)107 + t107$ و $108 = (1-t)108 + t108$ و $109 = (1-t)109 + t109$ و $110 = (1-t)110 + t110$ و $111 = (1-t)111 + t111$ و $112 = (1-t)112 + t112$ و $113 = (1-t)113 + t113$ و $114 = (1-t)114 + t114$ و $115 = (1-t)115 + t115$ و $116 = (1-t)116 + t116$ و $117 = (1-t)117 + t117$ و $118 = (1-t)118 + t118$ و $119 = (1-t)119 + t119$ و $120 = (1-t)120 + t120$ و $121 = (1-t)121 + t121$ و $122 = (1-t)122 + t122$ و $123 = (1-t)123 + t123$ و $124 = (1-t)124 + t124$ و $125 = (1-t)125 + t125$ و $126 = (1-t)126 + t126$ و $127 = (1-t)127 + t127$ و $128 = (1-t)128 + t128$ و $129 = (1-t)129 + t129$ و $130 = (1-t)130 + t130$ و $131 = (1-t)131 + t131$ و $132 = (1-t)132 + t132$ و $133 = (1-t)133 + t133$ و $134 = (1-t)134 + t134$ و $135 = (1-t)135 + t135$ و $136 = (1-t)136 + t136$ و $137 = (1-t)137 + t137$ و $138 = (1-t)138 + t138$ و $139 = (1-t)139 + t139$ و $140 = (1-t)140 + t140$ و $141 = (1-t)141 + t141$ و $142 = (1-t)142 + t142$ و $143 = (1-t)143 + t143$ و $144 = (1-t)144 + t144$ و $145 = (1-t)145 + t145$ و $146 = (1-t)146 + t146$ و $147 = (1-t)147 + t147$ و $148 = (1-t)148 + t148$ و $149 = (1-t)149 + t149$ و $150 = (1-t)150 + t150$ و $151 = (1-t)151 + t151$ و $152 = (1-t)152 + t152$ و $153 = (1-t)153 + t153$ و $154 = (1-t)154 + t154$ و $155 = (1-t)155 + t155$ و $156 = (1-t)156 + t156$ و $157 = (1-t)157 + t157$ و $158 = (1-t)158 + t158$ و $159 = (1-t)159 + t159$ و $160 = (1-t)160 + t160$ و $161 = (1-t)161 + t161$ و $162 = (1-t)162 + t162$ و $163 = (1-t)163 + t163$ و $164 = (1-t)164 + t164$ و $165 = (1-t)165 + t165$ و $166 = (1-t)166 + t166$ و $167 = (1-t)167 + t167$ و $168 = (1-t)168 + t168$ و $169 = (1-t)169 + t169$ و $170 = (1-t)170 + t170$ و $171 = (1-t)171 + t171$ و $172 = (1-t)172 + t172$ و $173 = (1-t)173 + t173$ و $174 = (1-t)174 + t174$ و $175 = (1-t)175 + t175$ و $176 = (1-t)176 + t176$ و $177 = (1-t)177 + t177$ و $178 = (1-t)178 + t178$ و $179 = (1-t)179 + t179$ و $180 = (1-t)180 + t180$ و $181 = (1-t)181 + t181$ و $182 = (1-t)182 + t182$ و $183 = (1-t)183 + t183$ و $184 = (1-t)184 + t184$ و $185 = (1-t)185 + t185$ و $186 = (1-t)186 + t186$ و $187 = (1-t)187 + t187$ و $188 = (1-t)188 + t188$ و $189 = (1-t)189 + t189$ و $190 = (1-t)190 + t190$ و $191 = (1-t)191 + t191$ و $192 = (1-t)192 + t192$ و $193 = (1-t)193 + t193$ و $194 = (1-t)194 + t194$ و $195 = (1-t)195 + t195$ و $196 = (1-t)196 + t196$ و $197 = (1-t)197 + t197$ و $198 = (1-t)198 + t198$ و $199 = (1-t)199 + t199$ و $200 = (1-t)200 + t200$ و $201 = (1-t)201 + t201$ و $202 = (1-t)202 + t202$ و $203 = (1-t)203 + t203$ و $204 = (1-t)204 + t204$ و $205 = (1-t)205 + t205$ و $206 = (1-t)206 + t206$ و $207 = (1-t)207 + t207$ و $208 = (1-t)208 + t208$ و $209 = (1-t)209 + t209$ و $210 = (1-t)210 + t210$ و $211 = (1-t)211 + t211$ و $212 = (1-t)212 + t212$ و $213 = (1-t)213 + t213$ و $214 = (1-t)214 + t214$ و $215 = (1-t)215 + t215$ و $216 = (1-t)216 + t216$ و $217 = (1-t)217 + t217$ و $218 = (1-t)218 + t218$ و $219 = (1-t)219 + t219$ و $220 = (1-t)220 + t220$ و $221 = (1-t)221 + t221$ و $222 = (1-t)222 + t222$ و $223 = (1-t)223 + t223$ و $224 = (1-t)224 + t224$ و $225 = (1-t)225 + t225$ و $226 = (1-t)226 + t226$ و $227 = (1-t)227 + t227$ و $228 = (1-t)228 + t228$ و $229 = (1-t)229 + t229$ و $230 = (1-t)230 + t230$ و $231 = (1-t)231 + t231$ و $232 = (1-t)232 + t232$ و $233 = (1-t)233 + t233$ و $234 = (1-t)234 + t234$ و $235 = (1-t)235 + t235$ و $236 = (1-t)236 + t236$ و $237 = (1-t)237 + t237$ و $238 = (1-t)238 + t238$ و $239 = (1-t)239 + t239$ و $240 = (1-t)240 + t240$ و $241 = (1-t)241 + t241$ و $242 = (1-t)242 + t242$ و $243 = (1-t)243 + t243$ و $244 = (1-t)244 + t244$ و $245 = (1-t)245 + t245$ و $246 = (1-t)246 + t246$ و $247 = (1-t)247 + t247$ و $248 = (1-t)248 + t248$ و $249 = (1-t)249 + t249$ و $250 = (1-t)250 + t250$ و $251 = (1-t)251 + t251$ و $252 = (1-t)252 + t252$ و $253 = (1-t)253 + t253$ و $254 = (1-t)254 + t254$ و $255 = (1-t)255 + t255$ و $256 = (1-t)256 + t256$ و $257 = (1-t)257 + t257$ و $258 = (1-t)258 + t258$ و $259 = (1-t)259 + t259$ و $260 = (1-t)260 + t260$ و $261 = (1-t)261 + t261$ و $262 = (1-t)262 + t262$ و $263 = (1-t)263 + t263$ و $264 = (1-t)264 + t264$ و $265 = (1-t)265 + t265$ و $266 = (1-t)266 + t266$ و $267 = (1-t)267 + t267$ و $268 = (1-t)268 + t268$ و $269 = (1-t)269 + t269$ و $270 = (1-t)270 + t270$ و $271 = (1-t)271 + t271$ و $272 = (1-t)272 + t272$ و $273 = (1-t)273 + t273$ و $274 = (1-t)274 + t274$ و $275 = (1-t)275 + t275$ و $276 = (1-t)276 + t276$ و $277 = (1-t)277 + t277$ و $278 = (1-t)278 + t278$ و $279 = (1-t)279 + t279$ و $280 = (1-t)280 + t280$ و $281 = (1-t)281 + t281$ و $282 = (1-t)282 + t282$ و $283 = (1-t)283 + t283$ و $284 = (1-t)284 + t284$ و $285 = (1-t)285 + t285$ و $286 = (1-t)286 + t286$ و $287 = (1-t)287 + t287$ و $288 = (1-t)288 + t288$ و $289 = (1-t)289 + t289$ و $290 = (1-t)290 + t290$ و $291 = (1-t)291 + t291$ و $292 = (1-t)292 + t292$ و $293 = (1-t)293 + t293$ و $294 = (1-t)294 + t294$ و $295 = (1-t)295 + t295$ و $296 = (1-t)296 + t296$ و $297 = (1-t)297 + t297$ و $298 = (1-t)298 + t298$ و $299 = (1-t)299 + t299$ و $300 = (1-t)300 + t300$ و $301 = (1-t)301 + t301$ و $302 = (1-t)302 + t302$ و $303 = (1-t)303 + t303$ و $304 = (1-t)304 + t304$ و $305 = (1-t)305 + t305$ و $306 = (1-t)306 + t306$ و $307 = (1-t)307 + t307$ و $308 = (1-t)308 + t308$ و $309 = (1-t)309 + t309$ و $310 = (1-t)310 + t310$ و $311 = (1-t)311 + t311$ و $312 = (1-t)312 + t312$ و $313 = (1-t)313 + t313$ و $314 = (1-t)314 + t314$ و $315 = (1-t)315 + t315$ و $316 = (1-t)316 + t316$ و $317 = (1-t)317 + t317$ و $318 = (1-t)318 + t318$ و $319 = (1-t)319 + t319$ و $320 = (1-t)320 + t320$ و $321 = (1-t)321 + t321$ و $322 = (1-t)322 + t322$ و $323 = (1-t)323 + t323$ و $324 = (1-t)324 + t324$ و $325 = (1-t)325 + t325$ و $326 = (1-t)326 + t326$ و $327 = (1-t)327 + t327$ و $328 = (1-t)328 + t328$ و $329 = (1-t)329 + t329$ و $330 = (1-t)330 + t330$ و $331 = (1-t)331 + t331$ و $332 = (1-t)332 + t332$ و $333 = (1-t)333 + t333$ و $334 = (1-t)334 + t334$ و $335 = (1-t)335 + t335$ و $336 = (1-t)336 + t336$ و $337 = (1-t)337 + t337$ و $338 = (1-t)338 + t338$ و $339 = (1-t)339 + t339$ و $340 = (1-t)340 + t340$ و $341 = (1-t)341 + t341$ و $342 = (1-t)342 + t342$ و $343 = (1-t)343 + t343$ و $344 = (1-t)344 + t344$ و $345 = (1-t)345 + t345$ و $346 = (1-t)346 + t346$ و $347 = (1-t)347 + t347$ و $348 = (1-t)348 + t348$ و $349 = (1-t)349 + t349$ و $350 = (1-t)350 + t350$ و $351 = (1-t)351 + t351$ و $352 = (1-t)352 + t352$ و $353 = (1-t)353 + t353$ و $354 = (1-t)354 + t354$ و $355 = (1-t)355 + t355$ و $356 = (1-t)356 + t356$ و $357 = (1-t)357 + t357$ و $358 = (1-t)358 + t358$ و $359 = (1-t)359 + t359$ و $360 = (1-t)360 + t360$ و $361 = (1-t)361 + t361$ و $362 = (1-t)362 + t362$ و $363 = (1-t)363 + t363$ و $364 = (1-t)364 + t364$ و $365 = (1-t)365 + t365$ و $366 = (1-t)366 + t366$ و $367 = (1-t)367 + t367$ و $368 = (1-t)368 + t368$ و $369 = (1-t)369 + t369$ و $370 = (1-t)370 + t370$ و $371 = (1-t)371 + t371$ و $372 = (1-t)372 + t372$ و $373 = (1-t)373 + t373$ و $374 = (1-t)374 + t374$ و $375 = (1-t)375 + t375$ و $376 = (1-t)376 + t376$ و $377 = (1-t)377 + t377$ و $378 = (1-t)378 + t378$ و $379 = (1-t)379 + t379$ و $380 = (1-t)380 + t380$ و $381 = (1-t)381 + t381$ و $382 = (1-t)382 + t382$ و $383 = (1-t)383 + t383$ و $384 = (1-t)384 + t384$ و $385 = (1-t)385 + t385$ و $386 = (1-t)386 + t386$ و $387 = (1-t)387 + t387$ و $388 = (1-t)388 + t388$ و $389 = (1-t)389 + t389$ و $390 = (1-t)390 + t390$ و $391 = (1-t)391 + t391$ و $392 = (1-t)392 + t392$ و $393 = (1-t)393 + t393$ و $394 = (1-t)394 + t394$ و $395 = (1-t)395 + t395$ و $396 = (1-t)396 + t396$ و $397 = (1-t)397 + t397$ و $398 = (1-t)398 + t398$ و $399 = (1-t)399 + t399$ و $400 = (1-t)400 + t400$ و $401 = (1-t)401 + t401$ و $402 = (1-t)402 + t402$ و $403 = (1-t)403 + t403$ و $404 = (1-t)404 + t404$ و $405 = (1-t)405 + t405$ و $406 = (1-t)406 + t406$ و $407 = (1-t)407 + t407$ و $408 = (1-t)408 + t408$ و $409 = (1-t)409 + t409$ و $410 = (1-t)410 + t410$ و $411 = (1-t)411 + t411$ و $412 = (1-t)412 + t412$ و $413 = (1-t)413 + t413$ و $414 = (1-t)414 + t414$ و $415 = (1-t)415 + t415$ و $416 = (1-t)416 + t416$ و $417 = (1-t)417 + t417$ و $418 = (1-t)418 + t418$ و $419 = (1-t)419 + t419$ و $420 = (1-t)420 + t420$ و $421 = (1-t)421 + t421$ و $422 = (1-t)422 + t422$ و $423 = (1-t)423 + t423$ و $424 = (1-t)424 + t424$ و $425 = (1-t)425 + t425$ و $426 = (1-t)426 + t426$ و $427 = (1-t)427 + t427$ و $428 = (1-t)428 + t428$ و $429 = (1-t)429 + t429$ و $430 = (1-t)430 + t430$ و $431 = (1-t)431 + t431$ و $432 = (1-t)432 + t432$ و $433 = (1-t)433 + t433$ و $434 = (1-t)434 + t434$ و $435 = (1-t)435 + t435$ و $436 = (1-t)436 + t436$ و $437 = (1-t)437 + t437$ و $438 = (1-t)438 + t438$ و $439 = (1-t)439 + t439$ و $440 = (1-t)440 + t440$ و $441 = (1-t)441 + t441$ و $442 = (1-t)442 + t442$ و $443 = (1-t)443 + t443$ و $444 = (1-t)444 + t444$ و $445 = (1-t)445 + t445$ و $446 = (1-t)446 + t446$ و $447 = (1-t)447 + t447$ و $448 = (1-t)448 + t448$ و $449 = (1-t)449 + t449$ و $450 = (1-t)450 + t450$ و $451 = (1-t)451 + t451$ و $452 = (1-t)452 + t452$ و $453 = (1-t)453 + t453$ و $454 = (1-t)454 + t454$ و $455 = (1-t)455 + t455$ و $456 = (1-t)456 + t456$ و $457 = (1-t)457 + t457$ و $458 = (1-t)458 + t458$ و $459 = (1-t)459 + t459$ و $460 = (1-t)460 + t460$ و $461 = (1-t)461 + t461$ و $462 = (1-t)462 + t462$ و $463 = (1-t)463 + t463$ و $464 = (1-t)464 + t464$ و $465 = (1-t)465 + t465$ و $466 = (1-t)466 + t466$ و $467 = (1-t)467 + t467$ و $468 = (1-t)468 + t468$ و $469 = (1-t)469 + t469$ و $470 = (1-t)470 + t470$ و $471 = (1-t)471 + t471$ و $472 = (1-t)472 + t472$ و $473 = (1-t)473 + t473$ و $474 = (1-t)474 + t474$ و $475 = (1-t)475 + t475$ و $476 = (1-t)476 + t476$ و $477 = (1-t)477 + t477$ و $478 = (1-t)478 + t478$ و $479 = (1-t)479 + t479$ و $480 = (1-t)480 + t480$ و $481 = (1-t)481 + t4$

البرهان: نستعمل اللازمة ونعتبر $h(t) = f((1-t)a+tb)$:

$$h : [0,1] \rightarrow U \rightarrow F$$

$$t \rightarrow (1-t)a+tb \rightarrow f((1-t)a+tb)$$

h هي تركيب تطبيقين قابلين للاشتقاق ومنه فهس قابلة للاشتقاق و :

$$Dh(t) = Df((1-t)a+tb)(b-a)$$

$$\leq \|Df((1-t)a+tb)\| \|Df((1-t)a+tb)\|$$

$$\leq \|b-a\| \sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a+tb)\|$$

$$k = \|b-a\| \sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a+tb)\| \longleftarrow \text{يوضع}$$

$$\|h(1)-h(0)\| \leq k(0,1) \quad h \text{ تحقق شروط اللازمة ومنه :}$$

وبما ان $h(0) = f(a)$ و $h(1) = h(b)$ نتحصل على $\|f(b) - f(a)\| \leq k$

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|b-a\| \sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a+tb)\| \text{ ومنه}$$

برهان نظرية 1:

باستعمال الخاصية السابقة : x_1 و x_2 عنصرين من U وبما ان U محدب فان $[x_1, x_2] \subset U$

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \sup_{t \in [0,1]} \|Df((1-t)a+tb)\|$$

لازمة 2: تحت فرضيات النظرية 1 اذا مانت $k = 0$ أي $Df(x) = 0 \quad \forall x \in U$

فان f ثابتة على U .

البرهان: فعلا اذا كانت $k = 0$ فان:

$$\forall x_1, x_2 \in U \quad \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

ومنه f ثابتة على U

3.3 تمارين :

التمرين 1 : لتكن f دالة عددية معرفة مستمرة على المجال $[a,b]$ من \mathbb{R} وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$

حيث :

$$1 - \text{اثبت ان } |f(b) - f(a)| \geq \alpha (b-a)$$

2 - اثبت ان المشتقة $f'(x_0)$ ، x_0 عنصر من $]a,b[$ نقطة لاصقة لـ $f'(x)$ عندما x يؤول الى x_0

3 - بين ان هذه النتيجة ليست صحيحة بالنسبة لدالة شعاعية في ف ش ن ذو بعد $\langle 1$.

ناخذ $f = (f_1, f_2)$ مع :

$$f_1(x) = x^2 \sin \frac{1}{2} \quad / \quad x \neq 0, \quad f_1(0) = 0$$

$$f_2(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \quad / \quad x \neq 0, \quad f_2(0) = 0$$

التمرين 2 : ليكن U مفتوح من \mathbb{R}^n ، E ف ش ن و f تطبيق من U نحو E مشتقات جزئية

($i=1, \dots, n, \frac{\partial f}{\partial x_i}$) محدودة بين f مستمرة على U .

التمرين 3 : ليكن E ، F فضاءين شعاعيين نظيمين U مفتوح من E و f تطبيق قابل للمفاضلة من U

نحو F .

(1) نفرض ان f - ليبشيتزي على U ، بين اذن ان $\sup_{x \in U} \|Df(x)\| \leq k$

(2) نفرض ان : $\sup \|Df(x)\| \leq k$

بين اذن ان kf - ليبشيتزي على كل محدب محتوى في U .

4.3 حل التمارين :

حل التمرين 1 :

(1) لدينا نظرية التزايد المتناهية .

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad / \quad c \in]a,b[$$
$$\frac{|f(b)-f(a)|}{b-a} = |f'(c)| \geq \alpha \quad \text{وعليه :}$$
$$|f(b)-f(a)| \geq \alpha (b-a) \quad \text{و}$$

(2) نستعمل استدلال بالخلف (f قابلة للاشتقاق على]a,b[، مستمرة على [a,b]). نفرض ان f'(x_0) ليست نقطة لاصقة لـ f'(x) عندما x يؤول الى x_0. يوجد 0 < ε و 0 < n حيث من اجل ||x-x_0|| ≤ n لدينا |f'(x) - f'(x_0)| ≥ ε فاذن يوضع g(x) = f(x) - (x-x_0)f'(x_0) نجد g'(x) = f'(x) - f'(x_0) وبالتالي : |g'(x)| = ε من اجل |x-x_0| ≤ n اذن |g(x) - g(x_0)| ≥ ε|x-x_0| من اجل |x-x_0| ≤ n أي |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)| ≥ ε|x-x_0| وهذا ما يناقص f'(x_0) مشتقة f عند x_0.

(3) لدينا من اجل x ≠ 0

$$f'_1(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$f'_2(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

نزود R² بالنظيم الاقليدي ، نجد اذن :

$$\|f'(x)\|^2 = f_1'(x)^2 + f_2'(x)^2 = 1+4x^2 > 1$$

ومن جهة اخرى :

$$F1'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$F2'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$\|f'(0)\|^2 = 0 \text{ : ومنه}$$

وعليه $f'(0)$ نقطة معزولة لان من اجل $x \neq 0$ تبقى خارج الدائرة ذات المركز $f'(0)$ ونصف القطر 1 .

حل التمرين 2 :

نثبت ان f مستمرة عن كل نقطة من U :

بما ان $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ محدودة من اجل $i = 1, \dots, n$ بضع

$$M = \max_{x \in U} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|$$

ليكن $a = (a_1, \dots, a_n)$ منبث في U و B كرة (بالنسبة للنظيم \max) مفتوحة ذات مركز a ، محتواة في U (U مفتوح).

من جهة اخرى ليكن $x = (x_1, \dots, x_n)$ عنصر كفي من B نضع $X_1 = a$ ، $X_{n+1} = x$ و $X_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, \dots, a_n)$ محتواة من B لان :

$$\|X_k - a\| = \max_{2 \leq i \leq k-1} |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_\infty , \quad \forall k = 2, \dots, n-1$$

لدينا :

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^n [f(X_{k+1}) - f(X_k)] \quad (*)$$

نظرية المتوسط تسمح لنا بكتابة :

$$\|f(X_{k+1}) - f(X_k)\| \leq \sup_{t \in [X_{k+1}, X_k]} \|D_k f(t)\| |x_k - a_k| \leq M |x_k - a_k| \quad (**)$$

باستعمال العلاقتين (*) و (**) نتحصل على :

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M \sum_{k=1}^n |x_k - a_k| = M \|x - a\|_\infty$$

وعليه : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

وهذا ما يوضح استمرارية f عند كل نقطة a من U .

حل التمرين 3 :

(1) ليكن a مثبت في U .

إذا كانت f - k ليشيتزية على U فانه :

من اجل كل t صغير كفاية :

$$\|f(x) - f(x+ty)\| \leq k\|ty\| \quad \forall y \in E \quad (*)$$

باستعمال المتباينة (*) وتفاضلية f ، نتحصل على :

$$\text{Lim} \left\| \frac{f(x) - f(x+ty)}{t} \right\| \leq k\|y\| \quad \forall y \in E$$

او ايضا :

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(y) \right\| = \|Df(x)(y)\| \leq k\|y\| \quad \forall y \in E$$

وبما ان $Df(x) \in L(E,F)$ ، العلاقة (***) تستلزم : $\|Df(x)\| \leq k$

ومنه : $\sup_{x \in U} \|Df(x)\| \leq k$

(2) ليكن D محدب محتوى في U :

من اجل x و y في D ، لدينا $[x,y] \subset D$ ، نظرية المتوسط تسمح لنا بكتابة :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{t \in [x,y]} \|Df(t)\| \|x-y\| \leq k\|x-y\|$$

وعليه من اجل كل محدب D محتوى في U ، لدينا :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\| \quad \forall (x,y) \in D^2$$