الفصل الثاني

2. التفاضلية الأولى

في هذا الفصل نعتبر $E=\mathbb{R}^n$ ، $F=\mathbb{R}^P$ و $K=\mathbb{R}$.

1.2 تعاريف :

ليكن U مفتوح غير خالي من $\mathbb{R}^n$ ، a عنصر من U و f تطبيق من U نحو $\mathbb{R}^P$.

المجموعة $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^P)$ هى مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^P$.

1.1.2 تفاضلية تطبيق:

نقول ان التطبيق f من U نحو $\mathbb{R}^P$ قابل للمفاضلة عند a ، اذا وجد تطبيق $g_a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^P)$ يحقق العلاقة :

$$\boxed{f(a+h) - f(a) = g_a(h) + o(h)}$$

حيث o(h) عنصر من $\mathbb{R}^P$ يحقق:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$$

التطبيق g_a يسمى التفاضلية (الاولى) لـ f عند a ، نرمز له بالرمز $Df(a)$.

نقول ان التطبيق f من U نحو $\mathbb{R}^P$ قابل للمفاضلة على U اذا كان قابل للمفاضلة عند كل نقطة من U.

اذا كان f قابل للمفاضلة عند a فان f مستمرة عند a .

- **المساواة** : $f(a+h) - f(a) = g(h) + o(h)$ مكافئة لكل علاقة من العلاقات التالية :

$$(1) \quad \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (\in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} = 0 \quad (\in \mathbb{R}^P)$$

(3) $f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)=\|h\|\,\varepsilon(h)$.

حيث ε تطبيق من V_o (جوار للمبدأ في $\mathbb{R}^n$) نحو $\mathbb{R}^p$ ويحقق : $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

(4) $f(x+h)-f(a)-Df(a)(x-a)=\|x-a\|\,\rho(x)$

حيث ρ تطبيق من V_a (جوار a) نحو $\mathbb{R}^p$ ويحقق : $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(h) = 0$

2.1.2 التطبيقات من الصنف C^1:-

اذا كان التطبيق f من U نحو $\mathbb{R}^p$ قابل للمفاضلة على U فان من أجل كل $a\in$U ، تفاضلية f عند a وحيدة بمعنى آخر اذا كانت التفاضلية موجودة فانها وحيدة . وعليه التطبيق :

$$Df: \quad U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$
$$x \to Df(x)$$

يسمى تفاضل الدالة f . واذا كان Df مستمر على U نقول ان f قابل للمفاضلة باستمرار أو f من الصنف C^1 على U ونكتب $f\in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ حيث $C^1(U, \mathbb{R}^p)$ مجموعة التطبيقات من U نحو $\mathbb{R}^p$ القابلة للمفاضلة باستمرار واذا لم يكن هناك أي خلط نرمز لها بالرمز $C^1(U)$.

__خاصية__: مجموعة التطبيقات المعرفة على U والقابلة للمفاضلة عند a فضاء شعاعي وعليه. اذا كانت f و g قابلتين للمفاضلة عند a فان:

(1) $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$

(2) $D(\lambda f)(a) = \lambda\, Df(a) \quad \forall\, \lambda\in\mathbb{R}$

3.1.2 __أمثلة__: ليكن f تطبيق من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^p$ فلدينا ما يلي :

(1) اذا كان f تطبيق خطي مستمر فان $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ و

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}^n: \quad Df(x) = f}$$

ينتج عن هذا ، أن التفاضلية $Df: \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ **ثابتة** .

(2) إذا كان f تطبيق **تالفي مستمر** اى $f = g + c$ حيث $g \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ و c عنصر ثابت من$\mathbb{R}^p$

فان $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ و لدينا :

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}^n:\quad Df(x) = g}$$

(3) اذا كانت f **ثابتة** فان

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}^n:\quad Df(x) = 0}$$

(4) اذا كان $n=2$ و f تطبيق **خطى مستمر** على $\mathbb{R}^2$ (نقول أيضا **ثنائية الخطية**) فان :

$$\boxed{\forall\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\quad \forall\ h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : Df(x)(h) = f(x_1, h_2) + f(x_2, h_1)}$$

2.2 <u>حالات خاصة و المصفوفة اليعقوبية</u>:

1.2.2 <u>حالة $n = p = 1$</u>

فى هذه الحالة لدينا f من U نحو$\mathbb{R}$ و(U مفتوح من $\mathbb{R}$) .

<u>نظرية</u> :

f **قابلة للمفاضلة** عند$U \ni a$ اذا وفقط اذا كانت f **قابلة للاشتقاق** عند a وأيضا :

$$\boxed{\forall\ h \in \mathbb{R}:\quad Df(a)(h) = f'(a).h}$$

<u>البرهان</u> : يكفى الرجوع الى قابلية اشتقاق دالة عددية عند $a \in U$ (السنة الأولى).

2.2.2 <u>حالة $n = 1$ و p كيفي</u> :

لدينا U مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f: \quad U \to \mathbb{R}^p$

$$t \to f(t) = (f_1(t), \ldots . f_p(t))$$

<u>نظرية</u>: نقول ان f قابلة للمفاضلة عند $a \in U$ اذا وفقط اذا كانت p دوال المركبة لـ f قابلة للاشتقاق عند a ، وايضا :

$$\boxed{\forall h \in \mathbb{R}:\quad Df(a)(h) = (f_1'(a)h, \ldots, f_p'(a)h)}$$

البرهان: اذا كانت كل دالة $f_i(1\leq i\leq p)$ قابلة للاشتقاق عند $a\in U$ فان:

$$f(a+h) = (f_1(a+h),\dots,f_p(a+h))$$
$$= (f_1(a)+f_1'(a)h+|h|\varepsilon_1(h),\dots,f_p(a)+f_p'(a)h+|h|\,\varepsilon_p(h))$$
$$= f(a)+(f_1'(a)h,\dots,f_p'(a)h)+|h|\,(\varepsilon_1(h),\dots,\varepsilon_p(h))$$

و $$\lim_{h\to 0}(\varepsilon_1(h),\dots,\varepsilon_p(h)) = (0,..,0) = 0_p$$

وعكسيا نفرض ان f قابلة للمفاضلة عند a .

بما ان $Df(a)$ تطبيق خطي أي $(Df(a)\in L(\mathbb{R},\mathbb{R}^p))$ ، يوجد p عدد حقيقي $l_p,\dots,l_1$ حيث:

$$\forall\, h\in\mathbb{R}\qquad Df(a)(h) = (l_1h,\dots,l_ph)$$

نرمز الى مركبات التطبيق ε بـ $\varepsilon p,\dots,\varepsilon_1$ فنجد:

$$f_i(a+h) = f_1(a) + l_ih+|h|\,\varepsilon_i(h)\qquad 1\leq i\leq p$$

و $$\lim_{h\to 0}\varepsilon_i(h) = 0$$

و عليه كل مركبة قابلة للاشتقاق عند a و $f_i'(a)=l_i$ أي :

$$Df(a)(h) = (f_1'(a)h,\dots,f_p'(a)h)$$

3.2.2 حالة n كيفي و $p=1$:

أي
$$f: U\to\mathbb{R}$$
$$(x_1,\dots,x_n)\to f(x_1,\dots,x_p)$$

تعريف المشتقة الجزئية:

ليكن $a=(a_1,\dots,a_n)$ ، اذا كان التطبيق للمتغير الحقيقي الذي يرفق بـ t العنصر $f(a_1,\dots,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n)$ المعرف في جوار a_i ، قابل للاشتقاق عند a_i ، نرمز الى مشتقته عند a_i بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. العدد $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ يسمى المشتقة الجزئية للدالة f عند a بالنسبة للمركبة i.

نظرية 1: اذا كانت f قابلة للمفاضلة a فان f تقبل مشتقات جزئية بالنسبة لكل مركبات a ولدينا:

$$\boxed{Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i \;, \quad \forall\, h = (h_1,\ldots,h_n) \in \mathbb{R}^n}$$

البرهان:

بما ان $Df(a)$ عبارة خطية في $\mathbb{R}^n$ ، فانه يوجد n اعداد حقيقية $\propto_1, \ldots\ldots, \propto_n$ حيث :

$$\forall\, h = (h_1,\ldots,h_n) \in \mathbb{R}^n \quad : \quad Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \propto_i h_i = \propto_1 h_1 + \ldots + \propto_n h_n$$

اذا كان $1 \le i \le n$ فان :

$$f(a_1,..,a_{i-1},a_i+h_i,a_{i+1},..,a_n) = f(a_1,..,a_i,..,a_n) + Df(a)(0,..,h_i,..,0) + |h_i|\varepsilon(0,..,h_i,..0)$$

$$= f(a_1,..,a_i,..,a_n) + \propto_i h_i + |h_i|\varepsilon_i(h_i)$$

مع : $\lim_{h_i \to 0} \varepsilon_i(h_i) = 0$

وهذا يعنى أن المشتقة الجزئية للدالة f عند a *بالنسبة للمركبة* i موجودة و $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \propto_i$

ملاحظة : النظرية العكسية خاطئة ،أي اذا كانت f تقبل n مشتق جزئى عند a فانها ليست حتما قابلة للمفاضالة عند a .

مثال : ليكن التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- اذا كان $(x,y) \neq (0,0)$ لدينا : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

• اذا كان $(x,y) = (0,0)$ لدينا:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,o) - f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

أي f تقبل مشتقات جزئية عند $(0,0)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \right)$$

لكن بما انها ليست مستمرة عند $(0,0)$ (انظر الفصل الاول) لا يمكنها ان تكون قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$.

<u>**نظرية 2:**</u> اذا كانت f تقبل n مشتق جزئي كلهم مستمرين عند a فان f قابلة للمفاضلة عند a و:

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n \qquad Df(a)(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i$$

<u>4.2.2 حالة n و p كيفيين:</u>

أي

$$f : U \to \mathbb{R}^p$$

$$(x_1,\dots,x_n) \to f(x_1,\dots,x_n)$$

مع U مفتوح من ^{n} ، نسمي $f_p,\dots f_2,f_1$ الدوال المركبة لـ f أي اذا كان $(x_1,\dots,x_n)\in U$ فان $f(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_p(x_1,\dots,x_n))$.

<u>**نظرية:**</u> f قابلة للمفاضلة عند a اذا وفقط اذا كانت $f_p,\dots,f_1$ دوال المركبات قابلة للمفاضلة عند a و:

$$\boxed{\forall h \in \mathbb{R}^n \qquad Df(a)(h) = (Df_1(a)(h),\dots,Df_p(a)(h))}$$

<u>**البرهان:**</u> نكتب $Df(a)(h)$ و h على شكل شعاع عمود:

$$\mathrm{D}f(a)(h) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_i} \\ \\ \sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f_p(a)}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} h_1 + \dots + \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} h_n \\ \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} h_1 + \dots + \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} h_n \end{pmatrix}$$

نفرض أن f قابلة للمفاضلة عند a ، فان :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \|h\|\, \varepsilon\,(h_i)$$

ومنه بالنسبة لكل مركبة :

$$f_i\,(a+h) = f_i(a) + \varphi_i(h) + \|h\|\, \varepsilon_i\,(h)$$

φ_i هى عبارة خطية على $\mathbb{R}^n$ و $\lim_{h\to 0_n} \varepsilon_i\,(h) = 0$

وهدا ما يثبت ان كل مركبة قابلة للمفاضلة عند a و $\mathrm{D}f_i(a)(h) = \varphi_i\,(h)$. وبالعكس اذا كانت كل مركبة f_i قابلة للمفاضلة عند a فانه اذا كانت $l \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ معرفة بـ :

$$l(h) = (\mathrm{D}f_1(a)(h), \dots, \mathrm{D}f_p(a)(h))$$

تحقق بسهولة ان هذا التطبيق هو تفاضلية f عند a .

5.2.2 المصفوفة اليعقوبية: [Matrice Jacobienne]

اذا كانت f قابلة للمفاضلة عند a نسمي مصفوفة يعقوبية لـ f عند a ، المصفوفة المرمز لها بـ $\mathrm{J}_f(a)$ المعرفة بـ :

$$\mathrm{J}f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \qquad 1 \le i \le n \quad \text{و} \quad 1 \le j \le p$$

أي :

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) \ldots\ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

ولدينا اذن، اذا كان $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$:

$$Df(a)(h) = J_f(a)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

3.2 تفاضلية التركيب:

تقدم في هذه الفقرة النظرية التالية بدون برهان.

1.3.2 النظرية : لتكن f من U نحو $\mathbb{R}^n$ و g من V نحو $\mathbb{R}^q$ ، U و V مفتوحتين من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ على الترتيب، حيث $f(U) \subset V$

1- اذا كانت f قابلة للمفاضلة عند a و g قابلة للمفاضلة عند $f(a)$ فان gof قابلة للمفاضلة عند a و:

$$\boxed{D(gof)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)}$$

او

$$\boxed{J_{gof}(a) = J_g(f(a)) \,.\, J_f(a)}$$

2- اذا كانت f قابلة للمفاضلة على U و g على V فان gof قابلة للمفاضلة على U.

3- اذا كانت f من الصنف $C^1(U)$ و g من الصنف $C^1(V)$ فان gof من الصنف $C^1(U)$.

2.3.2 حالة خاصة: $n = p = q = 1$

فان : $\forall h \in \mathbb{R}\ ,\ (gof)'(a)h = g'(f(a))\, f'(a)h$

ونتحصل على نظرية اشتقاق تركيب دالتين:

$$\boxed{(gof)'(a) = g'(f(a))\ .\ f'(a)}$$

4.2 تمارين:

التمرين 1: لتكن f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} x.y\ \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & ,\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

بين ان f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ ثم احسب $Df(0,0)$.

التمرين 2: نعتبر على $\mathbb{R}^2$ الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

اثبت أن f من الصنف $C^1(\mathbb{R}^2)$

<u>التمرين</u> 3: نعطي n دالة:

$x_1,..x_n$ n دوال معرفة وقابلة للاشتقاق على U مفتوح من$\mathbb{R}$ وذات القيم في $\mathbb{R}^n$.

اثبت ان الدالة $d : U \to \mathbb{R}$

$$t \to det\,(x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

قابلة للاشتقاق واحسب المشتقة d' .

$det\,(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ هو المحدد ذو رتبة n للمصفوفة التي اعمدتها مكونة من مركبات الاشعة $x_1(t),\ldots\ldots,x_n(t)$.

<u>التمرين</u> 4: ليكن التطبيق f من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$ معطى و F التطبيق من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ المعرف بـ :

$$F(x,y) = \begin{cases} (x,y) & x \le 0 \\ (x,y+f(x)) & y \rangle 0 \end{cases}$$

ما هي الشروط حول f حتى تكون F

1 - مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

2 - قابلة للمفاضلة على $\mathbb{R}^2$.

<u>5.2 الحلول:</u>

<u>حل التمرين 1</u>: اذا كانت f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ فانها تقبل عند هذه النقطة مشتقات جزئية ويكون لدينا :

$$Df(0,0)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)k$$

لدينا $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ ومنه $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

بالمثل: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

ندرس:

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\|(x,y)\|_2} \le \frac{\left|x,y \quad \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

وعليه:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|f(x,y)-f(0,0)-x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|}{\|(x,y)\|_2}=0$$

ومنه f قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ و $Df(0,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$(h,k)\to 0$

حل التمرين 2:

اذا كان $(x,y)\neq(0,0)$ فان $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

و $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ يستلزم ان $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

استمرارية $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ عند (0,0) :

لدينا :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\ \cos\theta, r\ \sin\theta)\right| = \frac{2r^5}{r^4}\ |\cos\theta|\sin^4\theta \le 2r$$

ومنه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \le 2\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$$

وبالطريقة نفسها نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2x^3(x^2+2y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \end{cases}$$

و $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

بما أن المشتقات الجزئية الأولى مستمرة على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

حل التمرين 3: نقوم بالتركيب التالي:

$$d : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times,\ldots\ldots,\times \mathbb{R}^n$$

$$t \longrightarrow (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \xrightarrow{g} \mathrm{d}(t) = \mathrm{d\ et}\,(x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

بطريقة تكون $\mathrm{d} = gof$ f قابلة للاشتقاق لان كل مركباتها قابلات للاشتقاق و :

$$\forall\, t\in \mathbb{R} :\quad f(t) = (x_1'(t),\ldots,x_n'(t))$$

g تطبيق متعدد الخطية معرف عى فضاء بعده منته ، فهو اذن قابل للمفاضلة و :

$$\mathrm{D}g(x_1,\ldots,x_n)(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d\ et}\,(x_1,\ldots,x_{i-1},\ldots,h_1,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$\forall\, x_i\in \mathbb{R}^n,\ i=1,\ldots,n \quad \text{و} \quad \forall\, h_i \in \mathbb{R}^n \qquad i = 1,\ldots,n$$

وبالتالي d قابل للمفاضلة على U و :

$$\mathrm{d}'(t) = \mathrm{D}g(f(t))\,.\,f'(t) \qquad \forall\, t\in \mathbb{R}$$

$$= \mathrm{D}g(x_1(t),\ldots,x_n(t))(x^1{}_n(t),\ldots,x'_n(t))$$

حل التمرين 4:

نضع $F=(F_1,F_2)$ حيث $F_1(x,y)=x$ و :

$$F_2(x,y)=\begin{cases} y & x\le 0 \\ y+f(x) & x\rangle 0\end{cases}$$

F مستمرة (قابلة للمفاضلة)(من الصنف C^1) على $\mathbb{R}^2$ اذا وفقط اذا كانت F_1 و F_2 مستمرتين(قابلتين للمفاضلة)،(من الصنف C^1) على $\mathbb{R}^2$.

من الواضح ان F_1 من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}^2$ مهما كانت f تبقى F_2 في مجال الدراسة :

1- استمرارية F_2 :

* على المجموعة $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\langle 0\}$ ، F_2 مستمرة من اجل كل f .

* على المجموعة $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\rangle 0\}$ ، F_2 مستمرة اذا وفقط اذا كانت f مستمرة على $\mathbb{R}^*_+$.

* استمرارية F_2 على المجموعة $C=\{(0,y)\ ,\ y\in\mathbb{R}\}$: يجب ايجاد الشرط (على f) الذي يضمن :

$\lim\limits_{x\to 0^+} F_2(x,y)=F_2(0,y_0)$ من اجل كل (x,y_0) معين في C .

هذه العلاقة محققة اذا وفقط اذا كانت $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. وأخيرا:

F مستمرة على $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ f مستمرة على $\mathbb{R}^*_+$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0$.

2- مفاضلة F_2 :

F_2 من الصنف C^∞ على A و F قابلة للمفاصلة على B اذا وفقط اذا كانت f قابلة للانشقاق على $\mathbb{R}^*_+$.

بقيت دراسة قابلية مفاضلة F_2 على C : من اجل هذا ندرس وجود المشتقات الجزئية لـ F_2 على C .

ليكن $(o,y)\in C$ ، لدينا :

$$\frac{F_2(h,y)-F_2(0,y)}{h}=\begin{cases} 0 & h\le 0 \\ \dfrac{f(h)}{h} & h\rangle 0\end{cases}$$

وهو ما يبين أن $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(0,y)$ موجودة اذا وفقط اذا كانت :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\partial F}{\partial h} = 0 \quad . \quad \text{ولدينا} \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(0,y) = 1$$

وعليه اذا كانت F_2 قابلة للمفاضلة عند $(0,0)$ ، تفاضليتها معطاة بـ :

$$DF_2(0,y)(h,k) = k \qquad \forall\ (h,k)\in \mathbb{R}^2$$

ليكن :

$$B(h,k) = \frac{F_2(h, y+k) - F_2(o,y) - k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

تعريفا ، F_2 قابلة للمفاضلة عند $(0,y)$ اذا كانت :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} B(h,k) = 0$$

لدينا :

$$B(h,k) = \begin{cases} 0 & , \quad h \leq 0 \\ \dfrac{f(h)}{\sqrt{h^2+k^2}} & , \quad h \rangle 0 \end{cases}$$

شرط لازم وكافي حتى تكون F_2 قابلة للمفاضلة عند $(0,y)$ هو اذن $\lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{f(h)}{h}$ او ايضا $f(h) = o(h)$

اخيرا ، F_2 قابل للمفاضلة على $\mathbb{R}^2$ اذا وفقط اذا كانت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*_+$ و $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)}{h}$.