الفصل الأول

1. تذكير بالفضاءات الشعاعية النظيمية

1.1-فضاءات شعاعية نظيمية :

1.1.1 تعريف النظيم :

ليكن E فضاء شعاعي على الجسم K (K يمثل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)

نسمي نظيم على E كل تطبيق N من E نحو $\mathbb{R}_+$ الذي يحقق الشروط التالية :

$$(C1)\quad N(x) = 0, x= 0_E$$

$$(C2)\quad N(\alpha\, x) = |\alpha|\, N(x) \qquad \forall\ x \in E \qquad \forall\ \alpha \in K$$

$$(C3)\quad N(x+y) \leq N(x) + N(y) \qquad \forall\ (x, y) \in E^2$$

يسمى $N(x)$ نظيم العنصر x

2.1.1 تعريف فضاء شعاعي نظيمي:

نسمي فضاء شعاعي نظيمي الثنائية (E,N) المكونة من الفضاء الشعاعي E والنظيم N على E .

ملاحظة:

1 - في كل ما يلي: $\|x\|$ يرمز الى نظيم العنصر x من E

2 -لتبسيط الكتابة نستعمل الاختصار E ف. ش. ن الذي يقصد به الفضاء الشعاعي النظيمي .

3.1.1 خواص:

الخاصية 1:

$$N(-x) = N(-1x) = |-1|\ N(x) = N(x)$$

ومنه الخاصية:

$$\boxed{\forall\ x \in E \qquad N(-x) = N(x)}$$

:الخاصية 2

$$0 = N(x-x) \leqslant N(x) + N(-x) = 2N(x)$$

$$\boxed{\forall x \in E \quad : \quad N(x) \geq 0}$$

4.1.1 **أمثلة:**

1 - اذا كان $E = K$ نستنتج من خواص القيمة المطلقة (حالة $K = \mathbb{R}$) أو الطويلة (حالة $K=\mathbb{C}$) أن:

$$N : K \to \mathbb{R}$$

$$x \to |x|$$

نظيم على K

2 - يمكن تزويد الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ بعدة نظم والنظم المألوفة التي يزود بها هي :

$$N_\infty : x \to \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$N2 : x \to \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} xi^2\right)^{1/2}$$

$$N1 : x \to \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |xi|$$

حيث $x = (x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

5.1.1 **تعريف نظم متكافئة :**

ليكن النظيمان N_1 و N_2 المعرفان على نفس الفضاء الشعاعي E.

نقول أن N_1 و N_2 متكافئين اذا وجد عددان حقيقيان موجبان تماما α و β

حيث : $\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$

6.1.1 **تعريف المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}^n$:**

نسمي المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}$ الدالة $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$(x,y) \to d(n,y)$$

المعرف بـ :

$$d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) \right]^{1/2}$$

حيث $x = (x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$

و $y = (y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n)$

هذه المسافة تعمم على $\mathbb{R}^n$ المسافة المألوفةفي $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ لهذا تسمى المسافة الاقليدية. وحسب هذا التعريف المسافة بين x و y هي أكبر كلما كان الفرق $|x_k - y_k|$ كبير من أجل كل k.

7.1.1 خواص المسافة :d

1) $d(x,y) \geq 0 \quad . \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

2) $d(x,y) = 0 \;,\; x=y$

3) $d(y,x) = d(x,y) \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

4) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\; d(x,y) \;,\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \;,\; \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

5) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \;,\; \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$

6) $d(x+z\,,\, y+z) = d(x,z) \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$

ملاحظة : كل هذه الخواص تستنتج بسهولة من التعريف ما عدا الخاصية (5) التي يعتمد برهانها على متباينة كوشي شفارتز (*Chauchy – Schwartz*)

8.1.1 قضية : [متباينة كوشي شفارتز]

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}^n$ فان :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a^2_k \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} b^2_k \right]^{1/2}$$

البرهان : من المتباينة الشهيرة

$$(a^k - b^k)^2 = a^2{}_k + b^2{}_k - 2x_k b_k \geq 0$$

نستنتج المتباينة :

$$a_k b_k \leq \frac{a^2{}_k + b^2{}_k}{2}$$

وبتعويض a_k بـ $\lambda\, a_k$ و b_k بـ $\lambda^{-1} b_k$ نجد :

$$a_k b_k \leq \frac{\lambda^2 a_k^2 + \lambda^{-2} b_k^2}{2} \qquad \forall \lambda \rangle 0$$

و بالجمع نجد: $\forall \lambda \rangle 0$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \frac{\lambda^2 A^2 + \lambda^{-2} B^2}{2}$$

حيث :

$$\begin{cases} A = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \\ B = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \end{cases}$$

(بفرض أن $0 \rangle A$)، القيمة الصغرى للدالة $\lambda \rightarrow \dfrac{\lambda^2 A^2 + \lambda^{-2} B^2}{2}$:على $]0\ ,+\infty[$ هي عند النقطة $\lambda_0 = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

وعليه (بفرض أيضا أن $0 \rangle B$) نجد: $\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \leq \dfrac{\lambda^2 A^2 + \lambda_0^{-2} B^2}{2} = AB$ وهي المتباينة المذكورة.

أما حالة $A=0$ و $B=0$ فإنها لا تدرج أية صعوبة لأنه لدينا $a_k\, b_k=0$ من أجل كل $k=1,2,\ldots\ldots,n$

برهان الخاصية 5 : (المسماة المتباينة المثلثية)

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$$

بالرفع الى القوة 2 البرهان على الخاصية 5 هو نفسه البرهان على:

$$d(x,y)^2 \le d(x,z)^2 + d(z,y)^2 + 2d(x,z)\, d(z,y)$$

أي

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2 + \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

بما أن :
$$x_k - y_k = (x_k - z_k) + (z_k - y_k)$$

فلدينا
$$\sum (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} [(x_k - z_k)^2 + (z_k - y_k)^2 + 2(x_k - z_k)(z_k - y_k)]$$

ولهذا الكل راجع الى اثبات أن

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)(z_k - y_k) \le \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

وما هي الا متباينة كوشي شفارتز المطبقة على $a=x-z$ و $b=z-y$

الخاصية 5 تبين أن المسافة بين x و y تتعلق بـ $x-y$:

$$d(x,y) = d(x-y,0)$$

وهذا ما يجسد الدور الهام الذي تلعبه الدالة $x \to d(x,0)$ التي تسمى أيضا نظيم x أي $\| x \|$

و النظيم الاقليدي المعرف على $\mathbb{R}^n$ هو $x \to \| x \|$ المعرف بـ $\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

وهذا ما رمزنا له سابقا بالرمز $\| x \|_2$

وتعريفا لدينا $d(x,y) = \| x-y \| \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$ و $\| x \|$ يمثل طول ا لشعاع x

خواص المسافة (1) (2) (4) (5) المذكورة سابقا هى مماثلة لخواص النظيم التالية:

(1) $\|x\| \geq 0 \qquad \forall \; x \in \mathbb{R}^n$

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall \; x,y \in \mathbb{R}^n$

(4) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall \; \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n$

وهنا أيضا الخاصية (3) فقط التي ليست بديهية وتتعلق بالمتابينة المثلثية ،على الشكل التالى:

$$\|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y) \leq d(x,0) + d(0,-y) = \|x\| + \|y\|$$

9.1.1 **نظرية:**

كل النظم المعرفة على $\mathbb{R}^n$ متكافئة.

البرهان:

للتبسيط نثبت النظرية بالنسبة للنظم المألوفة فقط.

• **N_1 و N_2**

ليكن k_0 حيث $\|x\|_\infty = |x_{ko}|$

وعليه $|x_{k0}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

أي $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$

وبما أن $|x_k| \leq |x_{k0}|$ $\forall \; k \in \{1,\ldots\ldots,n\}$ لدينا $\sum |x_k| \leq n|x_{k0}|$ أي $\|x\|_1 = n\|x\|_\infty$

$$\boxed{\forall \; x \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty}$$

• **N_1 و N_2**

نذكر أنه اذا $a_1,\ldots\ldots\ldots,a_n$ اعداد حقيقية موجبة فان :

$$\sqrt{a + \ldots. + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sqrt{a_n}$$

نستنتج أن $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots. + x_n^2} \langle \sqrt{x_1^2} + \ldots. + \sqrt{x_n^2} = |x_1| + \ldots\ldots + |x_p| = \|x\|_1$

و بما أن حسب متباينة كوشي شفارتز لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \times 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}$$

فان :

$$||x||_1 \leq \sqrt{n} \quad ||x||_2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n} \quad ||x||_2$$

• **<u>N_2 و N_∞</u>**

كما فى الاعلى ليكن i_{ko} حيث $||x||_\infty = | x_{ko} |$

$$x_{ko}^{2} \leq \sum_{k=1}^{n} x^2_k$$

و منه $||x||_\infty \leq ||x||_2$

و من المتباينة $x^2_k \leq x^2_{k0}$ الصحيحة من اجل كل $k \in \{ 1,....,n \}$

نستنتج أن

$$\sum_{k=1}^{n} x^2_k \leq n \ |x^2_{k0}|$$

أي $||x||_2 \leq ||x||_\infty \sqrt{n}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \sqrt{n}\, ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \quad ||x||_\infty$$

2.1 <u>توبولوجيا الفضاءات الشعاعية النظيمية :</u>

1.2.1 <u>تعاريف:</u>

<u>1-</u> نسمي كرة مفتوحة (أو كرة مغلقة) لـ ف ، ش ، ن E ذات المركز $a \in E$ ونصف القطر $r \in R^*_+$ المجموعة المرمز اليها بـ $B(a,r)$ (أو $\overline{B}(a,r)$) المعرفة بـ :

$$B(a,r) = \{ x \in E \ / \ ||x-a|| \langle r \}$$

أو $(\overline{B}(a,r) = \{ x \in E \ / \ ||x-a|| \leq r \})$

ملاحظة1: تتعلق الكرة بالنظيم المختار على E

2- نقول أن الجزء V من ف ، ش ، ن E جوار للنقطة $a \in E$ اذا V يشمل كرة مفتوحة تشمل a .

اذا رمزنا الى مجموعة جوارات a بالرمز $\mathcal{V}(a)$ فان :

$$V \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists (x_0, r) \in E \times \mathbb{R}_+^* : B(x_0, r) \subset V \text{ و } a \in B(x_0, r)$$

ملاحظة2 : كل جوار لـ a يشمل حتما a .

مثال : كرة مفتوحة أو مغلقة ذات المركز a هي جوار له.

3- ليكن $A \subset C$ و $a \in E$.

نقول أن a داخل A اذا كان A جوار لـ a .

مجموعة النقط داخل A تسمى داخل A ونرمز لها بالرمز $\mathring{A}$.

$$a \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists (x_0, r) \in E \times \mathbb{R}^*_+ , \quad B(x_0, r) \subset A \text{ و } a \in B(x_0, r)$$

ملاحظة3: كل نقطة داخل A تنتمي الى A أي $\mathring{A} \subset A$

-4 ليكن $A \subset C$ و $a \in E$

نقول أن a ملاصقة لـ A اذا كان كل جوار لـ a يلتقي مع A.

مجموعة النقط الملاصقة لـ A تسمى ملاصقة A ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a), \quad V \cap A \neq \emptyset$$

ملاحظة4 : كل نقطة من A ملاصقة لـ A أي

$$A \subset \overline{A}$$

-5 $A \subset E$ و $a \in E$

نقول أن a نقطة تراكم لـ A اذا كان كل جوار لـ a يلتقي A في نقطة غير a :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

ملاحظة5: كل نقطة تراكم هي حتما نقطة ملاصقة لـ A والعكس عامة خطأ.

6 - نقطة a التي ليست نقطة تراكم تسمى نقطة منعزلة.

$$\forall \quad V\in\mathcal{V}(A) \qquad\qquad \forall \cap \ A = \{a\}$$

2.2.1 جزء مفتوح ، جزء مغلق:

* نقول أن الجزءA من E جزء مفتوح أو مفتوح، اذا كانت كل نقطة$a\in A$ مركز لكرة مفتوحة محتواة في A أي بصيغة اخرى A جوار لكل نقطة من نقاطه .

اذا رمزنا بـ $\mathcal{O}$ ألي مجموعة المفتوحات لـ E ، فان:

$$\boxed{A\in\mathcal{O} \Leftrightarrow \forall\, a \in A \ , \ \exists\, r > 0 \ , \ B(a,r) \subset A}$$

وباستعمال مفهوم الداخلي، لدينا

$$\boxed{A\in\mathcal{O} \Leftrightarrow \mathring{A} = A}$$

قضية: في $\mathbb{R}^n$ ، اذا كان A مفتوح بالنسبة للنظيم N_1 فان A مفتوح بالنسبة لكل نظيم آخر N_2المعرف على$\mathbb{R}^n$.

البرهان: بما أن:

$$\forall\, a \in A \ , \ \exists\, r > 0 \ , \ B(a,r) \subset A$$

فان:

$$\forall\, a \in A \ , \exists r > 0 \ , \ \forall\, x \in E \ , \ N_1(x-a) < r \Rightarrow x \in A$$

ومن جهة اخرى نعلم أنه يوجد $\alpha > 0$ حيث $N_1(x-a) \le \alpha\, N_2(x-a)$

ومنه لدينا الاستلزام:

$$\alpha\, N_2(x-a) < r \Rightarrow x \in A$$

الشعاع a هو، بالنسبة للنظيم N_2، مركز الكرة المفتوحة ذات نصف القطر $\frac{r}{\alpha}$ المحتواة في A .

مثال مهم لمفتوح:

كل كرة مفتوحة هي مفتوح لـ E .

الخواص الرئيسية للمفتوحات:

(O_1) $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$ (و المجموعة الخالية مفتوحتين E)

(O_2) $\forall\, i \in I\,,\ A_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$ (كل اتحاد مفتوحات مفترح)

(O_3) $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}\quad A_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{1\le i\le n} A_i \in \mathcal{O}$ كل تقاطع منته لمفتوحات مفتوح

* نقول أن الجزء A من E جزء مغلق أو مغلق اذا كان متممة لمفتوح.

اذا كانت $\mathcal{F}$ ترمز الى مجموعة المغلقات ، لدينا:

$$A \in \mathcal{F} \iff A^C \in \mathcal{O}$$

باستعمال مفهوم الملاصق لدينا:

$$A \in \mathcal{F} \iff \overline{A} = A$$

__مثال__: كل كرة مغلقة هي مغلق لـ E .

__ملاحظة:__ رأينا أن في $\mathbb{R}^n$ مفهوم المفتوح لا يتعلق بالنظيم المختار والشيء نفسه بالنسبة لمفهوم المغلق.

__الخواص الرئيسية للمغلوقات__:

(F1) $\varnothing \in \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{F}$ (مغلقان $\varnothing$ و E)

(F2) $\forall\ i \in I\,,\ A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$ (كل تقاطع مغلقات مغلق)

(F3) $\forall\ i \in \{1,\dots,n\}\,,\ A_i \in \mathcal{F}$ (كل اتحاد منته لمغلقات مغلق)

3.2.1 جزء متراص من $\mathbb{R}^n$:

ليكن A جزء من $\mathbb{R}^n$

نقول أن A جزء محدود من $\mathbb{R}^n$ (او محدود من $\mathbb{R}^n$)، اذا كان:

$$\exists r > 0\ ,\ \forall x \in A \qquad \|x\| \le r$$

ملاحظة: من تكافؤ النظم في $\mathbb{R}^n$ ، نستنتج أن هذا المفهوم مستقل عن النظيم المختار .

قضية: كل كرة (مفتوحة أو مغلقة) محدودة في $\mathbb{R}^n$.

البرهان: لتكن الكرة ذات المركز a ونصف القطر r .

لنثبت أن:

$$B(a,r) \subset \overline{B}\,(a,r) \subset \overline{B}\,(o,r+\|a\|)$$

نلاحظ أن المحتواة الاولى بديهية.

لدينا:

$$x \in \overline{B}\,(a,r) \Leftrightarrow \|x-a\| \le r$$
$$\Rightarrow \|x\|-\|a\| \le r$$
$$\Rightarrow \|x\| \le r+\|a\|$$

نقول ان الجزء A من $\mathbb{R}^n$ متراص من $\mathbb{R}^n$ اذا كانت A مغلقة ومحدود في الوقت نفسه.

ملاحظة: كل كرة مغلقة من $\mathbb{R}^n$ متراص من $\mathbb{R}^n$.

3.1. استمرارية التطبيقات من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^p$

ليكن U مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، $a=(a_1,\ldots,a_n)$ نقطة من U و f تطبيق من U نحو $\mathbb{R}^p$.

بما أن $f(x) \in R^p$ من أجل كل $x \in U$ فمن الطبيعي كتابة

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \quad \forall x \in U$$

حيث f_i ، $i=1,..p$ تطبيق من U نحو $\mathbb{R}$ ولهذا نكتب $f=(f_1,\ldots, f_p)$.

1.3.1 تعريف استمرارية تطبيق:

نقول أن f تطبيق مستمر عند النقطة a اذا كانت احدى الشروط الاربعة المتكافئة التالية محققة:

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$

2) $\forall B_p(f(a),\varepsilon), \exists B_n(a,\delta) : f(B_n(a,\delta)) \subset B_p(f(a),\varepsilon)$

3) $\forall i \in \{1,\ldots,p\}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f_i(x)-f_i(a)\| < \varepsilon$

4) من أجل كل $i \in \{1,\ldots,p\}$ التطبيق f_i مستمر عند a

2.3.1 ملاحظات وخواص:

1- الاستمرارية عند a لتطبيق مجموعة وصوله $\mathbb{R}^p$ تكافىء الاستمرارية عند a لـ p تطبيق مجموعة وصوله $\mathbb{R}$. ولهذا السبب نقتصر عموما، على دراسة التطبيقات من U نحو $\mathbb{R}$.

2- لدينا العلاقتين التاليتين:

$$f_r = \mathrm{P}_r \circ f \qquad , \qquad r = 1,\ldots,p$$

$$f = \sum_{r=1}^{p} i_r \circ f_r$$

حيث $\mathrm{P}_r : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$(x_1,\ldots,x_p) \to \mathrm{P}_r(x) = x_r$$

$$i_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$$

$$t \to i_r(t) = (0,\ldots,0,t,0,\ldots,0)$$

كل المركبات معدومة ما عدا الموجودة في الرتبة r .

P_r و i_r هما على الترتيب الاسقاط النموذجي r والتباين النموذجي r ، $r = 1,\ldots,p$

التطبيق P_r خطي ومنه فهو مستمر من $\mathbb{R}^p$ نحو $\mathbb{R}$ والشيء نفسه بالنسبة لـ i_r ومنه فهو مستمر من $\mathbb{R}^p$ نحو $\mathbb{R}$.

3 - الشروط الاربعة السابقة الذكر مستعملة بواسطة نظم لكنها مستقلة عن النظيم المختار لأن في الفضاء ذو بعد منته كل النظم متكافئة كما وضحنا ذلك في $\mathbb{R}^n$.

4-لاثبات أن f مستمرة ، لا يكفي اثبات أن f مستمرة بالنسبة الى كل مركبة من مركبات المتغير.

وبوضوح اذا عرفنا الدوال العددية g_i بـ $i = 1,..,n$ $\quad g_i(t) = f(a_1,..,a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

حيث $a = (a_1,\ldots,a_n)$ معطى و t ينتمي الى مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ ذو مركز a_i ، فان :

f مستمرة عند a يعني g_i مستمرة عند a_i من أجل كل i . لكن العكس غير صحيح أي اذا كانت g_i مستمرة عند a_i من اجل كل i فهذا لا يعني حتما أن f مستمرة عند a كما يوضحه المثال الموالي:

مثال:

ليكن التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

نأخذ $a=(a_1,a_2)=(0,0)$

فلدينا من أجل $t\in\mathbb{R}$ $g_1(t)=f(t,0)=0$ و $g_2(t)=f(0,t)=0$

ومنه g_1 و g_2 مستمرين عند 0 لكن f ليست مستمرة عند $(0\,,0)$ لانه مثلا

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=0.5\neq f(0,0)$$

5- ليكن D جزء غير خال من E ، نفرض أن f من U نحو $\mathbb{R}$ معرفة بـ

$$f(x,y)=\begin{cases}g(x) & x\in D\\ h(x) & x\in U\setminus D\end{cases}$$

لدراسة استمرارية f عند نقطة $a\in U$ يجب التمييز بين الحالات الثلاثية التالية:

الحالة1: اذا كان $a\in D$ و D جوار لـ a فان استمرارية f عند a تكافؤ استمرارية g عند a .

الحالة2 : اذا كان : $a\in U\setminus D$ و $U\setminus D$ جوار لـ a فان استمرارية f عند a تكافؤ استمراريۃ h عند a .

الحالة3: اذا لم يكن D جوار لـ a و $U\setminus D$ كذلك فان لدراسة استمرارية f عند a يجب دراسة كل g و h في جوار a .

6 - اذا كانت$(x_1,\dots,x_n)$ φ علاقة (تربط بين المركبات $x_n,\dots,x_1$ للمتغير x) ليست متناقضة مع المعطيات (x يؤول الى a) فان :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)=0}} f(x) = f(a)$$

لكن الاستلزام الغير مباشر خاطئ ، وهدا يعنى انه لإثبات استمرارية f عند a يجب إثبات ان f تؤول الى $f(a)$ بدون اى شرط حول الكيفية التي يؤول بها x الى a .

هده الملاحظة مهمة و مستعملة خاصة عندما نثبت أن f ليست مستمرة عند a. و عليه فى هده الحالة يجب إيجاد علاقة : $\varphi(x)=0$ حيث: $\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)=0}} f(x) \neq f(a)$

مثال: التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ليس مستمر عند(0,0) لأنها إذا أخذنا العلاقة : $\varphi(x,y) = x + y^2 = 0$ (وهي ليست متناقصة مع المعطيات (x,y) يؤول الى (0,0))

نلاحظ جيدا أن:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \varphi(x)=0}} f(x) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

3.3.1 استمرارية التطبيقات المركبة:

نظرية: ليكن U و V مفتوحان من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ على الترتيب و $f:U\to V$ و $g:V\to\mathbb{R}^q$ تطبيقان. اذا كانت f مستمرة عند a من U و g مستمرة عند $f(a)$ من V فان التطبيق المركب gof مستمر عند a .

ملاحظة: استمرارية gof لا تستلزم حتما استمرارية كل f و g .

4.3.1 الاستمرارية على مجموعة:

نقول أن f مستمرة على U اذا كانت f مستمرة عند كل نقطة a من U .

4.1 استمرارية التطبيقات الخطية :

فى هذه الفقرة، E و F يعتبران فضاءين شعاعيين على نفس الجسم K.

نذكر ان تطبيق u من E نحو F يكون خطيا اذا تحقق ما يلى:

$$u(\alpha x+\beta y) = \alpha u(x) +\beta u(y) \qquad \forall\, x,y \in E \quad , \ \forall\ \alpha , \beta \in K$$

1.4.1 نظرية : اذا كان u تطبيق خطى من E نحو F فان الشروط التالية متكافئة :

(1) u مستمرة على E

(2) u مستمرة عند المبدأ .

(3) u محدودة على كرة الوحدة المغلقة لـ E .

(4) u محدودة على سطح كرة الوحدة لـ E .

(5) يوجد ثابت موجب M حيث :

$$\forall\ x \in E : \quad \|u(x)\|_F \leq M\ \|x\|_E$$

ملاحظة:

1. فى الادعاء (2) للنظرية السابقة نستطيع تعويض الاستمرارية عند المبدأ بالاستمرارية عند أي نقطة أخرى من E.
2. فى الادعاء(3) نستطيع تعويض كرة الوحدة المغلقة بكرة مغلقة ذات نصف القطر $r > 0$
3. فى الادعاء(4) نستطيع تعويض سطح كرة الوحدة بسطح كرة ذات نصف القطر $r > 0$.

2.4.1 نظرية:

1). مجموعة التطبيقات الخطية المستمرة من E نحو F والتى نرمز لها بالرمز L(E , F) فضاء شعاعى على K .

2).التطبيق $\|u(x)\|_F$ $u \to \|u\| = \sup\limits_{\|x\|_E = 1}$ نظيم على L(E , F)

ملاحظة:

من اجل $u \in L(E, F)$ لدينا :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|x\|_E}{\|u(x)\|_F}$$

$$\boxed{\|u(x)\|_F \leq \|u\| . \|x\|_E \qquad \forall\ x \in E}$$

$\|u\|$ هى أصغر ثابت يحقق المتباينة السابقة .

3.4.1 حالة بعد منته:

قضية: اذا كان بعد E منته، فان كل تطبيق خطي من E نحو F مستمر (مهما كان بعد F).

5.1 تمارين:

تمرين 1: بين أن التطبيق N من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ المعرف بـ $N(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|$

نظيم على $\mathbb{R}^2$.

تمرين 2: ادرس استمرارية الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}^2$ بـ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تمرين 3: لتكن الدالة f من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$f(x,y) = \frac{xyz}{x+y+z}$$

احسب نهاية الدالة f (ان وجدت) عند النقطة $a = (0,0,0)$

تمرين 4: ليكن E و F ف،ش،ن حقيقيين و f تطبيق مستمر من E نحو F يحقق العلاقة :

$$(*) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x,y \in E$$

اثبت أن f تطبيق خطي .

6.1 الحلول:

حل التمرين 1:

-1 لدينا $N(0,0) = 0$ و

$$N(x,y) = 0 \Rightarrow \forall\, t \in [0,1] \quad x + ty = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (t = 0) \\ x+y = 0 & (t = 1) \end{cases}$$

و منه $(x,y) = (0,0)$

-2 $$N(\lambda(x+y)) = N(\lambda x\,,\, \lambda y) = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda x\,,\, \lambda ty\,| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| = |\lambda|\, N(x,y)$$

-3 $$N((x,y) + (x', y')) = \sup_{t\in[0,1]} |x+x' + t(y+y')|$$

التطبيق الذي يرفق الى $t\in[0,1]$ العدد $|x+x' + t(y+y')|$ مستمر على $[0,1]$ (وهذا من أجل كل x, x', y, y') وعليه فهو محدود ويأخذ حديه أي:

$$\exists\, t_0 \in [0,1] \quad N((x,y) + (x', y')) = |x+x'+t_0(y+y')|$$
$$\leq |x+t_0+y| + |x'+t_0y'|$$
$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| + \sup_{t\in[0,1]} |x'+ty|$$

ومنه النظيم N نظيم على $\mathbb{R}^2$.

حل التمرين 2:

-1 f مستمرة على $\mathbb{R}^2 - \{(0,0\}$ لانها دالة ناطقة .

بالمرور الى الحداثيات القطبية ، لدينا :

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta| = \left| \frac{r^3}{r^2} \cos^2\theta \sin\theta \right| \le r$$

وعليه $|f(x,y)| \le \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 |$

وبالتالي f مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

3 - بنفس الطريقة السابقة نثبت أن :

$$|g(x,y)| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

وعليه $\operatorname{Lim}\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$

ومنه g مستمرة عند $(0,0)$ ومنه على $\mathbb{R}^2$ ، لانها دالة ناطقة على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

حل التمرين 3:

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$

$f(x,0,0) = 0$ و $f(x,x,x^3 - 2x) = x^2 - 2$

ومنه $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0} f(x,x,x^3 - 2x) = -2 \neq 0$

وبالتالي f لا تقبل نهاية عند $(0,0,0)$.

حل التمرين 4:

يجب فقط اثبات أنه:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \forall (\lambda,x) \in \mathbb{R}\times E \qquad (1)$$

من العلاقة (*) نستنتج بسهولة أن

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-x) = -f(x) \qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}\times E \\ f(nx) = nf(x) \end{cases}$$

و منه : $\quad nf\left(\frac{x}{n}\right) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = f(x) \quad \forall (n,x) \in \mathbb{Z}^* \times E$

و بالتالي :

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(n\frac{x}{m}\right) = nf\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m}f(x) \quad \forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \qquad (2)$$

وعليه فالعلاقة (1) صحيحة من أجل كل $\lambda \in \mathbb{Q}$ وكل $x \in E$. من جهة أخرى ، $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$. اذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$ ، يوجد متتالية أعداد صماء (λ_n) حيث $\lim\limits_{n} \lambda_n = \lambda$.

باستعمال استمرارية f والعلاقة (2) نجد من أجل كل $x \in E$.

$$f(\lambda x) = f(\lim_{n} \lambda_n \,.\, x) = f(\lim_{n} (\lambda_n x)) = \lim_{n} f(\lambda_n x) = \lim_{n} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$$

العلاقة (1) اذن محققة . نستنتج خطية f .