Chapitre : 01

Introduction aux équations différentielles partielles

Après avoir lu ce chapitre, vous devriez être capable de :

1. identifier la différence entre les équations différentielles ordinaires et partielles.

2. identifier différents types d'équations aux dérivées partielles.

Qu'est-ce qu'une équation différentielle partielle (PDE)

Une équation différentielle avec une variable indépendante est appelée une équation différentielle ordinaire. Un exemple d'une telle équation serait

$$3\frac{dy}{dx}+5y^2=3e^{-x} \quad , y(0)=5$$

Où y est la variable dépendante et x est la variable indépendante.

Et s'il y a plus d'une variable indépendante ? Ensuite, l'équation différentielle est appelée une équation différentielle partielle. Un exemple d'une telle équation serait

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$$

Sous certaines conditions : où u est la variable dépendante, et x et y sont les variables indépendantes.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D=0$$

Où A, B et C sont des fonctions de y et x et D est une fonction de x, y, u, et $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

En fonction de la valeur de B^2-4AC une PDE linéaire du 2ème ordre peut être classée en trois catégories.

1. si B^2-4AC <0, on l'appelle elliptique

2. si B^2-4AC =0, il est appelé parabolique

3. si B^2-4AC > 0, on l'appelle hyperbolique

Équation elliptique

L'équation de Laplace pour la température en régime permanent dans une plaque est un exemple d'une équation différentielle partielle linéaire elliptique du second ordre. L'équation de Laplace pour la température en régime permanent dans une plaque est donnée par

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

En utilisant la forme générale des EDP linéaires du second ordre avec une variable dépendante et deux variables indépendantes,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D=0$$

$$A=1, B=0, C=1, D=0\,,$$

Donne

$$
\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= 0 - 4(1)(1) \\
&= -4 \\
&= -4 < 0
\end{aligned}
$$

Cela classe l'équation (8) comme elliptique.

Équation parabolique

L'équation de conduction thermique est un exemple d'équation différentielle partielle linéaire parabolique du second ordre. L'équation de conduction thermique est donnée par

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

En utilisant la forme générale des EDP linéaires du second ordre avec une variable dépendante et deux variables indépendantes,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

$$A = k, B = 0, C = 0, D = -1,$$

Donne

$$
\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= 0 - 4(0)(k) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Cela classe l'équation (9) comme parabolique.

Équation hyperbolique

L'équation d'onde est un exemple d'équation différentielle partielle linéaire hyperbolique du second ordre. L'équation d'onde est donnée par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

En utilisant la forme générale des EDP linéaires du second ordre avec une variable dépendante et deux variables indépendantes,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

$$A = 1, B = 0, C = -\frac{1}{c^2}, D = 0$$

Donne

$$
\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= 0 - 4(1)\left(\frac{-1}{c^2}\right) \\
&= \frac{4}{c^2} \\
&= \frac{4}{c^2} > 0
\end{aligned}
$$

Cela classe l'équation (10) comme hyperbolique.