دروس للأساتذة التعليم المتوسط

السنة الثانية رياضيات

الوحدة : هندسة I

دروس وأعمال موجهة

من إعداد

عبد المالك بوزاري

يوســف قــرقــور

guergour@ens-kouba.dz

قسم الرياضيات

المدرسة العليا للأساتذة، القبة–الجزائر

الإرسال الثاني والثالث

يشمل الإرسال الثاني والثالث :

- **الفضاءات الاقليدية**

1. مفهوم الفضاء التآلفي، خواص، الزمرة التآلفية.
2. المعالم والتوجيه.
3. الفضاءات التآلفية الجزئية ؛ معادلات فضاء تآلفي جزئي
4. الفضاءات الاقليدية، التعامد – مفاهيم الزوايا.
5. المسافة بين الفضاءات التآلفية الجزئية في البعد 2 و 3.
6. التقايسات : الإزاحة (Déplacement) وضد – الإزاحة Anti déplacement حالة البعد 2 و 3.
7. التشابهات.
8. الإحداثيات القطبية، الأسطوانية، الكروية.

- **القطوع المخروطية**

I. تعريف : البؤرة، الدليل المخروطي، التباعد المركزي.

II. الأنماط المختلفة للقطوع المخروطية.

III. المعادلة القطبية للقطع المخروطي.

IV. المعادلة العامة للقطوع المخروطية.

- **الدراسة التآلفية للأقواس الهندسية**

I. السبل – الأقواس الهندسية – الأقواس الموجهة، الأقواس المنتظمة.

II. الفضاءات الجزئية الأساسية – المماس – المستوي

III. الخاصية المميزة للأقواس المستوية – أقواس مستوية بسيطة – الفروع اللانهائية.

IV. المنحنيات المستوية المعرفة ضمنيا.

- **الدراسة المترية للأقواس**

1. الأقواس القابلة للتعديل – طول القوس
2. الوسيطات المنظمية

الفضاءات التآلفية (Espaces affines)

الفضاء التآلفي الكيفي

لتكن E مجموعة غير خالية عناصرها نقاط، وليكن X فضاء شعاعيا على IR (حقل)، ولنفرض وجود تطبيق : $(A,B)\mapsto \overrightarrow{AB}$ الذي يحقق الشرطين

1. $\forall (A,B,C)\in E^3 : \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (علاقة شال).
2. من أجل كل A مثبتة من E يكون التطبيق

$$\begin{aligned} f_A &: E \to X \\ M &\mapsto f_A(M)=\overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

تقابلا.

تعريف 1

نقول عن (E, X, f) هو فضاء تآلفي مرفق بـــ X كفضاء شعاعي، والفضاء الشعاعي X يسمى أيضا موجه لـــــ E، كما يسمى E موجه بالفضاء الشعاعي X.

مبرهنة 1

لتكن A نقطة من E نعرف f_A بـــ :

$$\begin{aligned} f_A &: E \to X \\ M &\mapsto M' = f_A(M)=\overrightarrow{AM}=M-A \end{aligned}$$

نقول بأنه تقابل

* f_A متباين : ليكن M_2, M_1 من X وإذا كان

$$f_A(M_1)=f_A(M_2) \Rightarrow M_1=M_2$$

$$AM_1 = AM_2 \Leftrightarrow M_1 - A = M_2 - A \Leftrightarrow M_1 = M_2$$

منه f_A متباين.

* f_A غامر $T_A(M) = M'$ هل يوجد M من X بحيث $T_A(M) = M'$ أي $AM = M'$ وهو موجود بالتعريف.

إذن f_A تقابل. أو بعبارة أخرى فإن f_A تقابل لأنه انسحاب بـــ A-.

ومنه البينيتان التألفية والشعاعية متقابلتان

مثال

IR^n هو فضاء تآلفي ذو بعد n على IR مرفق بالفضاء الشعاعي IR^n مع :

$$M = (x_1,...,x_n), M' = (x'_1,...,x'_n)$$
$$\overrightarrow{MM'} = (x'_1 - x_1,...,x'_n - x_n)$$

ملاحظات

- إذا كان الفضاء الشعاعي X منته البعد وبعده n، نقول إن E فضاء تآلفي منته البعد أيضا وبعده n.
- إذا كان بعد E هو 1 ($\dim E = 1$) يسمى E مستقيما تآلفيا.
- إذا كان بعد E هو 2 ($\dim E = 2$) يسمى E مستويا تآلفيا.

إذن f_A هو تطبيق تقابلي لأنه انسحاب بشعاع A– ومن هذا المثال نعرف البنية القانونية (النموذجية) لفضاء تآلفي نرمز له بـــ $\mathscr{A}(X)$ على X .($\mathscr{A}(IR^2)$, $\mathscr{A}(IR^3)$)

ملاحظة

التطبيق التقابلي f_A يتعلق بـــ A.

لأنه إذا فرضنا نقطة أخرى $A \neq B$ من E يكون لدينا :

$$f_B(M) = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + f_A(M)$$

الانسحاب (Translations)

خاصية

ليكن (E, X, f) فضاءا تآلفيا كيفيا و v شعاعا مثبتا من X : ان المساواة $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ تعرف لنا تطبيقا $M \mapsto M'$ وهو تقابل t_v من E الى E أي أن :

$$t_v : E \to E$$
$$M \mapsto M' = t_v(M) = \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

ويسمى هذا التطبيق t_v انسحاب بالشعاع v.

المساواة $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ تعرف لنا تطبيقا، لأنه إذا كان لدينا $M \in E, v \in X$ و (E, X, f) فضاء تآلفي وكان $M' \in E$ ومن تقابل f_A يكون :

$$f_M : E \to E$$
$$M \mapsto M = f_M(M) = MM = 0$$

إذن التطبيق معرف جيدا.

* t_v التباين

$$t_v(M) = t_v(M_1) \Rightarrow M = M_1$$

لدينا

$$t_v(M) = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$$

ليكن A بحيث

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM'}$$

ومنه

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{M_1A}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM_1}=\vec{0}$$

إذن

$\overrightarrow{MM_1}=\vec{0}$ ومنه $M=M_1$ ، التطبيق متباين.

* t_v غامر : هل يوجد M من E بحيث $t_v(M)=M'$ ومنه فإن $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}=\vec{v}$ فيكون $\overrightarrow{MA}=\vec{v}-\overrightarrow{AM'}$ وبالتالي $f_M(M')=\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$ ،

إذن غامر.

ومنه t_v تقابل.

تعريف 2

التطبيق التقابلي t_v المعرف آنفا يسمى انسحاب معرف على الفضاء التآلفي E بواسطة الشعاع v من X .

مثال

لنعتبر الفضاء التآلفي النموذجي $\mathscr{A}(X)$ الموجه بالفضاء الشعاعي X ، إن انسحاب الشعاع v هو التطبيق

$$\begin{aligned} t_v : X &\to X \\ x &\mapsto t_v(x)=x'=x+v \end{aligned}$$

وهو تقابل (واضح).

ملاحظة

التطبيق t_v ليس خطيا

برهان

$$\begin{aligned} t_v : X &\to X \\ x &\mapsto t_v(x)=x+v \end{aligned}$$

لدينا

$$t_v(x+y)=x+y+v$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$t_v(x)+t_v(y)=x+v+y+v=2v+x+y$$

ومنه

$$t_v(x)+t_v(y)\neq t_v(x+y)$$

وبالتالي غير خطي.

مثال

في المستوي المنسوب إلى معلم، الانسحاب الذي شعاعه $v\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ هو التطبيق الذي يرفق كل من النقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ بحيث $MM'=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

ومنه
$$\begin{pmatrix}x'-x\\ y'-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

إذن
$$\begin{cases}x'=x+\alpha\\ y'=y+\beta\end{cases}.$$

مبرهنة 2

مجموعة انسحابات الفضاء التآلفي E تشكل زمرة ضربية تبديلية T. وهي في تشاكل مع الزمرة الجمعية للفضاء الشعاعي X عن الطريق التطبيق $\vec{v}\mapsto t_{\vec{v}}$.

لنبرهن **أن** T زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

أ. t_0 انسحاب الشعاع المعدوم وهو التطبيق المطابق I على E.

ب. لدينا كذلك $t_{\vec{v}} o t_{\vec{v}'} = t_{\vec{v}+\vec{v}'} \in T$.

نحسب $t_{\vec{v}+\vec{v}'}(M) = \overrightarrow{MM''} = \vec{v} + \vec{v}'$

لأن $t_{\vec{v}+\vec{v}'}(M)$ هي نقطة M'' معرفة بـــ

$\overrightarrow{MM''} = \vec{v} + \vec{v}'$. و $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}}(M)$

هي نقطة M_1'' بحيث :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}', \quad \overrightarrow{M'M_1''} = \vec{v}$$

ومنه حسب علاقة شال يكون لدينا

$$\overrightarrow{MM_1''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M_1''} = \vec{v}' + \vec{v} ،$$

فيكون

$$\overrightarrow{MM_1''} = \overrightarrow{MM''} .$$

إذن $M_1'' = M''$.

جـــ. لدينا $t_{\vec{v}} o t_{\overrightarrow{-v}} = t_{\vec{0}}$ ومنه يكون $t_{\overrightarrow{-v}} = \left(t_{\vec{v}}\right)^{-1} \in T$ ومنه فإن T زمرة.

(T,o)هي في تشاكل مع $(X,+)$عن طريق التطبيق $\varphi : \vec{v} \mapsto t_{\vec{v}}$.

. حسب ما تقدم فإنه غامر.

. وهو كذلك تماثل حسب العلاقة $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} = t_{\overline{u+v}}$.

. كما أنه متباين لأن :

$t_{\vec{v}} = I \Rightarrow \overrightarrow{M'} = \overrightarrow{M}$ و $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ (أنظر الجبر العام).

خاصية

الانسحاب معرف بطريقة وحيدة بدلالة ثنائية نقطية كيفية.

إذا كان $A \mapsto B$ ، الانسحاب موجود ووحيد والذي هو التطبيق $t_{\vec{v}}$ الذي شعاعه $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

الانسحاب الذي له نقطة ثابتة $(A = B)$ هو التطبيق المطابق، هو انسحاب بشعاع $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

الفضاءات التآلفية الجزئية في $IR^2[IR^3]$

ترميز: نعتبر $IR^2[IR^3]$ مزود بالبنية التآلفية النموذجية A_2 $[A_3]$.

المستقيم التآلفي في A_2

تعريف 1

لتكن النقطة A من A_2 و $\vec{u}$ من $IR^2 - \{0\}$ ، نسمي مستقيما تآلفيا يمر بالنقطة وموجه$\vec{u}$، مجموعة النقاط M من A_2 بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ مواز لــ $\vec{u}$ ونرمز له بــ

$$D\left(A,\vec{U}\right) = \left\{M \in A_2 \,/\, \exists k \in IR : \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\right\}$$

$$D\left(A,\vec{U}\right) = \left\{M \in A_2 \,/\, \exists k \in IR = M = A + k\vec{U}\right\}$$

$$D\left(A,\vec{U}\right) = A + \vec{F} \,/\, \vec{F} = \{k\vec{u}, k \in IR\}$$

ملاحظة

إن وجود النقطة A والشعاع $\vec{u}$ يعينان معادلة مستقيم. (أي أن يعرف المستقيم Dمن A_2 $[A_3]$.).

تعريف 2

نسمي $\vec{F}$ إتجاه المستقيم وكل عنصر من $\vec{F}$ يسمى شعاع التوجيه D .

ملاحظة

كل مستقيم له ما لانهاية من أشعة التوجيه.

تعريف 3

نسمي محور لــ A_2 كل ثنائية $(D,\vec{U})$ بحيث D مستقيم و $\vec{U}$ شعاعه الموجه.

مثال

على المحور $x'ox$ نأخذ $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{i}$

نسمي λ القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{AB}$ على المحور ونرمز له بـــ $\lambda=\overline{AB}$.

خواص القياس الجبري: القياس الجبري لــ $\overline{AB}$ مرتبط دائما باختيار $\vec{U}$ (شعاع التوجيه) $\vec{U}\in IR-\{0\}$

1. $\overline{AB}=0 \Leftrightarrow A=B$
2. $\overline{BA}=-\overline{AB}$
3. $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$
4. $\overline{AB}=\overline{CB}-\overline{CA}$

برهان

1. $\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\vec{u} \Leftrightarrow A=B$
2. $\overline{AB}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}=-\overline{BA}\vec{u} \Rightarrow AB=-BA$

أو
$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{0} \Rightarrow \overline{BA}=-\overline{AB}$$
$$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=(x_B-x_A)$$

3. $\overline{AC}\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overline{AB}\vec{u}+\overline{BC}\vec{u}=\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)\vec{u} \Rightarrow \overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$
4. نفس الشيء.

مبرهنة 1

لكل نقطتين مختلفتين M_1 و M_2 من A_2 يوجد مستقيم تآلفي وحيد يشمل على M_1 و M_2 نرمز له $D=(M_1M_2)$.

برهان

إذا كانت $M_2 \neq M_1$ فإن $D\left(M_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right)$

ليكن D' مستقيم تآلفي آخر يشمل M_1 و M_2 / $D'\left(M_2,\vec{U}\right)$

$$M_2 = M_1 + \lambda\vec{U}$$

ولكن

$$M_2 = M_1 + \lambda'\overrightarrow{M_1M_2'}$$

ومنه يوجد k بحيث

$\overrightarrow{M_1M_2} = k\vec{U}$ إذن D هو D'

قضية

ليكن $i=\overline{1,3}$ $M_i\left(x_i, y_i\right)$ من A_2 الخواص التالية متكافئة:

1. M_1, M_2, M_3 على استقامة واحدة.
2. $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)$ مرتبطة خطيا.
3. $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$
4. $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

المعادلة الديكارتية لمستقيم تآلفي من A_2

تعارف

الزاوية الموجهة لمستقيمان D و D'

لتكن $D(M_0,\vec{u})$ و $D'(M_0,\vec{v})$ نسمي زاوية المستقيمان ونرمز غليها بـــ (D,D') زاوية الشعاعان الموجهان $(\vec{u},\vec{v})$

1. المعلم الديكارتي.
2. ليكن F ف.ت.ج.

   نسمي معلم ديكارتي لـــF كل ثنائي (O,B) بحيث O نقطة من F و B أساس لـــ $\vec{F}$.
3. ونسمي معلم ديكارتي نموذجي الثنائي (O,B) بحيث $O=(0,0)$ و B أساس نموذجي لـــIR^2.
4. ونسمي إحدثيات (أو مركبات) النقطة M في (O,B) إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{OM}$ في B.
5. ليكن A_2 مزود بمعلم ديكارتي قانوني $B(o,\vec{i},\vec{j})$ بحيث :

   $O=(0,0)$ ، $\vec{i}=(1,0)$ ، $\vec{j}=(0,1)$

المستقيم المار بالنقطة $M_0(x_0,y_0)$ وموجه بالشعاع الغير معدوم $\vec{U}=(u,v)$ يقبل معادلة ديكارتية من الشكل:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & u \\ y-y_0 & v \end{vmatrix}=0$$

$$v(x-x_0)-u(y-y_0)=0$$
$$vx-vx_0-uy-uy_0=0$$
$$vx-vy=vx_0+uy_0$$

6. والمعادلة الوسطية هي من الشكل

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda u \\ y=y_0+\lambda v \end{cases} \lambda\in IR$$

مثال

$$M_0=(2,-1);\vec{u}(1,3)$$
$$M\in D(M_0,\vec{u}) \qquad \overrightarrow{M_0M}=h\vec{v}$$
$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y+1 & 3 \end{vmatrix}=3(x-2)-(y+1)=0$$

المعادلة الديكارتية
$$=3x-6-y-1=0$$
$$=3x-y-7=0$$

ملاحظة

المستقيم الذي معادلته الديكارتية:

$ax+by+c=0;\quad (a,b)\neq(0,0)$ يقبل $\vec{u}=(b,-a)$ كشعاع موجه.

7. **توازي مستقيمان من** A_2

تعريف 4

المستقيمان D و D' من A_2 يكونان متوازيان إذا كان $\vec{F}=\vec{F}'$ بحيث F و F' هما موجهان D و D' على التوالي.

أي أن :

$$D\,//\,D'\Leftrightarrow \vec{F}=\vec{F}'$$

ومنه $\overrightarrow{u'} = \lambda\vec{u}$

إذا كان ألشعاعها من F و 'F على التولي

قضية

ليكن D مستقيم تآلفي معادلته:

$$ax + by + c = 0$$

D_1 مستقيم تآلفي معادلته:

$$a'x + b'y + c' = 0$$

فـــ :

$$D // D_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

برهان

ليكن D شعاعه الموجه هو $\vec{U}(-b, a)$ و D_1 شعاعه الموجه $\overrightarrow{U_1}(-b', a')$

$D // D_1 \Leftrightarrow (\vec{U}, \overrightarrow{U_1})$ مرتبط $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & b' \\ -a & -a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ نختصر النتائج المحصل عليها في الجدول التالي

أمثلة

$$D(M, \vec{U}); M_0 = (1,2); \vec{U} = (0,3)$$
$$D_1(M_1, \vec{V}); M(x, y)$$

التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda 0 = 1 \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

المعادلة الديكارتية

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = -3x + 3 = 0$$

$$D_1 // D \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ a' & b_1 \end{vmatrix} = -3b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 / \vec{v}(0, -a_1)$$

$$D_1 \perp D \Leftrightarrow b_1 \times 0 + 3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 / \vec{v}(b_1, 0)$$

المسافة بين نقطة ومستقيم

(P) المستوي منسوب إلى م.م.م $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(Δ) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$

M_0 نقطة إحداثيتها $M_0(x_0, y_0)$

لنحسب المسافة بين النقطة M_0 والمستقيم (Δ) أي المسافة بين النقطتين M_0 و E ، حيث E هو المسقط العمودي للنقطة M_0 على (Δ).

ليكن (x, y) إحداثي النقطة E

$\vec{V}$ شعاع الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ والعمودي على (Δ)

لدينا من جهة

$$\vec{V} \text{ x } \overrightarrow{EM_0} = \|\vec{V}\| \|\overrightarrow{EM_0}\| Cos(\vec{V}, \overrightarrow{EM_0})$$

وبما أن $\vec{V} // \overrightarrow{EM_0}$ يكون لدينا

$$\|\vec{V} \text{ x } \overrightarrow{EM}\| = \|\vec{V}\| \|\overrightarrow{EM_0}\|$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\left\|\vec{V} \text{ x } \overrightarrow{EM_0}\right\| = \left|a\left(x_0 - x\right) + b\left(y_0 - y\right)\right|$$

$$\left\|\vec{V} \text{ x } \overrightarrow{EM_0}\right\| = \left|ax_0 + by_0 - ax - by\right|$$

وبما أن $E \in \Delta$ فإن

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

ومنه

$$\left\|\vec{V} \text{ x } \overrightarrow{EM_0}\right\| = \left|ax_0 + by_0 + c\right|$$

$$\left\|\overrightarrow{EM_0}\right\| = \frac{\left\|\vec{V} \text{ x } \overrightarrow{EM_0}\right\|}{\left\|\vec{V}\right\|} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مبرهنة 2

ليكن D و D' مستقيمين تآلفيين في A_3

1- إذا كان

- $D \neq D'$ و $D' // D \Leftarrow D \cap D' = \phi$
- $D = D'$ و $D // D' \Leftarrow D \cap D' = D$

2- إذا كان D غير موازي لـــ D' و $D \neq D' \Leftarrow \exists A / D \cap D' = \{A\}$

برهان

1- ليكن D و D' بحيث :

$$D / ax + by + c = 0$$

$$D' / a'x + b'y + c' = 0$$

$$D // D' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \exists k \in IR^*; a' = ka; b' = kb$$

ومنه

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by + \frac{c'}{k} = 0$$

- إذا كان $c = \frac{c'}{k} \Leftarrow$ توجد مالا نهاية من الحلول.
- إذا كان $c \neq \frac{c'}{k} \Leftarrow$ لا توجد حلول.

3- D غير موازي لـــ D' $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ فالجملة تقبل حلا وحيد.

تذكير لبعض النتائج

المعدلة الديكارتية للمستقيم $D(M(x,y),u(u_0,v_0))$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_0 \\ y - y_0 & v_0 \end{vmatrix} = 0$ *ie* $v_0 x - v_0 y = v_0 x_0 + u_0 y_0$
المعادلة الوسطية أو التمثيل الوسطية للمستقيم $D(M_0(x_0,y_0),u(u_0,v_0))$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_0 \\ y = y_0 + \lambda v_0 \end{cases} \lambda \in IR$
الشعاع الموجه للمستقيم $(a,b) \neq (0,0)$ $D: ax+by+c=0$	$\vec{u} = (b, -a)$
الشعاع العمدي للمستقيم $(a,b) \neq (0,0), D: ax+by+c=0$	$\vec{v} = (a, b)$

المسافة بين نقطة $M_0(x_0,y_0) \notin D$ والمستقيم $D: ax+by+c=0$ $(a,b)\neq(0,0)$	$d(M_0,D) = \frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
مستقيمان متوازيان $D/ax+by+c=0$ $D'/a'x+b'y+c'=0$ $(a,b)\neq(0,0)$ $(a',b')\neq(0,0)$	$D//D' \Leftrightarrow \vec{v}//\vec{v'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-ba'=0$
مستقيمان متعامدان $D/ax+by+c=0$ $D'/a'x+b'y+c'=0$ $(a,b)\neq(0,0)$ $(a',b')\neq(0,0)$	$\mathbf{D'} \perp \mathbf{D} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{v'}=0 \Leftrightarrow a.a'-b.b'=0$

المستوي التآلفي في A_3 .

تعريف 6

لتكن النقطة A من A_3 و $\vec{P}$ مستوي شعاعي من IR^3 ، نسمي مستوي تـــآلفي يمر بالنقطة A وموجه بـــ $\vec{P}$، مجموعة النقاط M من A_3 بحيـــث يكـــون $\overrightarrow{AM}$ من $\vec{P}$ ونرمز له بـــ

$$P\left(A,\vec{P}\right)=\left\{M \in A_3 \,/\, AM \in \vec{P}\right\}$$

$$P\left(A,\vec{P}\right)=\left\{M \in A_3 \,/\, \exists \vec{x} \in M = A+\vec{x}\right\}$$

تعريف 7

لكل مستوي تالفي P يوجد مستوي شعاعي وحيد $\vec{P}$ من IR^3 يسمى إنجاه P
ونسمي جملة موجهة لـــ P كل أساس لـــ $\vec{P}$

نتيجة

كل مستوي له ما لا نهاية من الجمل الموجهة

مبرهنة 3

لتكن A نقطة من A_3 و $\vec{P}$ مستوي شعاعي من IR^3 و $(\vec{u},\vec{v})$ أساسا لـــ $\vec{P}$
و P الف.ت.ج المنسوب إليه $P=A+\vec{P}$ فالتطبيق f المعرف بـــ :

$$f: IR^2 \to P$$
$$(a,b) \mapsto f(a,b) = A + a\vec{u} + b\vec{v}$$

تقابل

برهان ذلك : تمرين

نتيجة

هذا التقابل يسمح "التعويض" لـــ IR^2 بمستوي تالفي كيفي من A_3 والخلف بالخلف.

مبرهنة 4

لتكن M_1, M_2, M_3 ثلاثة نقاط من A_3 ليست على استقامة واحدة (معناه $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$ مستقلة فإنه يوجد مستوي تالفي وحيد يحتوي على النقاط الثلاثة ونرمز إليه بـــ :

$$P(M_1, \overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3}) \text{ أو } P = (M_1M_2M_3)$$

وهو المستوي المار بـــ M_1 والموجه بـــ: $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$

برهان ذلك : تمرين

نتيجة

لتكن M_1,M_2,M_3,M_4 أربعة نقاط من A_3 فلدينا الجمل التالية متكافئة:

- M_1,M_2,M_3,M_4 في نفس المستوي
- $(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3},\ \overrightarrow{M_1M_4})$ مرتبطة
- $\begin{vmatrix} x_4-x_1 & x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ y_4-y_1 & y_3-y_1 & y_2-y_1 \\ z_4-z_1 & z_3-z_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$
- $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

تعريف 7

ليكن P و P' مستويين موجهين بـــ $\vec{P}$ و $\overrightarrow{P'}$ نقول عن P و P' أنهما متوازيا إذا $\overrightarrow{P'}=\vec{P}$

مبرهنة 5

إذا كان $P:\ ax+by+cz+d=0$ فـــ $\vec{P}:ax+by+cz=0$

برهان ذلك

ليكن $P=A+\vec{P}$ بحيث $A(x_0,y_0,z_0)$ و $\vec{v}\in\vec{P}/\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ حينئذ يوجد $M(x,y,z)$ من المستوي بحيث $\overrightarrow{AM}=\vec{v}$ فـــ :

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(\alpha,\beta,\gamma)$$

ومنه

$$x = x_0 + \alpha,\ y = y_0 + \beta,\ z = z_0 + \gamma$$

فـــ : $a(x_0+\alpha) + b(y_0 + \beta) + c(z_0 + \gamma) + d = 0$

ولكون A من المستوي P فـــ $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

تذكير لبعض النتائج

المعدلة الديكارتية للمستوي $P(M_1, \vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ و $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & u_1 & v_1 \\ y-y_0 & u_2 & v_2 \\ z-z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$; $P: ax+by+cz+d=0$
المعدلة الوسطية أو التمثيل للمستوي $P(M_1, \vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ و $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2;\ (\lambda,\mu) \in \mathrm{IR}^2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$
المعدلة الديكارتية للمستوي لما $P(M_1M_2M_3)$ يمر من $M_i(x_i,y_i,z_i),\ i=1,2,3$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$
المعدلة الديكارتية للمستوي لما $P(ABC)$ يمر من $A(a,0,0)$, $B(b,0,0),C(c,0,0,)$ بحيث $abc\neq 0$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
المعدلة الديكارتية للمستوي لما P يمر من $M(x_0,y_0,z_0)$	$P: ax+by+cz+d=0$ $P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

إذا كان $P : ax+by+cz+d=0$	$\vec{P} : ax+by+cz=0$
$P' : a'x+b'y+c'z+d'=0$ يكنان متوازيان	$\exists k \in IR / (a,b,c) = k(a',b',c')$
$P : ax+by+cz+d=0$	$P'//P \Rightarrow P' : ax+by+cz+f=0$ و f حقيقي كيفي

المستقيم في الفضاء التآلفي A_3

دراسة هذا الحلة هي جزئيا نفس الدراسة للمستقيمات في A_2

قضية

أ- المستقيم المعرف بنقطة وشعاع موجه :

تعريف 8

لتكن A نقطة من ف.ت. A_3 و $\vec{D}$ ف.ش.ج من IR^3 بحيث $\dim \vec{D} = 1$.

نسمي مستقيم $D\left(A,\vec{D}\right)$ المار بـــالنقطة A والموجه $\vec{D}$ المجموعة المعرفة بـــ

$$D\left(A,\vec{D}\right) = \left\{ M \in A_3 / \overrightarrow{AM} \in \vec{D} \right\}$$

بما أن بعد $\vec{D}$ هو 1 فليكن $\vec{u}$ شعاع غير معدوم من $\vec{D}$ فإنه أساسا له.

ومنه:

$$D\left(A,\vec{D}\right) = \left\{ M \in A_3 / \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \;:\; \lambda \in IR; \vec{D} = \left\langle \vec{u} \right\rangle \right\}$$

نقول عن $\vec{u} \neq \vec{0}$ هو شعاع توجيهه المستقيم D.

خاصية

ليكن المستقيم $D\left(A,\vec{D}\right)$، فإن الفضاء.ش.ج $\vec{D}$ وحيد و A نقطة كيفية من D .

برهان

ليكن $\overrightarrow{D'}$ موجه أخر لـــ D

لنبين أن $\vec{D}\subset\overrightarrow{D'_1}$

ليكن $\vec{V}\in\vec{D}$ وليكن $M\in D$ بحيث $\overrightarrow{AM}=\vec{V}$

ولدينا أيضا $\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{V'}\in\overrightarrow{D'}$

ولكن

$$\vec{V}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M}\in\overrightarrow{D'}$$

ومنه $\vec{D}\subset\overrightarrow{D'}$

وبنفس الطريقة نبين أن $\overrightarrow{D'}\subset\vec{D}$

ومنه $\vec{D}=\overrightarrow{D'}$

التمثيل الوسيطي لمستقيم

ليكن الفضاء التآلفي A_3 و معلمه $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

والمستقيم (D) معرف بــــ $A(x_0,y_0,z_0)$ والشعاع الموجه $\vec{u}(a,b,c)$

المستقيم D هي مجموعة النقاط M بحيث

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u},\lambda\in IR$$

$$OM=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u}$$

فيكون لدينا :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

وهذه الجملة تعرف لنا المعادلة الوسيطية للمستقيم (D) حيث λ هو الوسيط.

المستقيمات المتوازية

تعريف 9

نقول عن مستقيمين $D\left(A,\overrightarrow{D}\right)$ و $D'\left(A',\overrightarrow{D'}\right)$ أنهما متوازيان إذا كان $\overrightarrow{D}=\overrightarrow{D'}$ ونكتب $D\,//\,D'$.

لكي يكون المستقيمين $D\left(A,\overrightarrow{D}\right)$ و $D'\left(A',\overrightarrow{D'}\right)$ متوازيان يلزم ويكفي أن يكونا الشعاعين الموجهين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ مرتبطين خطيا، بمعنى أنه يوجد $\lambda \in IR$ بحيث $\overrightarrow{u'}=\lambda\vec{u}$

تعريف 10

ليكن $D\left(A,\overrightarrow{D}\right)$ مستقيم تالفي و $P\left(A,\overrightarrow{P}\right)$ مستوي تألفي كلهما من A_3 لدينا :

$$D\,//\,P \Leftrightarrow \overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$$

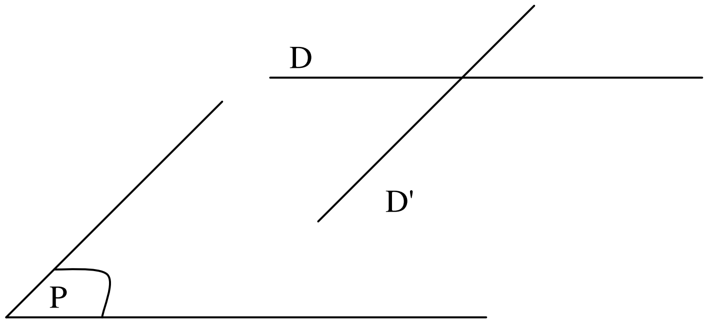
معناه : إذا كان $\overrightarrow{D}=\left\langle \vec{u} \right\rangle$ و $\overrightarrow{P}=\left\langle \vec{v},\vec{w} \right\rangle$ فلدينا :

$$D\,//\,P \Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0$$

حذار

- علاقة التوازي في مجموعة المستقيمات تشكل علاقة تكافئية ولكن علاقة التوازي بين المستقيمات والمستويات غير متعدية يعني :

D//P و 'P//D ولكن D غير موازي لــ 'D حسب المثال



تعريف 11

لتكن $D\left(A,\vec{u}\right)$ و $D'\left(A,\overrightarrow{u'}\right)$ مستقيمان في A_3 بحيث $\vec{0}\neq\vec{u}$ و $\vec{0}\neq\overrightarrow{u'}$ نقول أن المستقيمان في نفس المسوي إذا كانت الجملة $(\overrightarrow{AA'},\vec{u},\overrightarrow{u'})$ مرتبطة خطيا

مبرهنة 6

لتكن A نقطة من A_3 و $\overrightarrow{D}$ مستقيم شعاعي من IR^3 و $\vec{0}\neq\vec{u}$ أساسا لــ $\overrightarrow{D}$ و D الف.ت.ج المنسوب إليه فالتطبيق f المعرف بــ :

$$f: IR^2 \rightarrow D(A,\vec{u})$$
$$\lambda \mapsto f(\lambda)=A+\lambda\vec{u}$$

تقابل

برهان ذلك : تمرين

نتيجة

هذا التقابل يسمح "التعويض" لــ IR بمستقيم تالفي كيفي من A_3 والخلف بالخلف.

تذكير لبعض النتائج :

الجملة الديكارتية للمستقيم $D\left(A,\vec{u}\right)$ إذا كان $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$	$\exists a,b,c,a',b',c'/(a,b,c),(a'b'c')$ **تكون مستقلة فـــــ :** $D=\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$
المعدلة الوسطية أو التمثيل الوسيطي للمستقيم $D\left(A,\vec{u}\right)$ إذا كان $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ و $A(x_0,y_0z_0)$	$\begin{cases}x=x_0+\lambda u_1\\ y=y_0+\lambda u_2;\ \lambda\in \mathrm{IR}\\ z=z_0+\lambda u_3\end{cases}$
إذا كان D مستقيم غير موازي لـــ : xOy	$(\alpha,\beta,p,q)\in IR^4$ بحيث $\begin{matrix}x=\alpha x+p\\ y=\beta y+q\end{matrix}$
إذا كان D موازي ل xOy و Dغير موازي لـــ Oy	$(m,p,z_0)\in IR^3$ بحيث $\begin{cases}y=mx+p\\ z=z_0\end{cases}$
إذا كان D موازي لـــ Oy	$(x_0,z_0)\in IR^2$ بحيث $\begin{cases}x=x_0\\ z=z_0\end{cases}$

التطبيقات التآلفية

تعريف 1

التطبيق $f : A_3 \to A_3$ يسمى تآلفيا إذا وجد تطبيق خطي $\varphi \in L(A_3, A_3)$ بحيث :

$$\forall A, B \in A_3 \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$$

مبرهنة 1

ليكن التطبيق $f : A_3 \to A_3$ من مجموعة التطبيقات التآلفية لدينا :

$$\forall A \in A_3, \forall u \in IR^3,\ f(A+\vec{u}) = f(A) + \varphi(\vec{u})$$

برهان

ليكن M نقطة كيفية من A_3 بحيث $M = A + \vec{u}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.

ومنه

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi(AM) = f(A)f(M) = f(u) - f(A)$$
$$\Rightarrow f(M) = \varphi(\vec{u}) + f(A)$$
$$f(A+\vec{u}) = f(A) + f(\vec{u})$$

التمثيل الديكارتي لتطبيق تآلفي

ليكن f تطبيق تآلفي بحيث $f : A_3 \to A_3$ وليكن φ التطبيق الخطي المنسوب إليه :

$$\varphi : IR^3 \to IR^3$$
$$u \mapsto \varphi(\vec{u}) = A\vec{u}$$

حيث A مصفوفة φ بالنسبة إلى المعلمـــين $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ و $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

وليكن (a,b,c) مركبات $f(O)$ في R' .

فإذا كان $M'=(x',y',z')$ في R و $M=(x,y,z)$ في R' فـــ $f(M)=M'$ أي أن :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ إذن $f(M)=f(O)+\varphi(\overrightarrow{OM})$.

مبرهنة 2

ليكن f و g تطبيقان تآلفيان و $\vec{f}$ و $\vec{g}$ التطبيقان الخطان المنسوبين اليهمـــا دينا :

1. gof تطبيق تآلفي وأن $\overrightarrow{gof}=\vec{g}o\vec{f}$.
2. f تقابل $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ تقابل
3. f^{-1} تآلفي و $\overrightarrow{f^{-1}}=\vec{f}^{-1}$.

الهندسة التآلفية الاقليدية

نسمي فضاءا تآلفيا أقليديا كل فضاء تآلفي بحيث يكون الفضاء المنسوب اليـــه أقليديا.

المستوي التآلفي الأقليدي : نرمز للفضاء التآلفي الأقليدي بـــ $(E_2,.)$.

تعريف 2

نسمي معلم متعامـــد ومتجـــانس مباشـــر (4 م) لـــــ $(E_2,.)$، كـــل ثلاثيـــة $(o,\vec{i},\vec{j})$حيث o نقطة من E_2 و $(\vec{i},\vec{j})$ أساس متعامد ومتجانس موجه من $\vec{E}_2$

نتيجة

إذا كان $\vec{E}_2$ موجه، نقول عن E_2 أنه موجه واتجاه المعلم هو اتجاه الأساس.

تعريف المسافة : ليكن $M(x, y)$ و $M'(x', y')$ من E_2 ، نسمي مسافة من M إلى M' ونرمز لها $d(M, M')$ العدد الحقيقي في 4 م :

$$d(M, M') = \left((x'-x)^2 + (y'-y)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

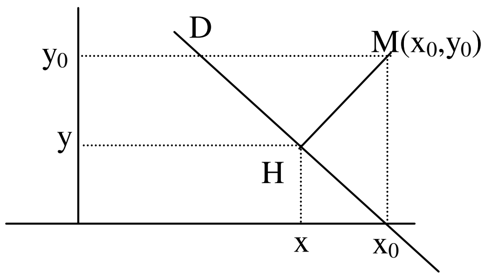
خواص هامة

1. إسقاط عمود لنقطة على مستقيم

لتكن $M(x_0, y_0)$ نقطة من IR^2 والمستقيم التآلفي $D / ax + by + c = 0$.

ولتكن $H(x, y)$ المسقط العمودي لـــ M على D.

المطلوب هو ايجاد x, y



لدينا
$$\begin{cases} H \in D \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = -c \\ -bx + ay = -bx_0 + ay_0 \end{cases}$$

$$D_p : \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$ ،

$$D_x : \begin{vmatrix} -c & b \\ -bx_0 + ay_0 & a \end{vmatrix} = -ac + b^2 x_0 - aby$$ ،

$$D_y : \begin{vmatrix} a & -c \\ -b & -bx_0 + ay_0 \end{vmatrix} = -abx_0 + a^2 y_0 - bc$$

ومنه يكون

$$x = \frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} \text{ ، } y = \frac{-abx_0 - a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

2. مسافة نقطة الى مستقيم

$$d^2(M, D) = MH^2 = \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 .$$

بالتعويض نحصل على :

$$= \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$$

ومنه

$$d(M, D) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| .$$

3. المعادلة الناظمية لمستقيم تآلفي

ليكن المستقيم التآلفي $D / ax + by + c = 0$ من IR^2 بحيث $a^2 + b^2 \neq 0$ ، فإن معادلته تكتب على الشكل

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

ولكن

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$$ ومنه يوجد $\theta\in[2\pi]$ بحيث

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta \quad \text{و} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$$

وبوضع $p=\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

تصبح المعادلة الديكارتية للمستقيم D كما يلي :

$$p=a\cos\theta+b\sin\theta \text{ ،} \quad \vec{\eta}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\vec{i}+b\vec{j}).$$

تعريف 3

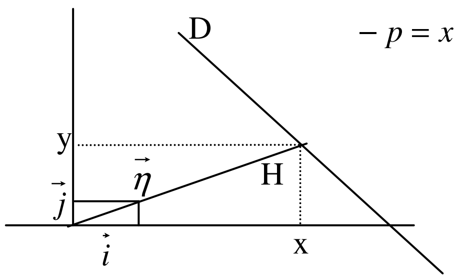
نسمي هذه المعادلة بالمعادلة الناظمية لـــ D و $\vec{\eta}$ الشعاع الأحادي الناظمي لـــ D.

ملاحظة 1

لدينا
$$\vec{\eta}\perp\vec{D}\Rightarrow\begin{cases}\vec{\eta}=(\cos\theta,\sin\theta)\\ \vee \\ \vec{\eta}=(-\cos\theta,-\sin\theta)\end{cases}$$

ومنه للمستقيم D معادلتين هما : $p=x\cos\theta+y\sin\theta$ ،

$$-p=x\cos(\theta+\pi)+y\sin(\theta+\pi)$$



ملاحظة 2

لتكن $H(x,y)$ المسقط العمودي لــ O على D فيكون لدينا

$$\exists \lambda \in IR / \overrightarrow{OH} = \lambda \vec{\eta}$$

ومنه

$$\begin{matrix} x = \lambda \cos\theta \\ y = \lambda \sin\theta \end{matrix}, H \in D \Rightarrow \lambda \cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta = p \Rightarrow \lambda = p \Rightarrow \overrightarrow{OH} = p\vec{\eta}$$

الزاوية الموجه لمستقيمين

ليكن المستقيمين $(D_2, \vec{u}_2), (D_1, \vec{u}_1)$ الموجهين بــ $\vec{u}_2, \vec{u}_1$

$(D_1, D_2) = (u_1, u_2) = \theta \vee (\theta + \pi)[\pi]$ و $tg\theta = \dfrac{\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}$.

الإحداثيات القطبية

ليكن $R(o, \vec{i}, \vec{j})$ م.م.م.م من E_2 و $M(x,y)$ نقطة من $E_2 - \{0\}$ فيكون :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

ملاحظة

النقطة $M \neq 0$ تقبل جملتين من الإحداثيات القطبية $[\theta, \rho]$ و $[\theta + \pi, -\rho]$ بترديد π.

حالة الفضاء ذو البعد 3

ليكن $R(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ م.م.م.م من E_3 و $M(x, y, z)$ نقطة منه.

الإسقاط العمودي لنقطة على مستو

ليكن المستوي :

$$ax + by + cz + d = 0 / p$$

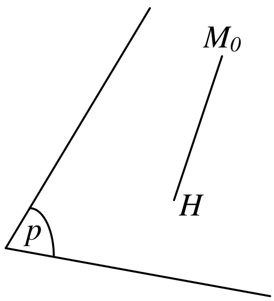
و $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من E_3 ولتكن $H(X, y, Z)$ المسقط العمودي لـــ M_0 على p.

$$\begin{cases} H \in p \\ \overrightarrow{M_0 H} \perp p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ \exists \lambda : \overrightarrow{M_0 H} = \lambda \vec{u} / \vec{u} \perp p / \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ \exists \lambda : X = x_0 + \lambda a, Y = y_0 + \lambda b, Z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

ومنه مركبات $H(X, Y, Z)$ هي

$$\begin{cases} X = x_0 - \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} a \\ Y = y_0 - \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} b \\ Z = z_0 - \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} c \end{cases}$$



المسافة بين نقطة ومستو

$$d^2(M_0, p) = \overline{M_0H}^2 = (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2$$

إذن

$$d(M_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

المسافة من نقطة إلى مستقيم

ليكن $(D, \vec{u})$ مستقيما يمر من A و M_0 نقطة من E_3 ولتكن H المسقط العمودي لـــ M_0 على p .

لدينا

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0}=\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM_0}) \qquad ، d(M_0,D)=\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|$$
$$=\vec{u}\wedge\overrightarrow{AH}+\vec{u}\wedge\overrightarrow{HM_0})$$

لدينا $\vec{u}\wedge\overrightarrow{AH}=0$ ومنه $\exists\lambda:\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{u}$

إذن

$$\left\|\vec{u}\wedge AM_0\right\|=\left\|\vec{u}\wedge HM_0\right\|$$

وبما أن

$$\vec{u}\perp\overrightarrow{HM_0} \quad \text{فإن} \quad \left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{HM_0}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{HM_0}\right\|$$

فيكون لدينا عندئذ

$$\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|=\frac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

إذن

$$d(M_0,D)=\frac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}.$$

العمود المشترك للمستقيمين $D(A,\vec{u}),D'(A',\vec{u'})$ **:**

تعريف ونتيجة

ليكن $D(A,\vec{u}),D'(A',\vec{u'})$ مستقيمين غير متوازيين وأن $A\in D$ و $A'\in D'$ نقطتان من E_3 ، فإنه يوجد مستقيم وحيد عمودي على D و D' بحيث $L=p\cap p'$ و p (p') المستوي المار بـــ A A') على الترتيب) وموجه بـــ $(\vec{u},\vec{u}\wedge\vec{u'})$ ($(\vec{u'},\vec{u}\wedge\vec{u'})$ على الترتيب).

برهان

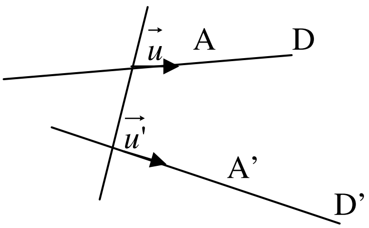
ليكن $D(A,\vec{u}), D'(A',\vec{u'})$ مستقيمين من E_3. نضع $\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{u'}$ وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ مستقلين فإن $\left(\vec{v},\vec{u},\vec{u'}\right)$ مستقلات.

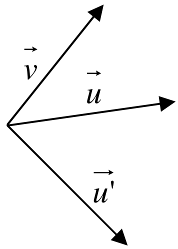
ليكن p (p') المستوي المار بـــ A (A' على الترتيب) وموجه بـــ $(\vec{u},\vec{v})$ ($(\vec{u'},\vec{v})$ على الترتيب).

$$\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{u'} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{v}\perp\vec{u}\\ \vec{v}\perp\vec{u'}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\in\vec{L}$$

لدينا $\vec{v}\in\vec{p}\cap\vec{p}_1$ ومنه $\vec{L}=\vec{p}\cap\vec{p}_1$ من المعطيات السابقة يكون لدينا :

$$\left.\begin{array}{l}p\in D\Rightarrow D\cap L\in p\\ p'\in D'\Rightarrow D'\cap L\in p'\end{array}\right\}\Rightarrow L=p\cap p'$$





المسافة بين مستقيمين

ليكن $D(A,\vec{u}), D'(A',\vec{u'})$ مستقيمين من E_3 فإن

$$d(D,D')=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u'}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{u'}\right\|}$$

إذا كان $D\,//\,D'$ فإن $d(D,D')=d(A,D')$.

زاوية مستقيمين : ليكن $D(A,\vec{u}), D'(A',\vec{u'})$ مستقيمين بحيث $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ وحيدان $\left(\|\vec{u}\| = \|\vec{u'}\| = 1\right)$، فإن زاوية المستقيمين هي $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث $\cos\theta = |\vec{u}\cdot\vec{u'}|$.

زاوية مستويين : ليكن p_1 و p_2 مستويين ذوي الشعاعين الناظمين الواحيدين η_2, η_1 على الترتيب، فإن زاوية هذين المستويين هي $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث $\cos\theta = |\overrightarrow{\eta_1}\cdot\overrightarrow{\eta_2}|$.

زاوية مستقيم ومستوي

ليكن المستقيم $D(A,\vec{u}),$ بحيث $\left(\|\vec{u}\| = 1\right)$ والمستوي p و $\overrightarrow{\eta_1}$ شعاعه الناظيمي والوحيد بحيث $\|\overrightarrow{\eta_1}\| = 1$ فالزاوية θ من $[0,2\pi]$ بحيث $\sin\theta = |\vec{u}\cdot\overrightarrow{\eta_1}|$.

الإحداثيات الاسطوانية

ليكن $M(x,y,z)$ نقطة من E_3 بحيث $M \notin \overrightarrow{zz'}$ ولتكن m المسقط العمودي لـــ M على المستوي (xoy) و $[\theta,\rho]$ جملة الأحاديات القطبية لـــ m.

نسمي $[\theta,\rho,z]$ جملة الإحداثيات الاسطوانية لـــ M وهي تكتب على الشكل التالي :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

عندما $M \in \overrightarrow{zz'}$ الجملة عير معرفة.

الإحداثيات الكروية

ليكن $M(x,y,z)$ نقطة من $E_3-\{0\}$. ولتكن m المسقط العمودي لــ M على المستوي (xoy) و θ الزاوية القطبية لــ m في المستوي (xoy) و φ الزاوية المعرفة بــ $\varphi=(oM,om)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، نسمي $[\theta,\varphi,\rho]$ جملة الإحداثيات الكروية لــ M، والتي تكتب على الشكل التالي :

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ z=\rho\sin\theta \end{cases}$$

التقايسات التآلفية

تعريف 1

نقول عن تطبيق f حيث $f:E\to E$ و E فضاء تآلفي اقليدي (E Espace Affine euclidien)، أنه تقايس تآلفي اذا حافظ على المسافة أي :

$\forall A,B\in E: d(f(A),f(B))=d(A,B)$.

مبرهنة 1

ليكن f تطبيق تآلفي، φ التطبيق الخطي المنتسب إليه، لدينا عندئذ :

f تقايس تآلفي لــ E $\Leftrightarrow$ φ تقايس شعاعي لــ $\vec{E}$.

برهان

$(\Leftarrow)$ f تقايس تآلفي لــ E، لدينا من أجل $\vec{u}\in\vec{E}$ أي انه يوجد $A,B\in E$ بحيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$،

لدينا :

$$\left\|\varphi(\vec{u})\right\| = \left\|\varphi(\overrightarrow{AB})\right\| = \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = d(f(A), f(B)) = d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|$$

ومنه φ تقايس شعاعي لـــ $\vec{E}$.

$(\Rightarrow)$ إذا كان φ تقايس شعاعي من $\vec{E}$، لدينا

$$\forall A, B \in E : d(f(A), f(B)) = \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\varphi(\overrightarrow{AB})\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d(A,B)$$

ومنه f تقايس تآلفي لـــ E.

قضية

مجموعة التقايسات التآلفية لـــ E تشكل زمرة مزودة بتركيب التقايسات وتسمى زمرة التقايسات التآلفية.

تعريف 2

ليكن f تقايس تآلفي لـــ E

1. نقول عن f انه تقايس مباشر (أو إزاحة) إذا وفقط إذا كان $\det\varphi = 1$ (حيث φ التطبيق الخطي المنتسب إلى f).
2. نقول عن f انه تقايس غير مباشر (أو ضد إزاحة) إذا وفقط إذا كان $\det\varphi = -1$ (حيث φ التطبيق الخطي المنتسب إلى f).

قضية

مجموعة التقايسات المباشرة (أو الإزاحات) لـــ E تشكل زمرة جزئية من زمرة التقايسات التآلفية.

تعريف 3

لتكن $A\in E$ و $\theta\in IR$ نسمي دوران مركزه A وزاويته θ ونرمز له $Rot_{A,\theta}$ التقايس التآلفي الذي يجعل A والجزء الخطي هو الدوران الشعاعي الذي زاويته θ أي Rot_{θ}. لدينا عندئذ من أجل كل $M, M'\in E$ حيث

$$M' = Rot_{A,\theta}(M) \Leftrightarrow Rot_{A,\theta}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$$.

تعريف 4

ليكن D مستقيما من E_2، نسمي انعكاسا بالنسبة لـــ D (الانعكاس التعامدي) ونرمز له $\mathrm{Re}\, f_D$، التناظر بالنسبة لـــ Dوالمتوازي في الاتجاه المتعامد لـــ D.

التشابهات في المستوي

نسمي تشابها من المستوي التآلفي E_2، كل تطبيق تآلفي $f: E_2 \to E_2$ بحيث يوجد $k\rangle 0$، $\forall A, B\in E_2 : d(f(A), f(B)) = kd(A,B)$، حيث k هو نسبة التشابه وهو وحيد.

ملاحظات

1. كل تقايس تآلفي لـــ E_2 وهو تشابه $(k=1)$.
2. كل تحاكي نسبته $k\rangle 0$ هو تشابه نسبته k.
3. التطبيق التآلفي $f: E_2 \to E_2$ هو تشابه $\Leftrightarrow$ وجد $k\rangle 0$ بحيث $\forall \vec{u}\in \overrightarrow{E_2} : \|\varphi(\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.

برهان الملاحظة 3

$(\Rightarrow)$

$$\forall A, B \in E : d(f(A), f(B)) = \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\varphi(\overrightarrow{AB})\right\| = k\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = kd(A,B)$$

منه f تشابه.

$(\Leftarrow)$

$$\forall \vec{u} \in E_2 : \exists A, B : \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

$$\left\|\varphi(\overrightarrow{AB})\right\| = \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = d(f(A), f(B)) = kd(A,B) = k\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = k\left\|\vec{u}\right\|$$

تعريف التحاكي

ليكن $\Omega \in E_2$ و $k \in IR^*$ $(k \neq 0)$، نسمي التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k ونرمز له بـــ $h_{\Omega,k}$ التطبيق المعرف بـــ

$$h_{\omega,k} : E_2 \to E_2$$
$$M \mapsto M' = h_{\omega,k}(M) = k\overrightarrow{\Omega M} = \Omega M'$$

تعريف 5

ليكن f تشابها من المستوي E_2، نقول عن f إنه تشابه مباشر (غير مباشر على التوالي) إذا فقط إذا كان $\det\varphi \rangle 0$ ($\det\varphi \langle 0$ على التوالي)، حيث φ هو التطبيق الخطي المنتسب إلى f .

مبرهنة 2

ليكن f تشابها مباشرا من المستوي E_2 و k لدينا :

1. f انسحابا حالة $(k=1)$ أو دوران.

2. $\exists\Omega \in E_2, k \in IR_+^*, \theta \in IR : f = h_{\Omega,k} \circ Rot_{\Omega,\theta}$.

التعريف التحليلي للتشابه

التشابه المباشر في مستوي تآلفي اقليدي مزود بمعلم م.م.م.م يكون معرفا بـــ

$$f : E_2 \to E_2$$
و
$$M(x,y) \mapsto f(M) = M'(x',y')$$

$$\begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}$$ مع $(a,b) \neq (0,0)$

ويكون التشابه غير المباشر كما يلي

$$\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = bx - ay + y_0 \end{cases}$$

ونسبة التشابه هي $\sqrt{a^2 + b^2}$.

تعريف التشابه في C

$$s : C \to C$$
$$M \mapsto s(M) = M'(x',y')$$

لتكن z لاحقة M و z' لاحقة M' .

قضية

s تشابه مباشر (غير مباشر على التوالي) نسبته λ إذا وجد $z' = az + b$ ($z' = a\bar{z} + b$ على التوالي) و $|a| = 1$ و $a \neq 0$ بحيث $(a,b) \in C^2 - \{(0,0)\}$.

طريقة عملية

1. s مباشر $\Leftarrow$ $z' = az + b$ $(f(z) = az + b)$

* $a = 1$ $\Leftarrow$ s انسحاب بشعاع $\vec{v}(b)$.

* $a \neq 1$ $\Leftarrow$ له نقطة وحيدة ثابتة M_0 ويكتب على الشكل $r = h \circ r = r \circ h$
بحيث $r = Rot_{M_0,\arg a}$ ، $h = \hom ot_{M_0,|a|}$ ، M_0 مركز الدوران a زاويته.

2. s غير مباشر $\Leftarrow$ $z' = a\bar{z} + b$ $\left(f(z) = a\bar{z} + b \right)$.

* $|a| = 1$ $\Leftarrow$ s ضد إزاحة (إذا كان $\overline{ab} + b = 0$ $\Leftrightarrow$ s انعكاس).

* $|a| \neq 1$ $\Leftarrow$ s له نقطة وحيدة ثابتة M_0 ويكتب على الشكل $s = h \circ \mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re}\, f \circ h$ حيث $\mathrm{Re}\, f_{\Delta(M_0)}$ انعكاس ذو محور يمر على M_0.