تمرين1 (10ن) ليكن التابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بـ

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + \mathrm{c} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

حيث $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة ، $b \in \mathbb{R}^n$ شعاع و $c \in \mathbb{R}$.

1. أحسب التفاضلية $df(x)$
   - ✓ ليكن x و h من $\mathbb{R}^n$ ، لدينا

$$f(x+h) = \frac{1}{2}\langle A(x+h), x+h\rangle - \langle b, x+h\rangle + \mathrm{c}$$
$$= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle - \langle b, x\rangle - \langle b, h\rangle + c$$
$$= f(x) + L(h) + O(h)$$

حيث

$$L(h) = \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle - \langle b, h\rangle \ , \qquad O(h) = \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$$

كون الجداء السلمي ثنائي الخطية ومستمر يتضح أن L خطي ومستمر، O يحقق $\lim_{h\to 0} \frac{\|O(h)\|}{\|h\|} =$ 0ومنه حسب تعريف التفاضل

$$df(x)(h) = \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle - \langle b, h\rangle$$

2. أحسب التدرج $\nabla f(x)$ و المصفوفة الحسينية $H_f\ (x)$
   - ✓ حسب تناظر المصفوفة A لدينا

$$df(x)(h) = \langle Ax, h\rangle - \langle b, h\rangle = \langle Ax - b, h\rangle$$

من جهة اخرى نعلم أن $df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h\rangle$ ، نستنتج : $\nabla f(x) = Ax - b$.
بما أن $f \in C^2$ و ∇f تطبيق تآلفي فإن :

$$H_f(x) = J_{\nabla f}(x) = A$$

3. بأخذ المعطيات

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad c = 0.$$

أحسب التقريب x^1 باستعمال طريقة التدرج انطلاقا من التقريب الأولي $x^0 = (0,0,0)^T$ ومن أجل الخطوة $\rho = \frac{1}{9}$

- ✓ الطريقة هي :

$$x^0 = (0,0,0)^T \ , \quad x^{k+1} = x^k - \rho\nabla f(x^k)$$

بالحساب والتعويض نجد

$$x^1 = x^0 - \rho\nabla f(x^0) = x^0 - \rho(Ax^0 - b) = \ \rho b = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)^T$$

تمرين2 (5ن) برهن أنه إذا كان f تابع من الصنف $C^1(\mathbb{R}^n)$ ومحدب على $\mathbb{R}^n$ فإن القضيتان التاليتان صحيحتان

i. $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

ii. $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

✓ من أجل $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $t \in [0,1]$ لدينا :

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

ومنه

$$\frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x) \ \ \forall t \in]0,1]$$

كون $f \in C^1(\Omega)$ ، فهو يقبل التفاضل. بالمرور إلى نهاية الطرفين لما $t \to 0^+$ واستخدام التفاضل حسب *Gâteaux* نجد العلاقة (i).

لإثبات (ii)، نقوم بالتغيير بين المتغيرين x و y في (i) لنحصل على

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

بجمع العلاقة الأخيرة مع (i) طرفا الى طرف ثم الاختزال نجد المطلوب.

تمرين3 (5ن) ليكن α عدد غير معدوم من $\mathbb{R}$، نعرف التابع

$$J: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ J(x) = \frac{1}{3}|x|^3 - \alpha x$$

1. برهن أن J محدب تماما

✓ J عبارة عن مجموع تابعين $x \to \frac{1}{3}|x|^3$ و $x \to -\alpha x$.

الأول محدب تماما على $\mathbb{R}^n$ لكونه تركيب تابعين محدبين هما $x \to |x|$ و $\varphi: t \to \frac{1}{3}t^3$ حيث أن φ محدب ومتزايد تماما على $[0, +\infty[$، التابع الثاني $x \to -\alpha x$ محدب لأنه خطي. نستنتج أن J محدب تماما.

2. برهن أن المسألة $\min_{x \in \mathbb{R}} J(x)$ تقبل حلا وحيدا.

✓ نستعمل نظرية الوجود والوحدانية، لدينا f مستمر محدب تماما على $\mathbb{R}$ '' $\mathbb{R}$ مغلق وغير محدود''، بالإضافة إلى كون J ناقصي (أي $\lim_{|x| \to +\infty} J(x) = +\infty$)

ومنه نستنتج أن المسألة $\min_{x \in \mathbb{R}} J(x)$ تقبل حلا وحيدا.

انتهى