سلسلة تمارين في مقياس الجبر2

حول الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية

حلول مفصلة

التمرين الأول:

$F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\} \neq \emptyset$ لأن $(0,0,0) \in F_4$ حيث $0 = 0+0+0$.

ليكن: $u=(x,y,z) \in F_4,\ v=(x',y',z') \in F_4$ و $\alpha \in \mathbb{R}$. لدينا

$u+v=(x+x',y+y',z+z')$ و بما أن

$$x+x'+y+y'+z+z = \underbrace{x+y+z}_{0} + \underbrace{x'+y'+z'}_{0} = 0$$

فإن $u+v \in F_4$. ولدينا كذلك

$\alpha.u = \alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ حيث $\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x+y+z) = \alpha.0 = 0$ ومنه $\alpha.u \in F_4$

اذا F_4 فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

بنفس الطريقة نثبت أن F_1 ، F_2 فضاءات شعاعية جزئية من $\mathbb{R}^3$ وأن F_5 فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$.

بينما F_3 ليس فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{R}^3$ لأنه من أجل $u=(-2,2,1) \in F_3$ و

$3.u = (-6,6,3) \notin F_3$ حيث $z = 3 \neq 1$.

التمرين الثاني:

1) واضح أن التطبيق $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2 - x$ عنصر من E_1 لأن $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ ومنه $E_1 \neq \emptyset$.

ليكن $f,g \in E_1$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. لدينا $\alpha.f + \beta.g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و

$$(\alpha.f + \beta.g)(1) = (\alpha.f)(1) + (\beta.g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

ومنه $\alpha.f + \beta.g \in E_1$ اذا E_1 ف.ش.جزئي من الفضاء الشعاعي $A(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

التطبيق $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ عنصر من E_2 ومنه $E_2 \neq \emptyset$.

ليكن $f,g \in E_2$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. لدينا $\alpha.f + \beta.g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\alpha.f + \beta.g)(-x) &= (\alpha.f)(-x) + (\beta.g)(-x)\\ &= \alpha f(-x) + \beta g(-x)\\ &= \alpha f(x) + \beta g(x)\\ &= (\alpha.f + \beta.g)(x)\end{aligned}$$

اذا $\alpha.f + \beta.g \in E_2$ وبالتالي E_2 ف.ش.جزئي من الفضاء الشعاعي $A(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

بنفس الطريقة نثبت أن E_3 ف.ش.جزئي من الفضاء الشعاعي $A(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) لدينا $E_2 + E_3 \subset \mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ لأن $E_2 \subset \mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $E_3 \subset \mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ والجمع + عملية داخلية في $\mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. من أجل كل تطبيق $f \in \mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ يمكن أن نكتب :

$$\forall x \in \mathbb{R}; E_3(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

لتكن الدالتان $\varphi,\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2},\ \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ نلاحظ أن φ دالة زوجية و أن ψ دالة فردية أي أن $\varphi \in E_2$ أن $\psi \in E_3$ اذا $f = \varphi + \psi \in E_2 + E_3$ ومنه $\mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset E_2 + E_3$.

اذا $\mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = E_2 + E_3$.

من جهة أخرى ليكنu_3

$$f \in E_2 \cap E_3 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = f(-x) = -f(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f \equiv 0$$

ومنه $E_2 \cap E_3 = \{0_{A(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$ اذا $\mathrm{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = E_2 \oplus E_3$.

التمرين الثالث:

1. تعيين قيمة a حتى يكون $u_3 \in \langle u_1, u_2\rangle$ لدينا

$$u_3 \in \langle u_1, u_2\rangle \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$$

ومنه :

$$\begin{pmatrix}0\\a\\8\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha+2\beta\\3\alpha+6\beta\\4\beta\end{pmatrix}$$

اذا

$$\begin{cases}2\alpha+2\beta = 0\\3\alpha+6\beta = a\\4\beta = 8\end{cases}$$

وبحل الجملة السابقة نجد $\beta = 2$ و $\alpha = -2$ وبالتالي $a = 3\alpha + 6\beta = 6$.

2. أثبات أن $\{v_1,\ v_2, v_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$. أي نثبت أن هذه العائلة من الأشعة مستقلة خطيا ومولدة للفضاء $\mathbb{R}^3$ وبما أن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي بعده 3 أي أن $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ فيكفي أن تكون هذه العائلة مستقلة خطيا أو مولدة لـ $\mathbb{R}^3$ حتى تشكل أساسا له.

لنثبت أن $\{v_1,\ v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا. ليكن α,β,γ 3 أعداد حقيقية تحقق :
$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ أي أن

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta-2\gamma\\\alpha+\beta\\-2\alpha-2\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

و منه نحصل على الجملة

$$\begin{cases}\beta-2\gamma = 0\\\alpha+\beta = 0\\-2\alpha-2\gamma = 0\end{cases}$$

من المعادلة الأولى نجد $\beta = 2\gamma$ وبالتعويض في المعادلتين الأخيرتين نجد

$\begin{cases}\beta = 2\gamma\\\alpha+2\gamma = 0\\-2\alpha-2\gamma = 0\end{cases}$ بالجمع نجد $-\alpha = 0$ ومنه $\alpha = \gamma = \beta = 0$ ومنه $\{v_1,\ v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

لدينا

$$v_1 = 1.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3$$

ومنه احداثيات أو مركبات v_1 في الأساس $\{v_1,\ v_2, v_3\}$ هي $(1,0,0)$ ونفس الطريقة نجد احداثيات v_2 هي $(0,1,0)$ و v_3 هي $(0,0,1)$ و $v_5 = v_1 + v_2 + v_3$ هي $(1,1,1)$.
نفرض أن (x, y, z) هي احداثيات v_6 أي أن :

$$v_6 = xv_1 + yv_2 + zv_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بعد تعويض احداثيات $v_1,\ v_2, v_3$ نجد

$$\begin{cases} y - 2z = -1 \\ x + y = 2 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$$

من المعادلة الأخيرة نجد $z = -x$ وبالتعويض المعادلتين الأولى والثانية نحصل على

$$\begin{cases} y + 2x = -1 \\ x + y = 2 \\ z = -x \end{cases}$$

بطرح الثانية منا لأولى نجد $x = -3$ ومنه $y = 5$ و $z = 3$. اذا احداثيات v_6 في الأساس $\{v_1,\ v_2, v_3\}$ هي $(-3,5,3)$.

التمرين الرابع:

1) نعلم أن كل كثير حدود بمتغير واحد ذو درجة ≤ 2 يكتب على الشكل :
$c + bx + ax^2$ ومنه أساسه القانوني هو $\{1, x, x^2\}$ وبعده 3.

2) بما أن عدد هذه الأشعة يساوي بعد الفضاء الشعاعي أي 3 فحتى تكون أساسا له يكفي أن نثبت أنها مستقلة خطيا أو مولدة له.

لدينا

$P_0 = 1$ ، $P_1 = x$ و $P_2 = x(x-1) = x^2 - P_1$ ومنه $P_2 + P_1 = x^2$

اذا كل كثير حدود يمكن كتابته بدلالة P_0, P_1, P_2 كما يلي

$$c + bx + ax^2 = c.P_0 + b.P_1 + a(P_2 + P_1) = c.P_0 + (a+b).P_1 + a.P_2$$

ومنه $\{P_0, P_1, P_2\}$ جزء مولد لفضاء كثيرات الحدود المذكور وبالتالي فهي أساس له.

3) ايجاد احداثيات الشعاع $P(0,1,1)$ أي $P = 0 + x + x^2$.
حسبما سبق يمكن كتابة $P = 0 + 2P_1 + 1.P_2$ ومنه الاحداثيات الجديدة هي $(0,2,1)$.

التمرين الخامس:

1. لتكن $S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\},\ D = \{u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}, \dots, u_{k_m}\};\ m \leq n$ عائلتان من الفضاء الشعاعي E

بحيث : $D \subset S$. نضع $S - D = \{u_{k_{m+1}}, u_{k_{m+2}}, \dots, u_{k_n}\}$

نفرض أن S مستقلة خطيا ونبرهن أن D كذلك.

لتكن $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m$ m عنصر من الحقل K نلاحظ أن كل عبارة خطية (مزج خطي) لعناصر D هو عبارة خطية لعناصر S تكون فيها عناصر المجموعة $S - D$ مضروبة في المعامل 0 أي

$$\sum_{i=1}^{i=m} \beta_i\, u_{k_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i\, u_{k_i}$$

حيث $\beta_i = 0$ من أجل $m < i \leq n$. بما أن S مستقلة خطيا فإن

$$\sum_{i=1}^{i=m} \beta_i u_{k_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i u_{k_i} = 0_E \Longrightarrow \beta_i = 0; i = 1,2, \dots, m$$

ومنه D مستقلة خطيا.

2. لتكن $S = \{0_E, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ مرتبطة خطيا أي ليست مستقلة خطيا لأن
$1.0_E + 0.u_2 + 0.u_3 + \cdots + 0.u_n = 0_E$
عبارة خطية معدومة مع وجود معامل على الأقل غير معدوم وهو 1.
3. أثبتنا في 1) أن : S مستقلة خطيا $\Longleftarrow D$ مستقلة خطيا. ومنه باستخدام العكس النقيض فإن D مرتبطة خطيا $\Longleftarrow S$ مرتبطة خطيا.

<u>التمرين السادس:</u>

1. يمكن استخدام الطريقة المستعملة في التنمرين الأول لإثبات أن E_1, E_2, E_3 فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$. لكن هنا سنبين بطريقة أخرى لدينا

$$(x, y, 0) = (x, 0,0) + (0, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

أي أن $E_1 = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$ وهو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاعين $e_1 = (1,0,0)$ و $e_2 = (0,1,0)$.

$$(x, 0, z) = (x, 0,0) + (0,0, z) = x(1,0,0) + z(0,0,1)$$

اذا $E_2 = \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle$ وهو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاعين $e_1 = (1,0,0)$ و $e_3 = (0,0,1)$. $E_3 = \langle (0,0,1)\rangle$ وهو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع $e_3 = (0,0,1)$.

2. واضح أن : $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$. من أجل كل $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
$$(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, y, 0\right) + \left(\frac{x}{2}, 0, z\right) \in E_1 + E_2$$

اذا $\mathbb{R}^3 \subset E_1 + E_2$ ومنه $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

بنفس الطريقة نثبت أن $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$ ومن جهة أخرى

$$(x, y, z) \in E_1 \cap E_3 \Leftrightarrow (z = 0) \wedge (x = y = 0) \Leftrightarrow (x, y, z) = (0,0,0)$$

ومنه : $E_1 \cap E_3 = \{(0,0,0)\}$ اذا $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_3$.

3. $\{e_1, e_2\}$ هو جزء مولد لـ E_1 و هو مستقل خطيا فهو أساس له ومنه $dimE_1 = 2$

وكذلك E_2 مولد بشعاعين مستقلين خطيا وعليه $dimE_2 = 2$.

$$E_1 \cap E_2 = \{(x, 0,0); x \in \mathbb{R}\}$$

وهو ف. ش. ج مولد بالشعاع غير المعدوم e_1 ومنه $dimE_1 \cap E_2 = 1$.

<u>التمرين السابع :</u>

1) ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $u, v \in V$.

$f(\alpha.u + \beta.v) = -(\alpha.u + \beta.v)$	حسب تعريف التطبيق f
$= (-1)(\alpha.u) + (-1)(\beta.v)$	توزيع الضرب الخارجي على الجمع الشعاعي
$= \alpha(-u) + \beta(-v)$	لأن $(-1)(\alpha.u) = (-\alpha)u = \alpha(-u)$
$= \alpha f(u) + \beta f(v)$	حسب تعريف التطبيق f

وعليه فإن f تطبيق خطي.

2) ليكن $(x,y),(x',y')$ من $\mathbb{R}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$

$f[(x,y)+(x',y')]=f[(x+x',y+y')]$ تعريف الجمع في $\mathbb{R}^2$

$=(x+x',x+x'+y+y',y+y')$ تعريف التطبيق f

$=(x.x+y,y)+(x',x'+y',y')$ تعريف الجمع في $\mathbb{R}^3$

$=f[(x,y)]+f[(x',y')]$ تعريف التطبيق f

من جهة أخرى

$f[\alpha(x,y)]=f[(\alpha x,\alpha y)]$ تعريف الضرب الخارجي

$=(\alpha x,\alpha x+\alpha y,\alpha y)$ تعريف التطبيق f

$=\alpha(x.x+y,y)$ تعريف الضرب الخارجي

$=\alpha f[(x,y)]$ تعريف التطبيق f

اذا f تطبيق خطي.

3) ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و $u=(x,y,z,t),v=(x',y',z',t')\in\mathbb{R}^4$

$$f(\alpha.u+\beta.v)=f[(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z',\alpha t+\beta t')]$$

$$=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')=\alpha(x,y)+\beta(x'.y')=\alpha f(u)+\beta f(v)$$

ومنه f تطبيق خطي.

4) التطبيق f ليس خطيا في هذه الحالة مثلا من أجل $x=1,y=2$ نجد

$$f(1+2)=f(3)=3^3=27$$

و

$$f(1)+f(2)=1+8=9$$

أي $f(1)+f(2)\neq f(1+2)$.

التمرين الثامن

$f:E\to F$ تطبيق خطي . نفرض أن $\{f(u_1),f(u_2),f(u_3),\dots,f(u_n)\}$ مستقلة خطيا ونثبت أن $\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$ مستقلة خطيا.

لتكن $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_n$ أعداد حقيقية

$$\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i u_i=0_E\Rightarrow f\left[\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i u_i\right]=f(0_E)$$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i f(u_i)=0_F$ لأن f تطبيق خطي

$\Rightarrow\beta_i=0,i=1,2,3,\dots,n$ لأن $\{f(u_1),f(u_2),f(u_3),\dots,f(u_n)\}$

ومنه $\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$ مستقلة خطيا.

التمرين التاسع:

1) تعيين عبارة التطبيق الخطي f. ليكن $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ يمكن أن نكتب $(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$ ومنه

$$f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)$$

$=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$ لأن f تطبيق خطي

$$= x\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x+y+az\\x+ay+z\\ax+y+z\end{pmatrix}$$ حسب تعريف الضرب الخارجي ثم الجمع في $\mathbb{R}^3$.

2) في حالة $a = 1$. بوضع $u = (x,y,z)$ نجد $f(u) = (x+y+z)b$ حيث $b = (1,1,1)$

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x+y+z)b = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow x+y+z = 0$$

ومنه :

$$kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\}$$

نلاحظ أن صورة التطبيق f محتواة في المجموعة $\{(x,x,x); x \in \mathbb{R}\}$ لأن

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$$

من جهة أخرى نلاحظ أن : $\forall x \in \mathbb{R};\ (x,x,x) = f\left(\frac{x}{3},\frac{x}{3},\frac{x}{3}\right)$ ومنه المجموعة $\{(x,x,x); x \in \mathbb{R}\}$ محتواة في صورة التطبيق f ومنه

$$Imf = \{(x,x,x); x \in \mathbb{R}\}$$

نلاحظ أن Imf هي الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع غير المعدوم $b = (1,1,1)$ وبالتالي فإن $\{b\}$ هو أساس له اذا رتبة f أي بعد Imf هو 1 ونكتب اختصارا

$$rangf = dimImf = 1$$

في حالة $a = -2$.

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = 0 \ldots\ldots (1) \\ x-2y+z = 0 \ldots\ldots (2) \\ -2x+y+z = 0 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نجد: $3(z-y) = 0$ أي $z = y$.

و بطرح (2) من (3) نجد: $3(y-x) = 0$ أي $y = x$. ومنه $x = y = z$

$$kerf = \{(x,x,x); x \in \mathbb{R}\}$$

من جهة أخرى في هذه الحالة نلاحظ أن :

$$f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ومنه

$$f(e_3) = -\big(f(e_1) + f(e_2)\big)$$

اذا من أجل كل $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ يمكن أن نكتب

$$f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) - z\big(f(e_1) + f(e_2)\big) = (x-z)f(e_1) + (y-z)f(e_2)$$

ومنه : $Imf \subset \langle f(e_1), f(e_2) \rangle$

من جهة أخرى

$$u \in \langle f(e_1), f(e_2) \rangle \Rightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, u = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = f(x,y,z)$$

حيث : $x - z = \alpha$ و $y - z = \beta$ أي $x = \alpha + z$ و $y = \beta + z$ و $z \in \mathbb{R}$ كيفي .

اذا $\langle f(e_1), f(e_2) \rangle \subset Imf$ وبالتالي $Imf = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle$.

وبما أن الشعاعين $f(e_1), f(e_2)$ مستقلين خطيا فإن

$$rangf = dimImf = 2$$

3) أ) ليكن $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ و $u = (x,y,z)\ , v = (x',y',z')$ عنصران من F.

$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ لأن f تطبيق خطي.

$= \alpha(2u) + \beta(2v)$ لأن $u, v \in F$

$= 2(\alpha u) + 2(\beta v)$ خاصية الضرب الخارجي

$= 2(\alpha u + \beta v)$ خاصية الضرب الخارجي.

ومنه $\alpha u + \beta v \in F$ وبالتالي F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

ب) من أجل $a = 0$.

$$f(x,y,z)=2(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2x \\ x+z=2y \\ y+z=2z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$$

ومنه يكون $F=\{(x,x,x);x\in\mathbb{R}\}=\langle(1,1,1)\rangle$ اذا $dimF=1$

لدينا من أجل كل $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)=(x,x,x)+(0,y-x,z-x)$$

و

$$(0,y-x,z-x)=(0,y-x,0)+(0,0,z-x)=(y-x)(0,1,0)+(z-x)(0,0,1)$$

نضع $G=\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$ نلاحظ أن $\mathbb{R}^3=F\oplus G$

لأنه حسبما سبق $\mathbb{R}^3=F+G$ و $F\cap G=\{(0,0,0)\}$ لأن

$$(x,y,z)\in F\cap G \Leftrightarrow (x=y=z)\wedge(x=0) \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

بما أن $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ مستقلان خطيا (أثبت ذلك) اذا $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ أساس لمكمل F .

<u>التمرين العاشر:</u>

1) عبارة التطبيق f

$$f(x,y)=f(xe_1+ye_2)=xf(e_1)+yf(e_2)=x(\tau_2-\tau_1)+y(2\tau_1+\tau_3)$$
$$=(2y-x)\tau_1+x\tau_2+y\tau_3=(2y-x)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$=(2y-x,x,y)$$

2) تعيين Imf

$$(2y-x,x,y)=(2y,0,y)+(-x,x,0)=y(2,0,1)+x(-1,1,0)$$

ومنه

$$Imf=\langle(2,0,1),(-1,1,0)\rangle$$

وبما أن الشعاعين $(2,0,1)$ و $(-1,1,0)$ مستقلين خطيا (تأكد من ذلك) فهما يشكلان أساسا لـ Imf ومنه

$$\dim Imf=2$$