Chapitre III : Correction des Systèmes Echantillonnés Asservis

III.1 Objectifs de la Correction :

Les performances naturelles d'un système (stabilité, précision, rapidité, etc...) peuvent ne pas correspondre à un degré d'exigence spécifié dans un cahier des charges. L'objectif de toute correction est de modifier ces performances afin qu'elles respectent au mieux ce cahier des charges.

De façon qualitative :

– Pour rendre le système *stable*, il faut rassembler tous les pôles du système dans le cercle unité et pour garantir une meilleure *stabilité*, il faut éloigner le plus possible les pôles de ce cercle en les rapprochant de l'origine.

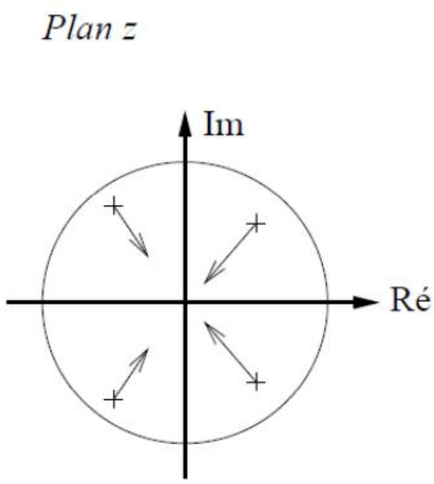

Figure III.1

III.1 Principes Généraux :

III.1.1 Rappel du Cahier des Charges d'un Asservissement :

Les systèmes échantillonnés comme les systèmes à temps continu, doivent en général satisfaire à un cahier des charges qui impose, en boucle fermée, un certain nombre de performances (qui d'ailleurs sont les mêmes qu'en temps continu) : précision, rapidité, marge de stabilité et limitation du dépassement.

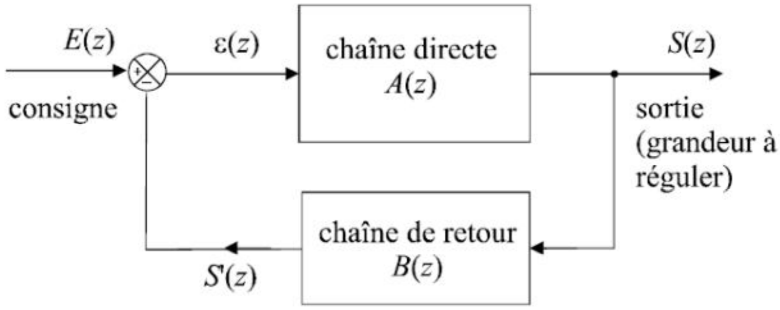

Figure III.2 Schéma général d'un système échantillonné asservi

Considérons un système constitué d'une chaîne directe et d'une chaîne de retour. La plupart du temps, on ne choisit ni les lois de fonctionnement des systèmes *A(z)* et *B(z)*, ni, bien sûr, leurs fonctions de transfert qui, en général, sont des données imposées par la conception même du système asservi en cours d'élaboration.

III.1.2 Rôle du correcteur :

Le rôle essentiel doit consister à modifier les performances du système initial (Figure III.3). Cela revient à dire que nous transformons les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée de manière à imposer à l'ensemble de fonctionner selon le cahier des charges voulu.

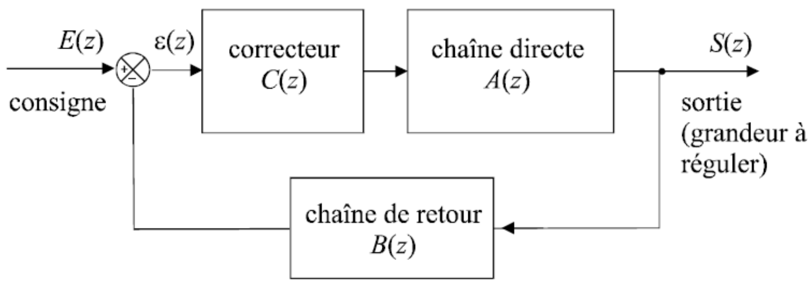

Figure III.3 Schéma général d'un système échantillonné asservi et corrigé

Si $G_i(z)$ et $H_i(z)$ sont les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système <u>initial</u> et $G_c(z)$ et $H_c(z)$ les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système <u>corrigé</u>, on aura :

$$G_i(z) = A(z).B(z) \quad \text{et} \quad H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z).B(z)}$$

$$G_c(z) = C(z).A(z).B(z) \quad \text{et} \quad H_c(z) = \frac{C(z).A(z)}{1 + C(z).A(z).\,B(z)}$$

Tout l'art de la correction des systèmes échantillonnés consiste à choisir la bonne fonction de transfert *C(z)* pour ce correcteur numérique de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise, sans perturber, bien sûr, le fonctionnement du système. Ces corrections sont en général assurées par un calculateur.

III.1.3 Correction Numérique d'un Système à Temps Continu :

Très souvent, on choisit, pour des questions de souplesse et de précision, de corriger numériquement un système à temps continu. Le schéma de la boucle d'asservissement correspondante est représenté sur la figure III.4. Un bloqueur doit, bien entendu, être intercalé entre le correcteur numérique et le système à commander.

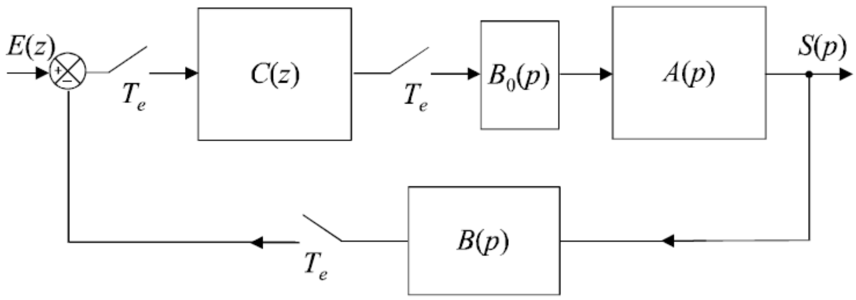

Figure III.4 Asservissement continu commandé et corrigé numériquement.

III.2 Tentatives d'Actions Correctives Simples :

III.2.1 Amélioration de la Précision :

a) Correcteur à Action Intégrale :

La présence, dans la fonction de transfert en boucle ouverte, d'un intégrateur (i.e. d'un pôle égal à 1) assure la nullité de l'erreur de position, c'est-à-dire la précision statique parfaite. Si ce pôle est au moins double (s'il y a au moins deux intégrateurs dans la chaîne directe), l'erreur de vitesse est nulle, autrement dit la précision dynamique parfaite est assurée. Par conséquent, pour améliorer simplement la précision, en boucle fermée, d'un système à temps discret, on peut choisir un correcteur de fonction de transfert égale à :

$$C(z) = \frac{K}{(1 - z^{-1})^n}$$

On choisira $n = 1$ si le cahier des charges impose uniquement une condition de nullité de l'erreur de position et $n = 2$ si l'erreur de vitesse doit être nulle également.

b) Conséquence sur les Autres Performances :

Analysons au travers d'un exemple simple, l'influence de l'introduction d'un intégrateur sur le comportement global d'un asservissement.

Exemple :

Soit un système à temps discret de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{2z}{z - 0.5}$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2z}{3z - 0.5}$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence : $s_k = 0{,}17 s_{k-1} + 0{,}67 e_k$.

Ce système est stable en boucle fermée puisque l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

Soit : $$p_1 = \frac{0.5}{3} = 0.17 < 1$$

Considérons les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau III.1) et représentons-les graphiquement (figure III.5).

Tableau III.1 Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0,667	0,777	0,796	0,799	0,800	0,800	0,800

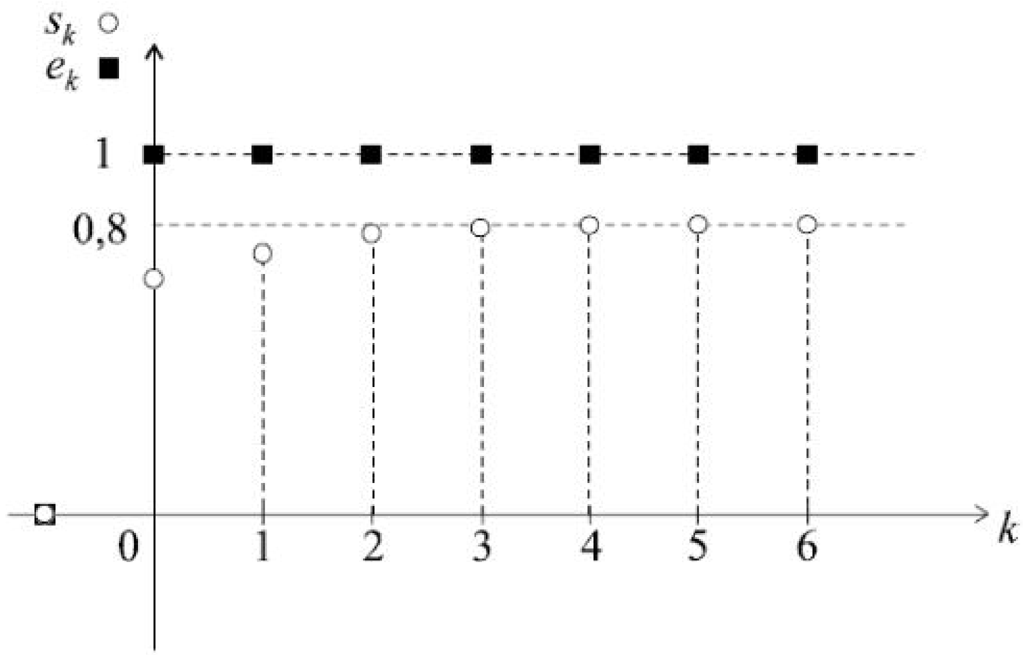

Figure III.5 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée

L'erreur de position a pour valeur :

$$\varepsilon_p = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{1+G(z)}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{1+\dfrac{2z}{z-0.5}}\right] = \frac{1-0.5}{1-0.5+2} = 0.2 = 20\%$$

Introduisons un intégrateur dans la chaîne directe. On a, à présent :

$$G(z) = \frac{K}{1-z^{-1}}.\frac{2z}{z-0.5} = \frac{2z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$ avec K=1 dans un premier temps.

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z-0.5)+2z^2} = \frac{2z^2}{3z^2-1.5z+0.5}$$

Ou encore : $H(z) = \frac{2}{3-1.5.z^{-1}+0.5.z^{-2}}$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence :

$s_k = 0,5s_{k-1} - 0,17s_{k-2} + 0,67e_k$

Les pôles de cette fonction de transfert (les racines de l'équation $3z^2-1,5z+0,5 = 0$) se calculent aisément et on peut vérifier sans peine que leurs modules sont inférieurs à 1. La condition de stabilité est donc toujours vérifiée.

En effet : $\Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 6 = -3,75$

$$p_{1/2} = \frac{1.5 \pm j\sqrt{3.75}}{6} \Rightarrow |p_1| = |p_2| = 0.41$$

Toutefois, les modules de ces pôles sont plus proches de 1 que l'unique pôle du système non corrigé (qui était égal à 0,17). On peut donc en déduire que la marge de stabilité est légèrement diminuée par l'ajout du correcteur (elle reste néanmoins très confortable).

Construisons un tableau avec les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau III.2) et représentons-les graphiquement (figure III.6).

Tableau III.2 Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0,667	1,000	1,056	1,028	1,005	0,998	0,998

On note la présence d'un faible dépassement (environ 6 %) ce qui corrobore la légère perte de marge de stabilité et une rapidité accrue puisque le temps de montée correspond à l'échantillon k = 1, soit $t_m = T_e$.

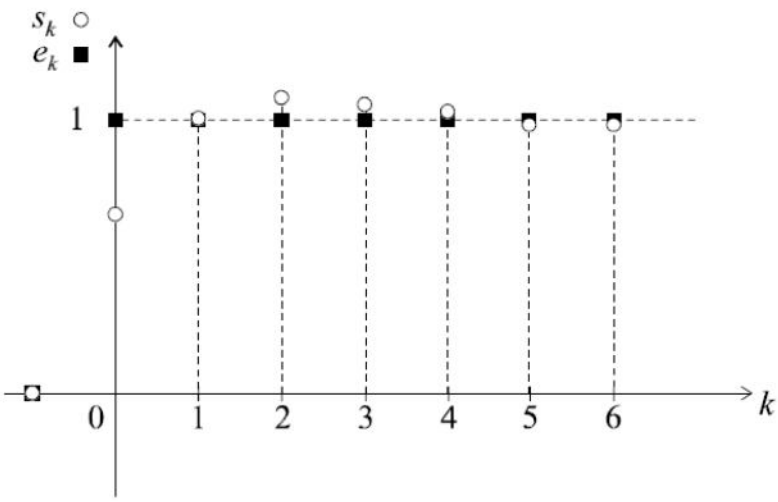

Figure III.6 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction

III.2.2 Action Dérivée :

Un correcteur numérique à action dérivée possède une fonction de transfert $C(z)$ égale à :

$$C(z) = K(1 - z^{-1}) \quad \text{avec} \quad K > 0$$

Analysons, au travers d'un exemple simple, l'influence d'un tel correcteur.

Exemple :

Soit $A(z)$ un système échantillonné placé dans une boucle de régulation à retour unitaire et précédé d'un correcteur à action dérivée, avec :

$$A(z) = \frac{1}{z - 0.1}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système non corrigé est :

$$H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{1}{z + 0.9}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert est :

$$p_1 = -0,9$$

Ce pôle possède bien un module inférieur à 1 mais sa valeur est proche de la limite d'instabilité ; le système est donc stable en boucle fermée mais mériterait sans doute d'être corrigé pour disposer d'une marge de sécurité plus confortable. L'équation de récurrence en boucle fermée étant :

$$s_k = -0,9s_{k-1} + e_{k-1}$$

On peut aisément calculer et représenter graphiquement la suite des échantillons de sortie lorsque l'entrée est un échelon unité pour constater qu'effectivement, le système est stable, mais peu stable si l'on en croit le régime oscillatoire très peu amorti. De plus, il est très peu précis.

Tableau III.3. Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0	1	0,1	0,910	0,181	0,837	0,247	0,778	0,300

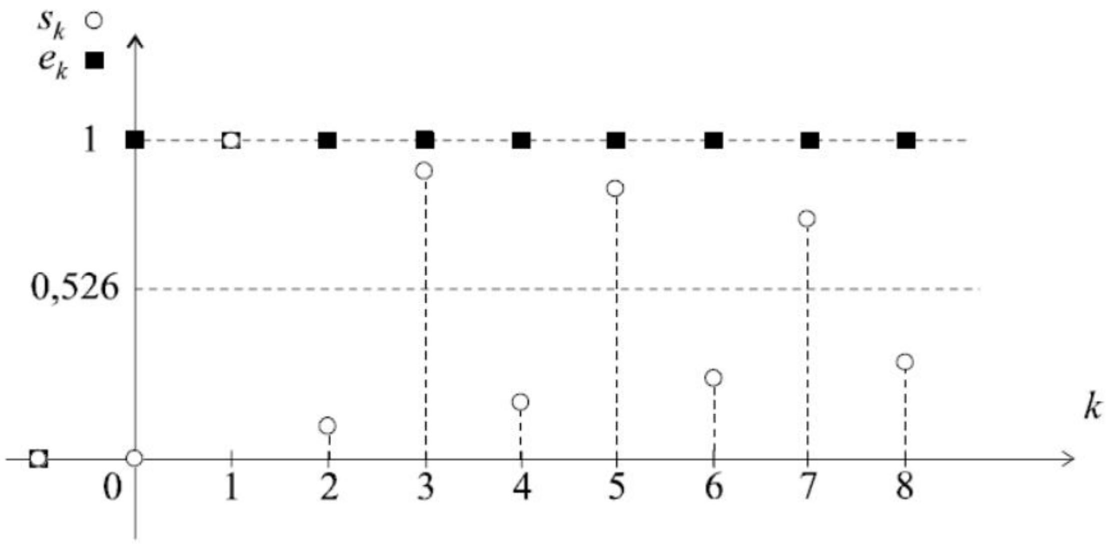

Figure III.7 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée avant correction

En présence du correcteur à action dérivée, on a :

$$G(z) = G(z)A(z) = \frac{K(1-z^{-1})}{z-0.1} = \frac{K(z-1)}{z(z-0.1)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé est donc :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(1-z^{-1})}{z(z-0.1)+K(z-1)} = \frac{K(z-1)}{z^2+(K-0.1)z-K}$$

L'équation de récurrence correspondante est :

$$s_k = (0,1 - K)\, s_{k-1} + Ks_{k-2} + Ke_{k-1} - Ke_{k-2}$$

Calculons les pôles de cette fonction de transfert.

Cette fois, on a : $\Delta = b^2 - 4ac = (K - 0,1)^2 + 4K$

Ce déterminant étant toujours positif, on a :

$$p_{1/2} = \frac{-(K-0{,}1) \pm \sqrt{(K-0{,}1)^2+4K}}{2}$$

soit :
$$|p_1| = \frac{0{,}1-K+\sqrt{(K-0{,}1)^2+4K}}{2}$$

et :
$$|p_2| = \frac{K-0{,}1+\sqrt{(K-0{,}1)^2+4K}}{2}$$

On peut représenter, sur un même graphique, les variations de $|p_1|$ et de $|p_2|$ en fonction de K (figure III.8).

Pour que le système soit stable, il faut que les deux pôles aient un module inférieur à 1.

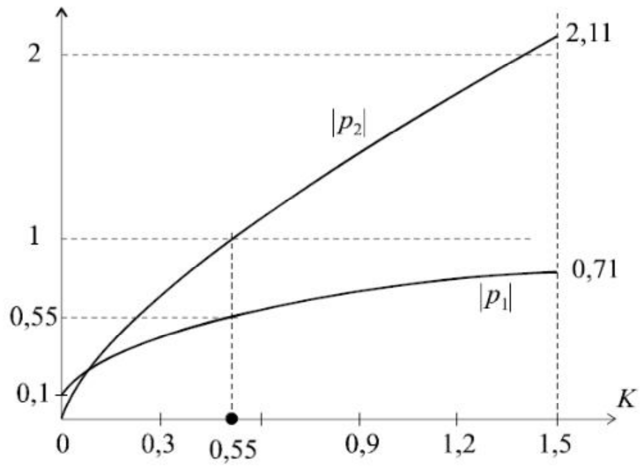

Figure III.8 Variations des modules des pôles en fonction du gain K

On en déduit donc : $K < 0{,}55$

Choisissons par exemple $K = 0{,}4$ puis calculons et traçons la suite d'échantillons en sortie du système lorsque celui-ci est soumis à un échelon unité (tableau III.4 et figure III.9). Dans ce cas, on a :

$$s_k = -0{,}3s_{k-1} + 0{,}4s_{k-2} + 0{,}4e_{k-1} - 0{,}4e_{k-2}$$

Tableau III.4. Simulation de la suite d'échantillons

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0,400	-0,120	0,196	-0,107	0,110	-0,076	0,067	-0,050

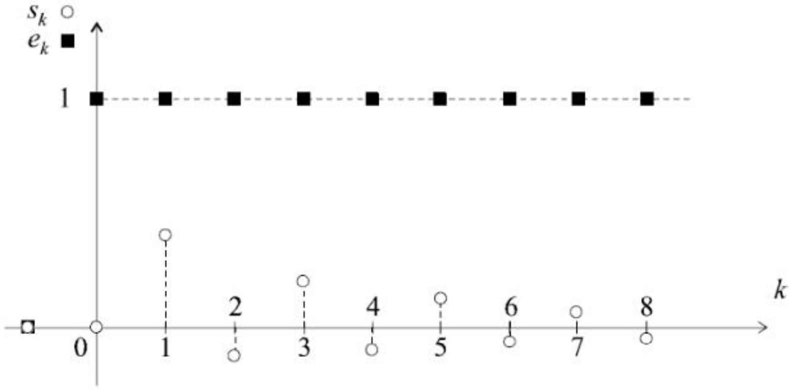

Figure III.9 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction

Le système est effectivement plus stable puisqu'il converge vers une valeur finie beaucoup plus vite, ce qui est conforme au calcul des nouveaux pôles.

Soit : $|p_1| = 0,5$ et : $|p_2| = 0,8$

Toutefois, ce type de correction est inacceptable puisque l'erreur de position atteint à présent 100%.

Exercice :

On considère un système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{z - 0.2}{z - 0.7}$$

Ce système étant placé dans une boucle à retour unitaire, calculer l'erreur de position en boucle fermée et calculer puis tracer la suite des premiers échantillons de sortie en considérant que le signal de consigne est un échelon unité.

On introduit ensuite un intégrateur dans la chaîne directe, soit : $C(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$

Montrer que le système est toujours stable et calculer puis tracer la suite des premiers échantillons de sortie en considérant que le signal de consigne est un échelon unité. Conclure.